

62-50  
А-92



# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ



# OPTIMAL CONTROL

*An Introduction to the Theory  
and Its Applications*

MICHAEL ATHANS

Assistant Professor  
Department of Electrical Engineering  
Massachusetts Institute of Technology

PETER L. FALB

Associate Professor  
Information and Control Engineering  
The University of Michigan

McGRAW-HILL BOOK COMPANY

*New York/St. Louis/San Francisco/Toronto/London/Sydney*

М. АТАНС и П. ФАЛБ

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

*Перевод с английского*  
канд. техн. наук Г. Н. АЛЕКСАКОВА

Под редакцией  
д-ра техн. наук проф. Ю. И. ТОПЧЕЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МАШИНОСТРОЕНИЕ»  
Москва 1968

**Атанс М. и Фалб П. Л. Оптимальное управление.** Перевод с английского. Под ред. д-ра техн. наук проф. Ю. И. Топчиева. М., «Машиностроение», 1968, стр. 764.

Книга американских ученых М. Атанса и П. Фалба представляет собой систематическое изложение теории оптимального управления детерминированных систем.

Изложению теории оптимального управления предшествует обширное введение, где приводятся основные сведения из теории множеств, линейной алгебры и теории дифференциальных уравнений линейных систем с постоянными параметрами.

Далее рассматривается теория оптимального управления на основе классических вариационных методов и принципа максимума Понтрягина.

Ряд глав посвящен изложению методов расчета и проектирования систем оптимальных по отношению к различным критериям оптимальности (максимуму быстродействия, расходу топлива, комбинированному и квадратичному критериям). Как правило, результаты синтеза доведены до рабочего алгоритма или блок-схемы аналогового управляющего устройства.

Книга снабжена многочисленными примерами.

Работа предназначена для научных работников, инженеров, преподавателей и аспирантов, занимающихся вопросами автоматического управления, а также может быть использована студентами старших курсов высших учебных заведений, специализирующихся в области автоматике. Илл. 265. Табл. 2. Библ. 325 назв.

Редактор инж. Л. П. Строганов

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Прошло немногим более 10 лет с тех пор, как Л. С. Понтрягин и его ученики В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко заложили строгие математические основы теории оптимального управления, сформулировав и доказав принцип максимума<sup>1</sup>, а к настоящему времени методы оптимального управления нашли весьма широкое практическое применение.

Несмотря на физическую ясность этих методов, в практике проектирования оптимальных систем инженер встречается с целым рядом математических трудностей, для преодоления которых ему необходимы глубокое понимание теории оптимального управления и обширные знания в различных ее технических приложениях. Предлагаемый вниманию читателей перевод книги американских ученых М. Атанса, П. Фалба и представляет собой систематическое изложение теории оптимального управления детерминированных систем, иллюстрированной многочисленными примерами, необходимыми для понимания теории и получения первых практических навыков синтеза оптимальных систем.

Авторы книги, желая сделать ее более доступной широкому кругу читателей, в ряде случаев отказываются от строгих аналитических доказательств, а пользуются геометрическими, носящими часто эвристический характер<sup>2</sup>. Применение геометрических доказательств не только упрощает изучение теории оптимального управления за счет большей наглядности изложения, но формирует у читателя четкие представления, позволяющие ему быстрее перейти к решению поставленных перед ним практических задач.

Книга состоит из трех разделов: первого (гл. 2—4), где излагаются математические основы линейной алгебры и динамики линейных систем управления с постоянными параметрами; второго (гл. 5—6), где рассматривается теория оптимального управления, основанная на классических вариационных методах, принципах максимума Понтрягина и динамического программирования Беллмана; третьего (гл. 7—10), посвященного методам проектирования систем, оптимальных по быстродействию, расходу топлива и квадратическому критерию.

Книга представляет собой обработку прочитанных авторами в Массачусетском технологическом институте лекций по теории оптимального управления и ее практическим приложениям и отличается хорошей логикой построения, четкостью математических постановок рассматриваемых задач, ясностью изложения, большим числом примеров конкретного проектирования некоторых классов систем автоматического управления. В тех случаях, когда аналитические методы проектирования оптимальных систем делаются громоздкими, авторы прибегают к расчетам на цифровой вычислительной машине.

Книга представляет интерес и будет полезна как для инженеров, занимающихся проектированием систем автоматического управления, так и для аспирантов и студентов старших курсов высших учебных заведений, изучающих теорию автоматического управления.

*Ю. И. ТОПЧЕЕВ*

<sup>1</sup> См. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов. «Доклады Академии наук СССР», т. 110, 1956, № 1, стр. 7—10. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.

<sup>2</sup> В этих случаях авторы указывают на литературные источники, в которых приводятся строгие математические доказательства.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .	9
-----------------------	---

### ГЛАВА 1

#### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ. СОДЕРЖАНИЕ КНИГИ

1.1. Введение (11). 1.2. Задача синтеза системы (11). 1.3. Цель управления (13). 1.4. Исторический обзор (14). 1.5. Назначение книги (17). 1.6. Общие замечания по структуре книги (18). 1.7. Описание содержания глав книги (20). 1.8. Требования к минимуму знаний, необходимых для чтения книги, и предложения относительно ее изучения (23).

### ГЛАВА 2

#### ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Введение (25). 2.2. Множества (25). 2.3. Операции над множествами (26). 2.4. Функции (29). 2.5\*. Векторные пространства<sup>1</sup> (30). 2.6\*. Линейные комбинации и базис (33).

**Линейная алгебра.** 2.7\*. Линейные преобразования и матрицы (35). 2.8\*. Операции над линейными преобразованиями и матрицами (36). 2.9\*. Линейные преобразования  $V$  в  $V$  (40). 2.10\*. Собственные векторы и собственные значения (42).

**Евклидовы пространства.** 2.11\*. Внутренние произведения (46). 2.12. Неравенство Шварца (48). 2.13. Определение ортогональности и нормы (49). 2.14. Некоторые свойства скалярного произведения на  $R_n$  (50). 2.15. Некоторые свойства симметричных матриц (53).

### ГЛАВА 3

#### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3.1. Введение (58).

**Расстояние и связанные с ним понятия.** 3.2\*. Определение (58). 3.3\*. Сферы и пределы (60). 3.4\*. Открытые и замкнутые множества (62). 3.5\*. Полнота и сжатие (65).

**Свойства множеств в  $R_n$ .** 3.6. Компактность (67). 3.7. Гиперплоскости и конусы (68). 3.8\*. Выпуклость (71).

**Векторные функции.** 3.9\*. Вводные замечания (75). 3.10\*. Непрерывность (77). 3.11. Кусочная непрерывность (80). 3.12\*. Производные (82). 3.13. «Гладкие» множества из  $R_n$  (90). 3.14\*. Интегралы (92). 3.15\*. Векторные пространства (97). 3.16\*. Функционалы (105).

**Дифференциальные уравнения.** 3.17\*. Предварительные замечания (107). 3.18. Теорема существования и единственности (112). 3.19\*. Линейные дифференциальные уравнения. Основные положения (118). 3.20. Фундаментальная матрица (121).

**Системы с постоянными параметрами.** 3.21\*. Экспонента от  $At$  (127). 3.22. Сведение к канонической форме (130). 3.23\*. Вычисление фундаментальной матрицы с помощью преобразования Лапласа (133). 3.24\*. Системы  $n$ -го порядка (137).

\* \* \*

3.25. Сопряженная система (141). 3.26. Устойчивость линейных систем с постоянными параметрами (142).

<sup>1</sup> Значение звездочек разъясняется в гл. 1.

## ГЛАВА 4

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

4.1\*. Введение (145). 4.2\*. Цепочка  $RL$  (145). 4.3. Система со многими переменными (150).

**Динамические системы.** 4.4\*. Вводные замечания (151). 4.5. Определение (155). 4.6. Динамические системы, рассматриваемые в данной книге (159). 4.7. Линейные динамические системы (162). 4.8. Связь между входом и выходом системы. Передаточная функция (164). 4.9\*. Отыскание представления в пространстве состояний (или в форме динамической системы) объекта, передаточная функция которого содержит только полюса (165). 4.10\*. Отыскание представления в пространстве состояний (или в форме динамической системы) объекта, передаточная функция которого содержит полюса и нули (171).

**Задача управления.** 4.11\*. Вводные замечания (178). 4.12\*. Определения (179). 4.13. Специальные случаи (181). 4.14\*. Множество достижимых состояний (183). 4.15\*. Управляемость и наблюдаемость. Определения (186). 4.16\*. Управляемость линейных систем с постоянными параметрами (187). 4.17\*. Наблюдаемость линейных систем с постоянными параметрами (192).

**Физическое представление понятия нормальности.** 4.18. Регулирование выхода (196). 4.19. Эффект сокращения полюса с нулем (198). 4.20. Практический пример (199). 4.21\*. Нормальные линейные системы с постоянными параметрами (201).

## ГЛАВА 5

### УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ.

#### ПРИНЦИП МИНИМУМА И УРАВНЕНИЕ ЯКОБИ—ГАМИЛЬТОНА

5.1. Введение (204). 5.2. Обычный минимум (205). 5.3. Обычный минимум с ограничениями. Простая задача (210). 5.4. Обычный минимум с ограничениями. Необходимые условия и множители Лагранжа (214). 5.5. Некоторые замечания (217). 5.6. Пример (222).

**Вариационный подход к задаче управления.** 5.7\*. Необходимые условия для задачи с незакрепленными концами (233). 5.8. Достаточные условия для задачи с незакрепленным концом (246). 5.9. Задача с закрепленным концом (252). 5.10\*. Обсуждение вариационного метода (254).

**Принцип минимума Понтрягина.** 5.11\*. Введение (260). 5.12\*. Формулировка задачи управления (260). 5.13\*. Принцип минимума Понтрягина (263). 5.14\*. Замена переменных (266). 5.15\*. Доказательство принципа минимума. Предварительные замечания (280). 5.16\*. Эвристическое доказательство принципа минимума (282). 5.17\*. Некоторые замечания по принципу минимума (313).

**Достаточные условия оптимальности.** 5.18\*. Вводные замечания (316). 5.19\*. Уравнение для функционала (317). 5.20\*. Достаточное условие оптимальности (319). 5.21. Некоторые замечания относительно достаточных условий (324).

## ГЛАВА 6

### СТРУКТУРА И СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

6.1. Введение (327).

**Задачи об оптимальном быстродействии.** 6.2\*. Формулировка и геометрическая интерпретация (328). 6.3\*. Применение принципа минимума (334). 6.4\*. Замечания (351). 6.5\*. Линейные системы с постоянными параметрами (352). 6.6 Структура оптимального регулятора и проблема обратной связи (364). 6.7. Геометрические свойства управления, оптимального по быстродействию (367). 6.8. Существование оптимального управления (374). 6.9. Уравнение Гамильтона—Якоби (377). 6.10. Комментарии и замечания (382).

**Задачи на оптимум расхода топлива.** 6.11. Введение (383). 6.12. Обсуждение задачи и ограничений (384). 6.13\*. Формулировка задачи и получение необходимых условий (385). 6.14\*. Линейные системы с постоянными параметрами (394). 6.15. Дополнительные формулировки и функционалы (404). 6.16. Комментарии (409).

**Задачи на минимум энергии.** 6.17\*. Введение (410). 6.18\*. Линейная задача с заданным конечным состоянием и временем перехода (412). 6.19\*. Пример (417). 6.20. Ограничения управления по величине (426).

**Вырожденные задачи.** 6.21\*. Гамильтониан — линейная функция управления (430). 6.22. Гамильтониан — линейная функция управления и его абсолютного значения (442).

\* \* \*

6.23. Некоторые замечания относительно существования и единственности оптимальных и экстремальных управлений (444). 6.24\*. Связь между задачами с фиксированными и нефиксированными граничными условиями (446). 6.25. Заключительные замечания (450).



## ГЛАВА 7

### ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

7.1\*. Введение (451).

**Оптимальные по быстродействию системы** 7.2\*. Управление объектом, который представляет собой два интегратора (453). 7.3. Управление объектами с двумя постоянными времени (469). 7.4\*. Управление объектом, описываемым передаточной функцией третьего порядка с двумя интегрирующими и одним апериодическим звеньями (477). 7.5. Управление объектом, имеющим передаточную функцию с действительными полюсами (489). 7.6. Некоторые замечания (501). 7.7\*. Управление гармоническим осциллятором (503). 7.8. Управление устойчивым гармоническим осциллятором с демпфированием (520). 7.9. Управление гармоническим осциллятором при помощи двух входных переменных (525). 7.10. Управление нелинейными системами первого порядка (537). 7.11\*. Управление для одного класса нелинейных систем второго порядка (541). 7.12\*. Управление объектом, имеющим в передаточной функции два интегрирующих звена и один нуль (547). 7.13. Управление объектом, имеющим передаточную функцию с двумя интегрирующими звеньями и двумя нулями (560). 7.14. Общие результаты относительно оптимального по быстродействию управления объектами, имеющими в передаточных функциях дифференцирующие звенья (567). 7.15. Заключительные замечания (578).

## ГЛАВА 8

### ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО РАСХОДУ ТОПЛИВА

8.1. Введение (580). 8.2. Линейные системы первого порядка. Интегратор (582).

8.3. Линейные системы первого порядка. Апериодическое звено (588).

**Оптимальное по расходу топлива управление объектом с двойным интегрированием.** 8.4\*. Постановка задачи (591). 8.5\*. Задача с незадаанным временем перехода (592). 8.6\*. Время перехода фиксировано или ограничено сверху (600). 8.7. Время перехода ограничено произведением минимального времени на постоянный коэффициент (608). 8.8\*. Минимизация линейной комбинации времени и расхода топлива (616).

\* \* \*

8.9. Минимизация линейной комбинации времени и расхода топлива для объекта, представляющего собой интегратор и апериодическое звено (622). 8.10\*. Минимизация линейной комбинации времени и расхода топлива для нелинейной системы второго порядка (633). 8.11\*. Замечания и обобщения (649).

## ГЛАВА 9

### ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ

9.1\*. Введение. (654) 9.2\*. Постановка задачи (656). 9.3\*. Задача о регуляторе состояния (659). 9.4. Обсуждение результатов и примеры (668). 9.5\*. Задача о регуляторе состояния для инвариантной во времени системы при  $T = \infty$  (672). 9.6. Анализ системы первого порядка (677). 9.7. Задача о регуляторе выхода (682). 9.8\*. Задача о регуляторе выхода для системы с одним входом и одним выходом (687). 9.9\*. Задача слежения (692). 9.10. Приближенные соотношения для систем, инвариантных во времени (699). 9.11\*. Задачи слежения, сводимые к задачам о регуляторе выхода (702). 9.12. Анализ следящей системы первого порядка (704). 9.13\*. Некоторые замечания (708).

## ГЛАВА 10

### ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ УПРАВЛЕНИЯ ГИПЕРСФЕРОЙ

10.1. Введение (710). 10.2. Обсуждение, ограничения  $\|u(t)\| \leq m$  (711). 10.3. Постановка задачи об управлении оптимальном по быстродействию (712). 10.4. Аналитическое определение оптимального по быстродействию управления для одного класса нелинейных систем (715). 10.5. Обсуждение результатов (718). 10.6. Оптимальное управление системами с инвариантной нормой (721). 10.7. Оптимальное по быстродействию управление скоростью вращения тела с одной осью симметрии (733). 10.8. Рекомендации по дальнейшему чтению литературы (744).

\* \* \*

Литература . . . . .	745
Алфавитно-предметный указатель . . . . .	758

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Последние достижения науки об управлении вызвали необходимость написать книгу, являющуюся введением в теорию оптимального управления, доведенную до практического применения. Цель данной книги — снабдить инженера или аспиранта основными знаниями, необходимыми для глубокого понимания теории оптимального управления автоматическими системами. Мы надеемся, что материал, изложенный в книге, позволит аспирантам, начиная с ранней ступени их деятельности, успешно применять на практике теоретические положения работ по автоматическому управлению и критически оценивать достоинства и значение многочисленных работ, публикуемых в литературе по теории управления. Нам хотелось также указать на большое значение аккуратного и точного мышления и дисциплинированной интуиции для будущего ученого. В связи с этим в книгу было включено большое число примеров и упражнений.

Книга подразделяется на три основные части:

1. Математическое введение в описание и анализ динамических систем (гл. 2—4).

2. Основные положения теории оптимального управления, включая принцип максимума Понтрягина (гл. 5 и 6).

3. Приложения теории оптимального управления к расчету систем с обратной связью, оптимальных по отношению к различным критериям (гл. 7—10).

В гл. 2 излагаются достаточно конспективно основные положения линейной алгебры и определяются векторные обозначения, используемые на протяжении всей книги. В гл. 3 рассматриваются элементарные топологические свойства  $n$ -мерного евклидова пространства, основы теории векторных функций и различные положения векторных дифференциальных уравнений.

Гл. 4 посвящена изложению основных понятий о представлении динамической системы в пространстве состояний и определению задачи управления. В гл. 5 выводятся и анализируются основные условия оптимальности, включая принцип максимума Понтрягина. Структура и основные свойства оптимальных систем по отношению к различным конкретным показателям преобразования рассматриваются в гл. 6, которая является переходной от теоретического материала предыдущих глав к проблемам расчета конкретных систем управления, рассматриваемых в последующих главах. Гл. 7 посвящена решению задачи оптимизации по быстродействию для некоторых специальных систем. В гл. 8 даются приложения теории к расчету систем, имеющих минимум расхода топлива. В гл. 9 предлагаются вниманию читателя общие результаты, достижимые для одного важного класса задач оптимизации, а именно: для управления линейными объектами по критерию квадратичной интегральной оценки. В заключительной главе (гл. 10) рассматривается класс задач автоматического

управления, которые решаются проще прямыми методами, нежели методами, основанными на принципе максимума Понтрягина.

Мы глубоко признательны многим нашим коллегам и студентам за их неоценимую помощь в подготовке данной книги. В частности, мы хотим поблагодарить профессора Калифорнийского университета в Беркли К. А. Дэзоера, декана Бруклинского политехнического института Джона Траксела, профессора Калифорнийского университета в Беркли Е. Р. Поллака, доктора Х. К. Кнудсена из Линкольновской лаборатории Массачузетского технологического института и доктора С. Дж. Кэхью из научно-исследовательской лаборатории ВВС в Кембридже за внимательный просмотр рукописи и за их многочисленные, очень полезные предложения и комментарии.

Мы также выражаем нашу благодарность доктору Г. Галкину из лаборатории фирмы «Бэлл-Телефон» в Уиппени за его замечания по гл. 4 и 5; профессору В. У. Броккэту из Массачузетского технологического института за предложения по гл. 6 и профессору Р. Е. Калману из Стэнфордского университета за очень полезные замечания по гл. 9. Ряд студентов Массачузетского технологического института помогли нам своими замечаниями и предложениями после очень внимательного изучения рукописи.

Мы особенно хотим поблагодарить Д. Грея, Д. Клеймана, У. Левина, Дж. Планта и Х. Уитсенхаузена за их исключительную помощь в написании книги. Р. А. Кэрл из Линкольновской лаборатории предоставил нам результаты расчетов на цифровой вычислительной машине, приведенные в гл. 9, за что мы ему очень признательны. И, наконец, мы хотим поблагодарить мисс Дж. М. Келли, которая выполнила исключительную работу по печатанию большей части рукописи, и миссис С. М. Маккей, которая очень помогла нам при подготовке рукописи.

*МАЙКЛ АТАНС  
ПИТЕР Л. ФАЛЬ*

---

## ГЛАВА 1

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ. СОДЕРЖАНИЕ КНИГИ

#### 1.1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие значительное внимание уделяется оптимальному управлению, получившему свое развитие в виде общей теории, основанной на сочетании вариационных методов, теории автоматического регулирования и применении быстродействующих вычислительных машин. Поэтому возникла большая необходимость в изложении введения в теорию оптимального управления и ее приложений, которая снабдила бы инженера и студента теоретическими основами, необходимыми для глубокого понимания последних достижений в теории, практике расчетов и проектировании систем автоматического управления. Предлагаемая вниманию читателя книга восполняет в какой-то мере данный пробел.

В настоящей главе рассмотрены основные положения, сформулирована задача синтеза оптимального управления и приведено содержание книги. В § 1.2 дана постановка задачи синтеза систем оптимального управления. Затем в § 1.3 перечислены вопросы, которые необходимо решать при проектировании систем оптимального управления. Далее в § 1.4 изложена краткая история развития теории оптимального управления и указано на перспективность вопросов, рассматриваемых в книге. В § 1.5 достаточно подробно рассказано о цели данной книги.

Исходя из сформулированных задач будут сделаны общие замечания по структуре книги (§ 1.6) и подробно описано содержание ее глав (§ 1.7). Первая глава заканчивается § 1.8, в котором указываются требования к объему предварительных знаний, необходимых для чтения книги, а также даются некоторые предложения по изучению ее материалов, основанные на нашем опыте преподавания.

#### 1.2. ЗАДАЧА СИНТЕЗА СИСТЕМЫ

Синтез системы начинается с постановки задачи (иногда довольно неопределенной), которая должна выполняться с помощью существующего или вновь разработанного метода. Например, специалисту по проектированию систем может быть предложено увеличить выход химической дистилляционной колонны или спроектировать систему связи со спутником. В качестве требований к задачам инженеру обычно задается:

1. Некоторая совокупность целей, которые достигаются в результате осуществления физического процесса. Например, может быть поручено спроектировать ракету, способную перехватить заданную цель в течение определенного отрезка времени.

2. Некоторая совокупность ограничений как внутренних, присущих самому физическому процессу, так и наложенных искусственно, извне.

В реальных системах почти всегда существуют ограничения, связанные со стоимостью, надежностью или размерами объектов или устройств управления.

Разработка системы, которая выполняет поставленные перед ней задачи и удовлетворяет наложенным на нее ограничениям, по сути дела, и есть проблема синтеза системы.

Существуют два метода решения задачи синтеза: эмпирически — интуитивный (первый метод) и логически — дедуктивный (второй метод). Решая задачу синтеза первым методом, инженер использует свой опыт, умение, интуицию и результаты экспериментов с тем, чтобы создать из реальных агрегатов некоторый прототип требуемой системы. Он имеет дело с реальными агрегатами и не разрабатывает математических моделей, не прибегает к методу моделирования системы. Короче говоря, исходя из имеющихся агрегатов или оборудования, которое может быть разработано, инженер просто собирает систему, выполняющую поставленную задачу. Например, если инженеру задан тип проигрывателя, окончательный усилитель и характеристики громкоговорителя, а перед ним ставится задача спроектировать систему звуковоспроизведения, отвечающую заданным показателям качества, то он может на основе экспериментов и своего опыта прийти к выводу, что заданные требования к качеству звуковоспроизведения могут быть удовлетворены с помощью предварительного усилителя с вполне определенными характеристиками, который он заказывает и после его изготовления включает в рассматриваемую систему. Поэтому первый метод часто справедливо относится к «инженерному искусству».

К сожалению, для сложных систем с высокой точностью работы первый метод часто оказывается неприемлемым. Более того, высокая стоимость оборудования, нужного для проведения экспериментов, и возможность привести его в негодное состояние могут являться серьезным препятствием к применению этого метода. Например, никто не вздумает пытаться управлять ядерным реактором, просто экспериментируя с самим реактором, и, наконец, первый метод редко приводит к созданию общих принципов синтеза систем, которые могут применяться при решении других задач.

Второй метод решения задачи синтеза начинается с замены реальной системы математическими соотношениями. Другими словами, первый шаг синтеза состоит в разработке математической модели, соответствующей физическому процессу, целям системы и налагаемым ограничениям. Удовлетворительное математическое описание и формулировка проблемы синтеза системы являются исключительно увлекательной и сложной задачей. Желательные особенности системы, такие как надежность и простота, почти невозможно перевести на математический язык<sup>1</sup>. Более того, математические модели, которые являются идеализацией и приближением к реальным системам, не являются единственными.

Сформулировав задачу синтеза в виде некоторых математических зависимостей, инженер, проектирующий систему, ищет далее ее структурную

---

<sup>1</sup> В настоящее время на основе развития методов регуляризации некорректных задач А. Н. Тихонова В. В. Солодовниковым разработан принцип минимальной сложности, позволяющий синтезировать систему управления с наиболее простой структурой. См., например, следующие работы: Солодовников В. В., Ленский В. Л. Синтез систем управления минимальной сложности. «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1966, № 2. Солодовников В. В., Ленский В. Л. Принцип минимальной сложности и регуляризация задач синтеза систем управления (гл. 5); Синтез оптимальных систем и корректирующих устройств минимальной сложности (гл. 8). В сборнике «Современные методы проектирования систем автоматического управления. Анализ и синтез». М., «Машиностроение», 1967 (Прим. ред.).

схему, которая представляет собой аналитическое решение стоящей перед ним проблемы синтеза. Моделирование математических соотношений с помощью средств вычислительной техники (цифровых, аналоговых или аналогово-цифровых) часто играет весьма важную роль в поисках нужного решения. Полученное решение даст инженеру некоторые представления о числе требуемых взаимозависимостей, о типе вычислений, которые должны быть проделаны, о необходимых математических описаний подсистем и т. д.

После определения соотношений, описывающих систему в целом, инженер часто моделирует их с тем, чтобы глубже «заглянуть внутрь» системы и исследовать поведение модели при идеальных условиях. Из моделирования можно сделать вывод о том, насколько математические соотношения соответствуют реальной физической системе, исследовать чувствительность модели к изменениям параметров и непредсказуемым возмущениям, сравнить различные варианты структуры системы.

После завершения проектирования и проверки путем моделирования и экспериментов с моделью инженер строит прототип системы в виде макета. Процесс макетирования обратен процессу моделирования, поскольку макет — это физическая система, которая должна адекватно изображать полученные математические соотношения. Затем исследуется макет системы с целью установить, отвечает ли система предъявленным требованиям и удовлетворяются ли заданные ограничения. Если система функционирует правильно, работа может считаться завершённой<sup>1</sup>.

Часто по экономическим или другим причинам инженер бывает не удовлетворен системой, которая выполняет поставленную задачу, и он пытается ее улучшить, или оптимизировать. Процесс оптимизации на этапе предварительного проектирования весьма полезен с точки зрения понимания работы системы и часто используется для сравнения вариантов, в то время как процесс оптимизации на этапе математического макетирования связан в основном с выбором лучших показателей. Роль оптимизации в задаче синтеза будет рассмотрена в следующем параграфе.

### 1.3. ЦЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ

Определенный класс задач синтеза систем представляет собой задачу «управления» системой. Например, перед инженером может быть поставлена задача разработать автопилот с определенным видом переходной характеристики, быстродействующую следящую систему или систему управления положением спутника, которая не потребляла бы слишком много топлива. Запись целей управления в математической форме на этапе предварительного проектирования обычно называют задачей управления.

Существенными элементами задачи управления являются:

- 1) математическая модель системы, которой надо управлять;
- 2) желаемый выходной сигнал системы;
- 3) совокупность допустимых входов или управляющих сигналов;

---

<sup>1</sup> По терминологии, принятой в СССР, первый этап проектирования системы управления, выполненный на основе математических соотношений, именуется предварительным (предэскизным) проектированием. Второй этап проектирования, когда упрощенные математические соотношения заменяются более полной математической моделью, реализуемой на электронных вычислительных машинах, называется эскизным проектированием (математическим моделированием). На третьем этапе проектирования к электронной модели подключается динамический стенд, имитирующий перемещения объекта управления. Макеты реальной аппаратуры управления устанавливаются на стенде. Этот этап проектирования именуется стендовой отработкой системы управления (физическим моделированием). И, наконец, на четвертом этапе проектирования производится отработка системы управления в реальных условиях (натурные испытания). (Прим. ред.).

4) функционал, или стоимость, измеряющие эффективность данного процесса управления.

Рассмотрим теперь, как возникают эти элементы из физической задачи синтеза реальной системы управления.

Математическая модель, представляющая физическую систему, состоит из набора соотношений, которые описывают реакцию или «выход» системы относительно различных входных сигналов. Ограничения, основанные на особенности физических процессов в системе, связаны с этим набором соотношений между входами и выходом системы.

При переводе задачи проектирования в задачу управления инженер сталкивается с трудностью описания желаемого физического поведения системы в математической форме. Цели системы часто переводятся в требования к выходу системы. Например, если проектируется следящая система, желаемым выходом является сам отслеживаемый сигнал (или сигнал, достаточно близкий к нему).

Поскольку «управляющие» сигналы в физической системе обычно получаются с помощью устройств, которые могут обеспечить лишь ограниченные по величине силы или энергии, на входные сигналы накладываются некоторые ограничения. Эти ограничения дают набор так называемых допустимых входных (управляющих) сигналов.

Часто желаемые цели могут быть достигнуты с помощью различных управляющих сигналов, и поэтому инженер отыскивает способ измерения качества работы системы или стоимости управления, который позволил бы ему выбрать «лучший» вход. Выбор математического выражения функционала является весьма субъективным моментом, так как выбор, сделанный одним проектировщиком, не является для другого обязательным. Опыт и интуиция инженера играют важную роль в определении функционала стоимости, подходящего для поставленной перед ним задачи. Более того, функционал (стоимость) будет зависеть от желаемого поведения системы. Например, при стремлении ограничить колебания переменной, описывающей поведение системы, например  $x(t)$ , можно принять стоимость преобразования (функционал) пропорциональной  $[\dot{x}(t)]^6$  и попытаться сделать интеграл этой стоимости на отрезке времени, скажем  $t_1 \leq t \leq t_2$ , малым. В большинстве случаев функционал выбирается таким образом, чтобы его величина зависела от входного сигнала и переменных, описывающих поведение системы.

Когда функционал выбран, задача управления формулируется следующим образом: требуется определить допустимые входные сигналы, обеспечивающие получение желаемого результата на выходе, одновременно минимизируя (оптимизируя) выбранный показатель. Теория оптимального управления помогает инженеру в отыскании решения стоящей перед ним задачи. Такое решение (если оно существует) называется оптимальным управлением.

Итак, задача управления есть перевод задачи синтеза системы управления на язык математики; решение задачи управления относится к определенной методике, которой руководствуется инженер при разработке реальной системы управления.

#### 1.4. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

До второй мировой войны проектирование систем управления представляло собой искусство. В течение войны и после нее было потрачено много усилий на проектирование замкнутых систем, в которых отрицательная обратная связь использовалась для улучшения переходного процесса и повышения точности. Первые теоретические методы анализа си-

стемы автоматического регулирования опирались на работы Г. Бодэ и Найквиста <sup>1</sup>. В частности, такие понятия, как частотная характеристика, ширина полосы пропускания, усиление (в децибеллах) и запас фазы использовались для проектирования систем в частотной области, основываясь на способе проб и ошибок. По сути дела, это было началом инженерных методов современной теории управления.

Теория автоматического регулирования <sup>2</sup> быстро развивалась в период после окончания войны и до начала 50-х годов. В это время широко применялись временные критерии, такие как время нарастания, время переходного процесса, максимум относительного перерегулирования. Метод корневого годографа, предложенный в 1948 г. У. Эвансом <sup>3</sup>, явился связующим началом между методами анализа и синтеза во временной и частотной областях и представляет собой достаточно мощный аналитический инструмент исследования. В течение этого периода инженер, занимающийся управлением, имел дело с проектированием линейных следящих систем. Небольшими нелинейностями объекта и усилителя мощности можно было пренебречь, так как отрицательная обратная связь делала характеристики системы нечувствительными к изменениям параметров и возмущениям.

Технический прогресс промышленного производства и исследования космоса, которые начались в середине столетия, пробудили интерес как к системам с исключительно высокой точностью и требованием минимальной стоимости, так и к нелинейным системам управления, в частности релейным системам управления, так как реле является простым и неприхотливым усилителем мощности. Для анализа систем управления с релейными устройствами было предложено два метода: описывающей функции <sup>4</sup>

---

<sup>1</sup> В эти же годы в СССР А. В. Михайловым, В. В. Солодовниковым и многими другими учеными закладывались теоретические основы частотных методов анализа и синтеза линейных систем автоматического регулирования. Более подробно с историей развития теории автоматического регулирования в СССР можно ознакомиться по книге «Техническая кибернетика, книга 1. Теория автоматического регулирования», М., «Машиностроение», 1967 (*Прим. ред.*).

<sup>2</sup> См. Основы автоматического регулирования. Теория. Под ред. В. В. Солодовникова. М., Машгиз. 1954 (*Прим. ред.*).

<sup>3</sup> В том же году в СССР была опубликована работа К. Ф. Теодорчика «Траектории корней характеристического уравнения системы третьего порядка при непрерывном изменении свободного члена и максимально достижимая при этом устойчивость», журнал «Теория физики», том 18, 1948.

В практике проектирования автоматических систем в СССР метод корневого годографа нашел ограниченное применение, хотя он и освещался достаточно широко в отечественной литературе, см. например:

У д е р м а н Э. Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. М., Госэнергоиздат. 1963 (*Прим. ред.*).

<sup>4</sup> Метод гармонической линеаризации или гармонического баланса Крылова—Боголюбова (или по терминологии, принятой в США, описывающей функции) основан на использовании асимптотических разложений, представляющих развитие теории возмущений. Дальнейшее развитие этого метода принадлежит Е. П. Попову и Л. С. Гольдфарбу.

К р ы л о в Н. М., Б о г о л ю б о в Н. Н. Основные проблемы нелинейной механики. Изв. АН УССР, 1933, № 4, стр. 475—498. К р ы л о в Н. М., Б о г о л ю б о в Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд. АН УССР. Киев, 1937, 364 стр.

Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 3-е. М., Физматгиз. 1963, 410 стр.

П о п о в Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. М., Гостехиздат. 1954.

П о п о в Е. П., П а л ь т о в И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз. 1960, 792 стр.

Г о л ь д ф а р б Л. С. О некоторых нелинейностях в системах регулирования. «Автоматика и телемеханика», т. 8, 1947, № 5, стр. 349—383. (*Прим. ред.*).



и фазового пространства<sup>1</sup>. Метод описывающей функции позволяет инженеру исследовать устойчивость замкнутой нелинейной системы с частотной точки зрения, а метод фазового пространства — проектировать нелинейные системы управления во временной области.

Законы управления, обеспечивающие минимальное время переходного процесса (в терминах линий и поверхностей переключения), для различных систем второго и третьего порядка были получены в начале 50-х годов. Доказательства оптимальности были эвристическими и, по сути дела, геометрическими. Однако идея определения оптимальности системы по отношению к такому специфическому показателю качества системы как время переходного процесса представляла значительный интерес для инженера-проектировщика. Точная формулировка этой проблемы привлекла к ней интерес математиков.

Проблема оптимального по времени управления интенсивно изучалась математиками в СССР и США. В 1953—1957 гг. Р. Беллман, Р. В. Гамкрелидзе, Н. Н. Красовский и Ж. Ла-Саль развили основы теории задачи о минимальном времени перехода и представили результаты, связанные с существованием, единственностью и основными свойствами управления, оптимального по быстродействию<sup>2</sup>. Вскоре последовало признание того, что задачи управления, по сути дела, являются и задачами вариационного исчисления.

Классическое вариационное исчисление не может с легкостью обходиться с теми «жесткими» ограничениями, которые обычно имеют место в задачах управления. Это затруднение привело Л. С. Понтрягина к первому предположению о существовании его знаменитого принципа максимума и затем к тому, чтобы вместе с В. Г. Болтянским и Р. В. Гамкрелидзе дать его доказательство<sup>3</sup>. Принцип максимума был впервые провозглашен на международном конгрессе математиков, который проходил в Эдинбурге в 1958 г.

Принцип максимума Понтрягина можно рассматривать как способ подхода к вариационным задачам Гамильтона, а метод динамического программирования Беллмана следует рассматривать как направление, идущее по пути Гамильтона—Якоби. Использование методов динамического

---

<sup>1</sup> Метод фазового пространства был создан и развит А. А. Андроновым и его учениками Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний, ч. 1. ОНТИ. М.—Л., 1937 или Андронов А. А., Витт А. А. и Хайкин С. Э. Теория колебаний, 2-е изд, переработ. и доп. Н. А. Железцовым. М., Физматгиз. 1939, 915 стр. (Прим. ред.).

<sup>2</sup> Из числа первых работ в области оптимальных по быстродействию систем управления, выполненных в СССР, следует назвать:

Фельдбаум А. А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. «Автоматика и телемеханика», т. 14, 1953, стр. 712—728.

Фельдбаум А. А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства. «Автоматика и телемеханика», т. 16, 1955, № 2, стр. 120—149.

Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов «ДАН». т. 110, 1956, № 1, стр. 7—10.

Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов в линейных системах «ДАН», т. 116, 1957, № 1, стр. 9—11.

Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. «Автоматика и телемеханика», т. 18, 1957, № 11, стр. 960—970.

Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования. «Прикладная математика и механика», т. 21, 1957, № 5, стр. 670—677. (Прим. ред.).

<sup>3</sup> См. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов «ДАН», т. 110, 1956, № 1, стр. 7—10 или Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз. 1951, 391 стр.

Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М., Физматгиз. 1966, 307 стр. (Прим. ред.)

программирования в решении задач управления принесло большую пользу.

Одновременно с быстрым развитием теории управления происходил непрерывный прогресс в области вычислительной техники, которая снабдила инженеров неограниченно расширяющимися вычислительными возможностями и мощными средствами моделирования. Широкая доступность специализированных и универсальных вычислительных машин значительно сократила потребность получения решений в замкнутой форме и требования к тому, чтобы корректирующие устройства осуществлялись с помощью *РС* цепочек.

Современная теория и техника управления могут, следовательно, рассматриваться как результат слияния трех различных направлений: теории автоматического регулирования, вариационного исчисления и вычислительной техники.

В наши дни теория управления является прежде всего средством проектирования, позволяющим инженеру-проектировщику правильно выбирать внутреннюю структуру и находить аналитическим способом решения задачи оптимального управления. Из этого совершенно не следует, что процесс проектирования оптимальных систем управления является достаточно простым делом. Поскольку оптимальные системы с обратной связью, как правило, сложны и в принципе нелинейны, то очень трудно анализировать влияние изменения параметров и возмущений на характеристики системы. В добавок к этому необходимость точного измерения переменных (или фазовых координат) и вычислительные трудности, связанные с отысканием оптимального управления, могут сделать оптимальное устройство экономически нецелесообразным.

Тем не менее мы глубоко убеждены в том, что современная теория управления будет становиться все более полезной наукой для инженерной практики. Для этого есть несколько оснований. Во-первых, предэскизные проекты и модели, выполненные с помощью цифровых или аналоговых машин, могут служить основой для сравнения проектируемых систем. Во-вторых, знание оптимального решения данной задачи служит инженеру надежной путеводной нитью при выборе варианта, близкого к оптимальному. В-третьих, прогресс в области вычислительной техники будет способствовать преодолению затруднений, которые возникают при реализации оптимальных законов управления в реальных системах с помощью существующих вычислительных средств. И, наконец, хотя оптимальные устройства далеко не часто могут быть реализованы, тем не менее теория расширяет горизонты инженерной практики и, следовательно, позволяет инженеру браться за решение таких сложных и трудных проблем, о которых раньше он не смел и подумать.

### 1.5. НАЗНАЧЕНИЕ КНИГИ

При написании этой книги мы преследовали две основные цели. Во-первых, хотели создать учебник по теории оптимального управления и ее приложениям для аспирантов первого года обучения, специализирующихся в области автоматического управления; во-вторых, — снабдить инженеров и аспирантов доступным и значительным теоретическим фундаментом, необходимым для дальнейшего развития теории и практики систем автоматического управления.

Мы не пытались и не хотели написать исчерпывающую монографию. В книге уделено довольно много внимания разработке вводного материала, который излагается весьма детально. В частности, мы хотели:

1. Развить основы математического аппарата, необходимые для глубокого понимания теории.

2. Дать строгую формулировку задачи управления.

3. Изложить необходимые условия оптимальности, уделив особое внимание принципу максимума Понтрягина и основным достаточным условиям в форме уравнений Гамильтона—Якоби.

4. Проиллюстрировать приложения теории простыми задачами, прибегая к помощи различных общепринятых критериев оптимальности.

5. Рассмотреть структуру, свойства и техническую реализацию некоторых оптимальных систем с обратной связью.

В книге мы не стремились излишне «углубить» многие из рассматриваемых вопросов и опускали целый ряд других важных задач. Поэтому при доказательствах часто использовались эвристические положения. А для изучения более строгих доказательств мы отсылаем читателя к соответствующим литературным источникам.

Надеемся, что основной материал, изложенный в книге, позволит аспирантам на ранней ступени их научной деятельности применять на практике достижения теории автоматического управления и квалифицированно оценивать достоинства и значение бесчисленных статей, публикуемых в литературе по автоматическому управлению (которые, к сожалению, содержат много неосновательных претензий на всеобщность). Хотим также отметить неопределимое значение для будущего ученого более строгого мышления и дисциплинированной интуиции, которые так необходимы для его развития.

Мы обнаружили, что аспиранты, специализирующиеся в области практики автоматического управления, не могут по настоящему изучить теорию управления без убедительных примеров и выполнения определенного числа упражнений. Только с помощью последних они могут оценить полезность и преимущества теории. Примеры нужны и математикам-прикладникам, стремящимся внести свой вклад в теорию, поскольку эти примеры часто помогают им отличать физический смысл от чисто математического. Поэтому в книгу включено большое число примеров и упражнений, которые, мы надеемся, будут полезны аспирантам, инженерам и математикам-прикладникам.

## 1.6. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО СТРУКТУРЕ КНИГИ

Книга может быть разделена на следующие три основные части:

1. Математические основы, относящиеся к описанию и анализу динамических систем (гл. 2—4).

2. Некоторые положения теории оптимального управления, включая принцип максимума Понтрягина для непрерывных детерминированных систем с конечным числом переменных (гл. 5—6).

3. Приложения теории к расчету систем с обратной связью, оптимальных по отношению к различным критериям (гл. 7—10).

На протяжении всей книги мы часто пытались строго формулировать определения, теоремы и задачи; с другой стороны, иногда лишь бегло описывали доказательства, опустили или отнесли к числу упражнений многие доказательства, сославшись на соответствующую литературу. Мы считали такой метод изложения наиболее удобным для аспирантов, специализирующихся в области техники автоматического управления.

В книге использованы обозначения теории множеств и векторной алгебры, позволяющие избежать громоздких математических записей, затрудняющих изучение основных положений. Мы знаем, что после начального переходного периода аспиранты приспособляются к такой терминологии и способу думать «физически» в терминах множеств, векторов и матриц. Основные положения книги, как правило, иллюстрируются

примерами. Мы, однако, не пытались скрыть трудности, особенно вычислительного характера, связанные с анализом и синтезом систем со многими переменными.

Большинство тщательно проработанных примеров включено в книгу с целью снабдить читателя иллюстрациями общей теории. Эти примеры послужат углублению понимания и повышению уровня интуиции. Кроме того, включены многочисленные упражнения. Упражнения распадаются на три категории:

- 1) обычные упражнения;
- 2) упражнения, которые используются для иллюстрации «вершин» теории, а также вычислительных трудностей, связанных с определением оптимальных законов управления<sup>1</sup>;

- 3) упражнения для обоснования новых положений теории и приложений. Некоторые из них относятся к категории «почти невозможных».

Мы часто ссылаемся на несколько литературных источников по одному и тому же вопросу. Кроме того, отмечаем литературу, относящуюся к тому или иному конкретному вопросу, так что заинтересованный читатель может с успехом «обратиться за консультацией» к литературным источникам. С этой целью в книгу включена подробная библиография, которая, однако, не является исчерпывающей. В нее были включены статьи, отчеты и книги, с которыми мы знакомы.

Поскольку нашей целью было дать введение в теорию оптимального управления и ее приложения, мы не обсуждаем множество важных вопросов, которые являются слишком «продвинутыми» или требуют дополнительной подготовки. В частности, в книге не освещены следующие вопросы:

1. Вычислительные алгоритмы для определения законов оптимального управления сложных систем.

2. Задачи с ограничениями фазовых координат.

3. Теория оптимального управления для дискретных (или импульсных) систем.

4. Задачи, связанные с объектами с распределенными параметрами.

5. Теория оптимального управления для стохастических систем.

6. Проектирование оптимальных фильтров, интерполяторов, сглаживающих устройств<sup>2</sup>.

Ниже кратко перечислены некоторые из причин, по которым эти важные вопросы были опущены.

1. Несмотря на то, что много усилий было посвящено (и посвящается) разработке сходящихся вычислительных алгоритмов, было получено мало общих результатов, которые гарантировали бы сходимость или содержали бы информацию относительно скорости сходимости алгоритма.

2. Ограничения фазовых координат более сложны для анализа, чем ограничения управляющих сигналов. Необходимые условия для задач с ограничениями фазовых координат имеются в литературе, но, по нашему мнению, не относятся к материалам вводного характера.

3. Теория дискретных стохастических систем<sup>3</sup>, а также систем с распределенными параметрами<sup>4</sup> в настоящее время еще только развивается. Поскольку изучение систем с распределенными параметрами требует знания дифференциальных уравнений в частных производных, а изучение стохастических систем требует знания теории вероятностей (в том числе

---

<sup>1</sup> Некоторые упражнения гл. 9 требуют использования цифровой вычислительной машины.

<sup>2</sup> Читатель, которого интересуют перечисленные выше вопросы, может ознакомиться с ними по литературным источникам, добавленным при переводе книги. (*Прим. ред.*).

<sup>3</sup> См. [312].

<sup>4</sup> См. [235].

стохастических дифференциальных уравнений), эти вопросы, очевидно, не годятся для введения в теорию оптимального управления.

4. Для синтеза оптимальных фильтров линейных систем с гауссовыми шумовыми процессами может быть использована теория Винера—Калмана—Бюси. Однако общие результаты, относящиеся к нелинейным системам с негауссовым шумом, в настоящее время недоступны для целей практики. Заинтересованный читатель без больших затруднений сможет изучать теорию Винера—Калмана—Бюси после усвоения разделов данной книги, относящихся к детерминированным системам.

В следующем параграфе приводится описание содержания каждой из глав книги.

### 1.7. ОПИСАНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ГЛАВ КНИГИ

Ниже дается краткое описание содержания каждой из глав. При этом особое внимание уделяется взаимным связям между различными главами.

**Л и н е й н а я а л г е б р а** (гл. 2). В этой главе дается обзор основных положений линейной алгебры и приводятся векторные и матричные обозначения, которые используются далее на протяжении всей книги. После краткого изложения известных положений и теории множеств вводится понятие векторного пространства, а затем рассматриваются линейные преобразования. Теория матриц излагается в основном с точки зрения линейных преобразований, и в значительно меньшей степени используется распространенный подход к матрицам как к упорядоченным наборам чисел. Мы подчеркиваем, что матрица связана с линейным преобразованием и заданной координатной системой, а также указываем, что линейные преобразования являются внутренними, а матрицы ими не являются. В остальной части гл. 2 рассматриваются собственные значения и собственные векторы, подобие матриц, внутреннее и скалярное произведения, евклидовы векторные пространства и некоторые свойства симметричных матриц. Материал этой главы используется в каждой из последующих глав книги.

**М а т е м а т и ч е с к и й а н а л и з** (гл. 3). В гл. 3 обсуждаются элементарные топологические свойства  $n$ -мерного евклидова пространства, основы теории векторных функций и некоторые положения векторных дифференциальных уравнений. Эта глава начинается с изучения понятия расстояния и связанных с ним представлений об открытых и закрытых множествах, о компактности. Далее рассматриваются функции различных переменных, развиваются определения непрерывности, кусочной непрерывности (или регулярности), производной, градиента и интеграла таких функций. Вводятся важные понятия функционального пространства и расстояния между элементами функционального пространства. Оставшаяся часть гл. 3 посвящена векторным дифференциальным уравнениям. Здесь доказываются основные теоремы существования и единственности и развивается метод решения линейных дифференциальных уравнений с помощью фундаментальной матрицы. Материал этой главы будет полезен при чтении последующих глав книги.

**О с н о в н ы е п о л о ж е н и я** (гл. 4). В этой главе мы вводим понятия, связанные с представлением системы в пространстве состояний, приводим определение задачи управления и начинаем ее изучение. Рассмотрение понятия «состояние системы» начинается на примере простых электрических цепей. После популярного изложения методов математического описания физических систем мы приводим аксиоматическое определение динамической системы. Далее рассматриваются конечно-мерные непрерывные системы. Материал гл. 3 используется для того, чтобы уста-

новить соотношения между состоянием системы и начальными условиями дифференциальных уравнений, описывающих систему. В § 4.9 и 4.10 описываются приемы представления системы с постоянными параметрами, имеющей один вход и один выход, в пространстве состояний. Физический смысл фазовых координат иллюстрируется с помощью аналогового моделирования дифференциальных уравнений. Глава завершается формулировкой определения задачи управления и обсуждением некоторых следствий, вытекающих из этого определения. В частности, мы рассматриваем множество достигаемых состояний и качественные определения понятий управляемости, наблюдаемости и нормальности и развиваем некоторые из важных приложений этих понятий. Материал этой главы служит краеугольным камнем теории и практики оптимального проектирования, рассматриваемых в последующих главах книги.

**Условия оптимальности. Принцип минимума<sup>1</sup> и уравнение Гамильтона—Якоби** (гл. 5). В этой главе формулируются и изучаются основные условия оптимальности. Мы включили сюда обзор теории отыскания минимума функций, определенных на  $n$ -мерном евклидовом пространстве; упоминание об использовании вычисления вариаций для решения задач управления; постановку и эвристическое доказательство принципа минимума Понтрягина и рассмотрение уравнений Гамильтона—Якоби, основанных на сочетании «принципа оптимальности» Беллмана и леммы Каратеодори по способу, предложенному Калманом. Для развития интуиции у читателя мы начинаем изложение с обычного минимума (с § 5.2 по § 5.4) и приводим обзор применения метода неопределенных множителей Лагранжа для решения задачи минимизации с ограничениями. Далее излагаем вариационный подход к задачам управления (с § 5.5 по § 5.10), шаг за шагом показывая способ, который можно использовать, чтобы найти некоторые необходимые и достаточные условия оптимальности. С § 5.11 по § 5.17 приведены некоторые необходимые условия оптимальности, основанные на принципе минимума Понтрягина. Мы тщательно формулируем различные задачи управления и варианты принципа минимума, соответствующие каждой из этих задач. Эвристическое доказательство принципа минимума, опирающееся в основном на геометрические представления, приводится в § 5.16. Некоторые следствия принципа минимума приведены в § 5.17. Глава завершается рассмотрением условий Гамильтона—Якоби и связанными с ними достаточными условиями. Здесь также показывается, что принцип минимума является основным методом отыскания оптимального управления систем, рассматриваемых в гл. 7—10.

**Структура и свойства оптимальных систем** (гл. 6). В этой главе исследуются структура и основные свойства систем, оптимальных по отношению к различным специальным критериям качества; указываются методы, позволяющие определить, являются ли оптимальные и экстремальные управления единственными, а также рассматривается вопрос единственности управлений. Далее авторы концентрируют свое внимание на вопросах, позволяющих перейти от теоретического материала предыдущих глав к конкретным задачам проектирования, которые и являются содержанием последующих глав книги. Вначале рассматривается задача управления, оптимального по быстродействию для линейных и нелинейных систем (с § 6.2 по § 6.10). После обсуждения задачи управления, оптимальной по быстродействию, с геометрической точки зрения

<sup>1</sup> В этой книге «принцип максимума» назван «принципом минимума». Отличие формулировки состоит в перемене знака и совершенно не сказывается на результатах расчетов. (Прим. ред.).

для получения соответствующих необходимых условий используется принцип минимума. Затем приводятся определения единственности и нормальности, а также принципа релейного управления для нормальных систем с оптимальным быстродействием. Мы рассмотрим ряд теорем, относящихся к существованию, единственности и числу переключений для линейной инвариантной по времени системы (§ 6.5). Материал этой части настоящей главы используется в гл. 7. Далее с § 6.11 по § 6.16 излагается задача оптимального управления на минимум расхода топлива. Для получения необходимых условий снова используется принцип минимума, а затем следуют доказательства единственности и нормальности задач, оптимальных по расходу топлива. Устанавливается принцип релейного управления для нормальных задач на оптимальный расход топлива и развиваются теоремы единственности для линейных систем с постоянными параметрами. Мы рассмотрим также различные формулировки задач, учитывающие оптимальность как по времени, так и по расходу топлива (§ 6.15). Этот материал используется в гл. 8. С § 6.17 по § 6.20 приведены задачи на минимум энергии. Дано аналитическое решение задачи с фиксированным временем и конечным состоянием для линейной системы с постоянными параметрами и иллюстрируются общие результаты на довольно простом примере. Эти результаты мы применяем и развиваем в гл. 9. Глава завершается краткими замечаниями о проблемах единственности (§ 6.21 и 6.22) и некоторыми соображениями относительно существования и единственности оптимальных и экстремальных управлений.

**Проектирование систем, оптимальных по быстродействию** (гл. 7). Теория, развитая в гл. 5 и 6, применяется в этой главе к решению задачи оптимального быстродействия для ряда конкретных систем. Рассматривается определение оптимального по быстродействию управления как функции от состояния системы; исследуются структуры систем с обратной связью, оптимальных по быстродействию; указываются типы нелинейностей в цепи обратной связи. Здесь же изучается синтез субоптимальных систем. Мы начинаем с § 7.2 по § 7.6 рассматривать объекты, передаточные функции которых имеют только вещественные полюсы. Сложность оптимальных по быстродействию систем с обратной связью иллюстрируется путем сравнения оптимальной по быстродействию системы для объектов второго порядка (§ 7.2 и 7.3) с аналогичной системой для объекта третьего порядка (§ 7.4). Далее исследуется задача оптимального быстродействия для объектов типа колебательного звена без затухания (с § 7.7 по § 7.9). Мы показываем (§ 7.10 и 7.11), как результаты, полученные для линейных систем, можно использовать при решении задачи оптимального управления для одного класса нелинейных систем, применяя при этом экспериментальные характеристики и графические построения. В заключение главы рассматриваются объекты, передаточные функции которых содержат как нули, так и полюсы (с § 7.12 по § 7.15). Мы отмечаем влияние на характер и структуру оптимальной по быстродействию системы управления минимально-фазовых и не минимально-фазовых передаточных функций объектов.

**Проектирование систем оптимальных по расходу топлива** (гл. 8). Теоретические положения гл. 5 и 6 мы используем для расчета ряда систем, оптимальных по расходу топлива. Показываем при этом, что для консервативных систем управление по минимуму расхода топлива часто оказывается не единственным. В главе рассматриваются способы, с помощью которых в задачах на минимум расхода топлива может быть учтено также и время перехода. Приводятся также практические реализации такого рода оптимальных систем. Особо отмечаем, что нелинейные системы часто допускают единственные решения

задачи управления, оптимального по расходу топлива (в противоположность задаче об оптимальном быстродействии). Глава начинается с рассмотрения не единственности оптимальных по топливу управлений (с § 8.2 по § 8.5). С § 8.6 по § 8.10 исследуются различные методы, позволяющие включить время перехода в функционал преобразования. Возможность единственности решения также обсуждается в § 8.10. Глава завершается замечаниями относительно графических методов, которые часто используются для отыскания оптимального управления как функции исходного состояния в задачах на оптимальное по расходу топлива управление.

Проектирование оптимальных линейных систем по квадратичному критерию (гл. 9). В этой главе излагаются общие результаты для важного класса задач оптимизации, а именно — задач управления линейными объектами с переменными параметрами и квадратичным критерием оптимальности. На основании некоторых результатов Калмана по задаче инверсии материал этой главы можно рассматривать, по сути дела, как обобщение обычной теории управления. При этом сначала исследуется задача о регуляторе состояния (с § 9.2 по § 9.6), а затем задача о регуляторе выхода (§ 9.7 и 9.8) и, наконец, глава завершается изучением задачи преследования (с § 9.9 по § 9.13). Поскольку в § 9.5, 9.8 и 9.9 изучаются линейные системы с постоянными параметрами, нетрудно обнаружить некоторую взаимосвязь между свойствами оптимальных систем и хорошо скорректированных следящих систем, для проектирования которых использована обычная теория автоматического регулирования. Теоретические результаты настоящей главы легко могут быть использованы при управлении процессами (или объектами со многими входами и выходами или с переменными параметрами), для анализа которых невозможно непосредственно применять теорию автоматического регулирования.

Задача оптимального управления для случая, когда управление ограничено гиперсферой (гл. 10). В этой главе изучается широкий класс задач управления, которые легче могут быть решены прямыми методами, нежели способами, основанными на принципе минимума. Основные положения рассматриваются с § 10.2 по § 10.6. С помощью типовых примеров мы иллюстрируем влияние ограничений на структуру и свойства систем, оптимальных по отношению к различным критериям оптимальности.

## **1.8. ТРЕБОВАНИЯ К МИНИМУМУ ЗНАНИЙ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ЧТЕНИЯ КНИГИ, И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЕЕ ИЗУЧЕНИЯ**

Мы полагаем, что аспирант или инженер, специализирующийся в области автоматического управления и желающий использовать настоящую книгу в качестве учебника, хорошо владеет следующими дисциплинами:

1. Основами теории автоматического регулирования, включая такие положения как переходной процесс системы, передаточные функции системы, обратная связь и коррекция линейных систем.

2. Обыкновенными дифференциальными уравнениями и математическим анализом, включая применение метода преобразования Лапласа для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а также основными сведениями о матрицах вместе с некоторыми практическими навыками выполнения различных преобразований с матрицами.

Мы считаем такую основу достаточной для понимания большей части книги. Для удобства читателя в книгу включены необходимые специаль-



ные разделы математики: линейная алгебра, векторные дифференциальные уравнения и некоторые другие.

Основное содержание книги было изложено в специальном курсе, рассчитанном на один семестр обучения в Массачузетском технологическом институте. Параграфы, отмеченные звездочкой в оглавлении, излагались в аудитории, остальные разделы изучались самостоятельно. Нельзя слепо следовать учебнику при чтении лекций. Поэтому различные преподаватели расширят или сократят некоторые разделы в зависимости от собственных научных интересов или от уровня подготовки слушателей. В этой связи необходимо отметить, что гл. 8—10 не связаны непосредственно друг с другом и поэтому могут изучаться в любой последовательности. Для слушателей с более основательной подготовкой (например, после изучения курса, основанного на материалах книги Заде и Дзэоера «Теория линейных систем») гл. 2—4 можно в лекционном курсе опустить, рекомендовав слушателям прочесть их самостоятельно, а материал гл. 5 и 6 излагать более детально.

---

## ГЛАВА 2

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

### 2.1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая глава, а также гл. 3 посвящена математическим основам теории оптимальных систем управления. В этих главах приводятся основные определения и теоремы, необходимые для понимания содержания остальных глав. Математические основы излагаются весьма конспективно, так как предполагается, что читатель знаком с большинством необходимых математических понятий. Следует также отметить, что приводится только тот материал, который необходим для понимания последующих разделов книги.

В данной главе будут рассмотрены множества, функции, векторные пространства, линейная алгебра и эвклидовы пространства. Основной целью изложения является перевод известных физических понятий линейных систем на язык математики. Поэтому математический аппарат рассматривается с точки зрения векторного пространства и линейных преобразований, а не как некоторый набор операций над числами и матрицами. При дальнейшем изложении мы считали, что читатель хорошо знаком с детерминантами и их использованием при решении систем алгебраических линейных уравнений. Подробные изложения теории детерминантов содержатся в литературе ([24] см. гл. 10; или [21], см. дополнение А).

Весь материал настоящей главы, целиком или по частям, можно найти в литературе, например, [21], [24], [51], [90], [124], [192], [196] и [212].

### 2.2. МНОЖЕСТВА

Рассмотрим объекты, которые имеют различные свойства и могут быть сопоставлены друг с другом. Набор объектов, имеющих некоторые общие характеристики и различающихся по своим свойствам, называется множеством. Знак  $\in$  используется для обозначения принадлежности к данному множеству. Иначе говоря, если  $A$  есть множество, то  $a \in A$  означает, что  $a$  является элементом множества  $A$ . Два множества одинаковы тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые элементы.

Если  $A$  и  $B$  — множества, то говорят, что  $A$  содержится в  $B$  или является подмножеством  $B$ , когда каждый из элементов  $A$  является элементом  $B$ . Такое соотношение обозначается как

$$A \subset B. \quad (2.1)$$

Пусть  $A$  есть множество и  $\mathfrak{F}$  — свойство, которым могут обладать элементы множества  $A$ , тогда  $\{a : \mathfrak{F}(a)\}$  представляет собой совокупность элементов множества  $A$ , действительно обладающих свойством  $\mathfrak{F}$ . Напри-

мер, если  $A$  есть множество всех девушек из Нью-Йорка, и  $\mathfrak{F}$  — свойство быть блондинкой, то  $\{a : \mathfrak{F}(a)\}$  представляет собой множество всех нью-йоркских блондинок.

**Пример 2.1.** Допустим, что  $R$  — множество вещественных чисел и  $\mathfrak{F}$  — свойство « $|r| \leq 1$ » (т. е. абсолютная величина меньше или равна 1). Тогда  $\{r : |r| \leq 1\}$  представляет собой множество вещественных чисел, по абсолютной величине меньших или равных 1.

Пусть  $\emptyset$  означает множество, в котором нет элементов. Тогда последнее называется пустым, или нулевым, множеством. Заметим, что  $\emptyset$  можно определить как  $\{a : \mathfrak{F}(a)\}$ , где  $\mathfrak{F}$  — любое свойство, которым не обладает ни один из элементов. Например,  $\mathfrak{F}$  есть свойство « $a \neq a$ ». Заметим также, что  $\emptyset \subset A$  для любого множества  $A$ .

Множество  $A$ , элементы которого можно пронумеровать в последовательности  $a_1, a_2, \dots$ , являющейся конечной или бесконечной, называется счетным множеством. Отметим, что если множество имеет конечное число элементов, то оно является счетным. Но не каждое счетное множество имеет конечное число элементов. Например, множество  $\{1, 2, 3\}$  является конечным и, следовательно, счетным, в то время как множество  $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$  счетно, но не является конечным. Множество  $\{r : |r| \leq 1\}$  примера 2.1 не является счетным.

### 2.3. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Рассмотрим ряд операций над множествами, а именно: суммирование, пересечение, дополнение и произведение. Если  $A$  и  $B$  — два множества, то сумма  $A$  и  $B$ , обозначаемая как  $A \cup B$ , является множеством всех элементов, принадлежащих множеству  $A$  или множеству  $B$ . Заметим, что

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}. \quad (2.2)^1$$

Пересечением двух множеств  $A$  и  $B$ , обозначаемым  $A \cap B$ , называется множество элементов, одновременно принадлежащих обоим множествам  $A$  и  $B$ .

Заметим, что

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}. \quad (2.3)$$

Если  $A$  и  $B$  — два множества и  $A \subset B$ , то множество элементов  $B$ , которые не являются элементами  $A$ , называют дополнением  $A$  в  $B$  и обозначают  $B - A$  (или просто  $-A$ , если смысл  $B$  ясен из контекста). Если обозначить  $x \notin A$  те элементы  $x$ , которые не являются элементами  $A$ , то легко видеть, что

$$B - A = \{x : x \in B \text{ и } x \notin A\}. \quad (2.4)$$

Наконец, произведением двух множеств  $A$  и  $B$ , которое обозначается  $A \times B$ , называют множество всех упорядоченных пар  $(a, b)$ , где  $a \in A$  и  $b \in B$ . Укажем, что  $A \times B$  и  $B \times A$  в общем случае не одинаковы. Можно записать

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}. \quad (2.5)$$

Иногда вместо  $(a, b)$  мы будем писать  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ . Рассмотрим далее некоторые примеры операций. Символ  $R$  на протяжении всей книги будет использоваться для обозначения множеств вещественных чисел, и поэтому под  $R$  часто будет пониматься вещественная числовая ось или просто все вещественные числа.

<sup>1</sup> «Или» не исключает возможности принадлежности  $x$  к обоим множествам  $A$  и  $B$ .

**Пример 2.2.**  $A = \{r: 0 \leq r \leq 1\}$ , где  $r$  представляет собой элементы  $R$ . Пусть  $B = \left\{r: \frac{1}{2} < r \leq 2\right\}$ , тогда имеем  $A \cup B = \{r: 0 \leq r \leq 2\}$  и  $A \cap B = \left\{r: \frac{1}{2} < r \leq 1\right\}$ .

**Пример 2.3.**  $A = \{r: 0 \leq r \leq 1\}$ , где  $r$  — элементы  $R$ . Пусть  $B = \{r: 0 \leq r \leq 2\}$ , тогда  $A \subset B$  и  $B - A = \{r: 1 < r \leq 2\}$ .

**Пример 2.4.**  $A = \{r: 0 \leq r \leq 1\}$  и  $B = \{s: 1 \leq s \leq 2\}$ , где  $r$  и  $s$  — элементы  $R$ . Тогда

$$A \times B = \{(r, s): 0 \leq r \leq 1, 1 \leq s \leq 2\}; \quad (\text{рис. 2.1, а});$$

$$B \times A = \{(s, r): 1 \leq s \leq 2, 0 \leq r \leq 1\}. \quad (\text{рис. 2.1, б}).$$

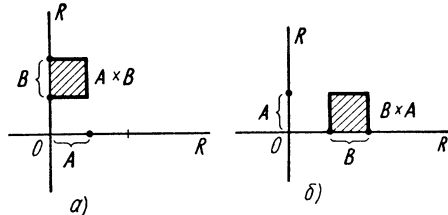


Рис. 2.1  $A \times B$  отличается от  $B \times A$

**Упражнение 2.1.** Пусть  $R^2 = R \times R$  и  $A$  — подмножество  $R^2$ , определенное как  $A = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ , и пусть  $B$  — подмножество  $R^2$ , определенное как  $B = \{(x, y): (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ . Что представляют собой  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  и  $R^2 - A$ ? Вычертите фигуры, изображающие эти множества на плоскости.

Если  $A_1, \dots, A_n$  — множества, то можно дать определения: объединения, пересечения и произведения этих множеств. В частности, объединение  $A_1, \dots, A_n$ , которое обозначается  $\bigcup_{i=1}^n A_i$ , определяется как

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cup A_n. \quad (2.6)$$

Пересечение  $A_1, \dots, A_n$ , обозначаемое  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ , определяется как

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \left( \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cap A_n, \quad (2.7)$$

и, наконец, произведение  $A_1, \dots, A_n$ , обозначаемое  $\prod_{i=1}^n A_i$  или  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , определяется как

$$\prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n): a_i \in A_i \text{ для } i = 1, \dots, n\}. \quad (2.8)$$

Элементы  $\prod_{i=1}^n A_i$  часто называют упорядоченными  $n$ -ками чисел, которые иногда записывают в виде столбцов

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Заметим, что

$$\left. \begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n A_i &= \{a: a \in A_1, \text{ или } a \in A_2, \text{ или } \dots, \text{ или } a \in A_n\}; \\ \bigcap_{i=1}^n A_i &= \{a: a \in A_1 \text{ и } a \in A_2 \text{ и } \dots \text{ и } a \in A_n\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

**Упражнение 2.2.** Докажите уравнения (2.10).

Эти понятия можно определить и для бесконечных наборов  $i = 1, 2, \dots$  множеств. Например, объединение  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  определяется как

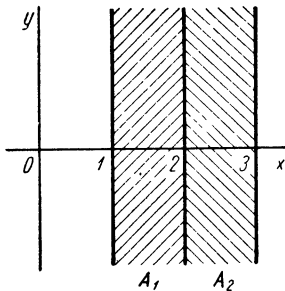
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a : \text{существует } i_0, \text{ для которого } a \in A_{i_0}\} \quad (2.11)^1$$

и пересечение  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  определяется как

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{a : a \in A_i \text{ для всех } i\}. \quad (2.12)$$

Определение бесконечного произведения мы опускаем, так как в дальнейшем оно нигде не используется.

**Пример 2.5.** Пусть  $A_i = \{r : -i \leq r \leq i\}$ , для  $i = 0, 1, 2, \dots$ , где  $r$  представляет собой элемент из  $R$ . Тогда  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = R$  и  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$ , т. е. подмножество из  $R$ , состоящее лишь из 0.



**Пример 2.6.** Пусть  $A_i$  для  $i = 1, 2, \dots$  есть подмножество из  $R^2 (= R \times R)$ , определенное как  $A_i = \{(x, y) : i \leq x < i + 1\}$ . Тогда  $A_i$  представляет собой полосу (рис. 2.2), параллельную оси  $y$  и заключенную между  $x = i$  и  $x = i + 1$ , исключая точки прямой  $x = i + 1$ . Для этих множеств имеем

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{(x, y) : 1 \leq x\}$$

и

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \text{ (пустое множество).}$$

Рис. 2.2. Полосы  $A_i = \{(x, y) : i \leq x < i + 1\}$

Связь между различными операциями над множествами устанавливается с помощью следующей простой теоремы.

**Теорема 2.1.** а) Даны множества  $A, B$  и  $C$ . Справедливы соотношения

1.  $A - A = \emptyset$  и  $A - \emptyset = A$ ;
2.  $A \cup A = A$  и  $A \cap A = A$ ;
3.  $A \subset C$  и  $B \subset C$  тогда и только тогда, когда  $A \cup B \subset C$ ;
4.  $C \subset A$  и  $C \subset B$  тогда и только тогда, когда  $C \subset A \cap B$ ;
5.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;
6.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;

б) Даны  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) — подмножества из  $A$ . Справедливы соотношения

$$1. A - \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A - A_i);$$

$$2. A - \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A - A_i);$$

в) Даны множества  $A, B, C$  и  $D$ . Справедливы соотношения

1.  $A \times B = \emptyset$  только в том случае, если  $A = \emptyset$  или  $B = \emptyset$ ;
2.  $(A \times B) \cup (C \times B) = (A \cup C) \times B$ ;
3.  $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ .

**Доказательство.** Большинство выводов теоремы являются очевидными следствиями определений. Для иллюстрации этого докажем пункт 5.

<sup>1</sup> Это означает, что существует по меньшей мере одно  $i_0$ , для которого  $a \in A_{i_0}$ . Может быть и большее число таких множеств.

Пусть  $a \in A - \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$ , тогда  $a$  не принадлежит  $A_1$ , поскольку если бы  $a$  принадлежало  $A_1$ , то оно принадлежало бы и  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Другими словами,  $a \in A - A_1$ . Из аналогичных рассуждений следует, что  $a \in A - A_i$ ; для всех  $i$  и, следовательно,  $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} (A - A_i)$ . С другой стороны, если  $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} (A - A_i)$ , то  $a \in A - A_i$  для всех  $i$  и, следовательно  $a$  не принадлежит ни одному из  $A_i$ . Из этого следует, что  $a \in A - \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$ .

**Упражнение 2.3.** Доказать часть теоремы 2.1 для соотношения б), пункт 2.

#### 2.4. ФУНКЦИИ

Вообще говоря, функция есть некоторое правило, устанавливающее связь элементов одного множества с элементами другого множества. Более строго функцию можно определить следующим образом.

Пусть  $A$  и  $B$  — множества и  $G$  — такое подмножество  $A \times B$ , что существует по крайней мере один элемент  $(a, b)$  множества  $G$  для каждого  $a$  из  $A$ . Заметим, что для некоторых элементов  $a$  из  $A$  может и не быть соответствующих элементов  $(a, b)$  в  $G$ .  $G$  в этом случае называют графом. Если  $(a, b)$  есть элемент графа  $G$ , то  $b$  называют значением  $G$ , соответствующим  $a$ , и записывают

$$b = G(a). \quad (2.13)$$

Соотношение (2.13) между  $A$  и  $B$  называют функцией  $B$  от  $A$  (преобразованием  $A$  в  $B$ ); часто это записывают просто как  $G(a)$  или  $G$ . Множество элементов  $a$  из  $A$ , для которых существуют пары  $(a, b)$  в  $G$ , называется областью существования  $G(a)$  или  $G$ , а множество элементов  $b$  в  $B$ , для которых существуют пары  $(a, b)$  в  $G$ , называется областью изменения  $G(a)$  (или  $G$ ).

**Пример 2.7.** Пусть  $A = B = R$  и  $G$  — подмножество из  $R^2$ , определенное как  $G = \{(a, b) : b = a^2\}$  (см. рис. 2.3). Тогда  $G$  есть граф; соотношение  $b = G(a) = a^2$  есть

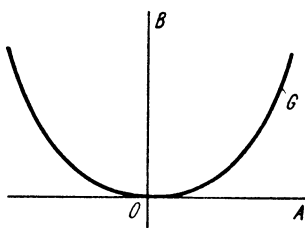


Рис. 2.3. Типичный граф  $G$

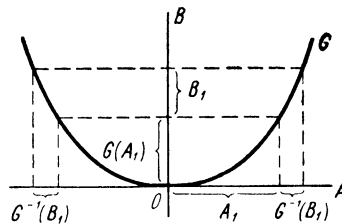


Рис. 2.4 Граф  $G$  и множества  $G(A_1)$  и  $G^{-1}(B_1)$ . Множество  $G^{-1}(B_1)$  состоит из двух частей

функция; область существования  $G(a)$  — вся область  $R$ , а область изменения  $G(a)$  представляет собой множество всех вещественных неотрицательных чисел.

Если  $G$  — граф и  $A_1 \subset A$ , то подмножество  $G(A_1)$  множества  $B$ , определенное как

$$G(A_1) = \{b : (a_1, b) \text{ принадлежит } G \text{ для некоторых } a_1 \text{ из } A_1\}, \quad (2.14)$$

называется отображением  $A_1$  через  $G$ . Если  $B_1 \subset B$ , то подмножество  $G^{-1}(B_1)$  в  $A$ , определенное как

$$G^{-1}(B_1) = \{a : (a, b_1) \text{ принадлежит } G \text{ для некоторых } b_1 \text{ из } B_1\}, \quad (2.15)$$

называется обратным отображением  $B_1$  через  $G$ . Заметим, что  $G(A)$  есть область изменения  $G$  и что  $G^{-1}(B)$  есть область существования  $G$ .

**Пример 2.8.** Пусть  $G$  есть граф примера 2.7 и пусть  $A_1 = \{a : 0 \leq a \leq 1\}$  и  $B_1 = \{b : 1 \leq b \leq 4\}$ . Тогда  $G(A_1) = \{b : 0 \leq b \leq 1\}$  и  $G^{-1}(B_1) = \{a : -2 \leq a \leq -1$  или  $1 \leq a \leq 2\}$  (см. рис. 2.4).

**Упражнение 2.4.** Показать, что  $G^{-1}(B_1 \cup B_2) = G^{-1}(B_1) \cup G^{-1}(B_2)$  и что  $G^{-1}(B_1 \cap B_2) = G^{-1}(B_1) \cap G^{-1}(B_2)$ .

Если для всех  $b$  в области изменения  $G$ ,  $b = G(a)$  и  $b = G(a_1)$  означает, что  $a = a_1$ , то мы говорим, что функция  $G$  однозначна. Другими словами, если  $b \in G(A)$  предполагает, что в  $A$  существует единственное  $a$  такое, что  $G(a) = b$ , то  $G(a)$  однозначна. С другой стороны, если область изменения  $G$  является все множеством  $B$ , т. е. если  $G(A) = B$ , тогда мы говорим, что функция  $G(a)$  — взаимно однозначная. Функцию  $G(a)$ , являющуюся однозначной и взаимно однозначной, иногда называют соответствием (или однозначным соответствием), а  $b = G(a)$  и соответствующее  $a$  называют соответствующими элементами.

**Пример 2.9.** Пусть  $G$  — подмножество из  $R^2$ , определенное как  $G = \{(a, b) : b = a\}$ . Функция  $G(a)$  является однозначной и взаимно однозначной. Функция примера 2.8 не является ни однозначной, ни взаимно однозначной.

Предположим, что  $A, B$  и  $C$  — множества,  $G$  — граф, заключенный в  $A \times B$ , и  $H$  — граф, заключенный в  $B \times C$ . Пусть  $H \circ G$  — подмножество  $A \times C$ , определенное как

$$H \circ G = \{(a, c) : \text{существует } b \in B \text{ такое, что } (a, b) \in G \text{ и } (b, c) \in H\}. \quad (2.16)$$

Тогда  $H \circ G$  — граф в  $A \times C$ , который называется композицией  $H$  и  $G$ . Функция  $(H \circ G)(a)$ , которую часто записывают как  $H[G(a)]$ , называется сложной функцией (иногда — функцией от функции). Отметим, что областью существования ее является  $G^{-1}\{H^{-1}(c)\}$ , а областью изменения —  $H\{G(a)\}$ .

**Пример 2.10.** Пусть  $G$  — граф примера 2.7 и  $H$  — подмножество из  $R^2$ , определенное как  $H = \{(b, c) : c = \sin b\}$ . Тогда  $H \circ G = \{(a, c) : c = \sin a^2\}$  и  $H[G(a)] = \sin a^2$ .

Предположим, что  $G$  есть граф из  $A \times B$  и  $A_1 \subset A$ . Тогда  $G_1 = \{(a_1, b) : a_1 \in A_1 \text{ и } (a_1, b) \in G\}$  также является графом. Функцию  $G_1(a_1)$  называют ограничением  $G$  по  $A_1$ . Заметим, что  $G_1(a_1) = G(a_1)$  для  $a_1 \in A_1$ . Легко видеть, что  $G_1$  преобразует подмножество  $A_1$  из  $A$  в некоторое подмножество из  $B$ . Функцию  $G_1$  часто называют сегментом  $G$ , соотнесенным с  $A_1$ , и записывают  $G_{A_1}$  вместо  $G_1$ . Отметим также, что  $G$  иногда называют продолжением  $G_1$ .

**Пример 2.11.** Пусть  $G$  — граф примера 2.8 и  $A_1 = \{a : a \geq 0\}$ . Тогда  $G_1 = \{(a_1, b) : a_1 \geq 0 \text{ и } b = a_1^2\}$  есть граф,  $G_1(a_1)$  — ограничение  $G$  по  $A_1$ . Однозначно ли  $G_1$ ?

## 2.5. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Векторное пространство есть множество элементов, которые можно складывать друг с другом и умножать на (вещественные) числа. Уточним это положение. Пусть  $V$  — некоторое множество и  $G_+$  граф, областью существования которого является все пространство  $V \times V$ , а область изменения заключена в  $V$ . Другими словами, функция  $G_+$  преобразует  $V \times V$  в  $V$ . Если  $(v_1, v_2) \in V \times V$ , то пишут  $v_1 + v_2$  для элементов  $G_+(v_1, v_2)$ , т. е.

$$v_1 + v_2 = G_+(v_1, v_2). \quad (2.17)$$

Элемент  $v_1 + v_2$  называют суммой  $v_1$  и  $v_2$ . Предположим, что  $G_+$  есть граф, область существования которого все  $R \times V$ , а область изменения содер-

жится в  $V$ . Другими словами, функция  $G$ , преобразует  $R \times V$  в  $V$ . Если  $(r, v) \in R \times V$ , то элементы  $G(r, v)$  множества  $V$  записывают как  $r \cdot v$ , т. е.

$$r \cdot v = G(r, v), \quad (2.18)$$

где  $r \cdot v$  называют произведением  $v$  на  $r$ , а  $V$  — векторным пространством (вещественным), если для суммы и произведения справедливы следующие соотношения:

Сумма

- 1)  $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$  для всех  $v_1$  и  $v_2$  из  $V$ ;
- 2)  $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$  для всех  $v_1, v_2$  и  $v_3$  из  $V$ ;
- 3) в  $V$  существует единственный элемент  $0$ , такой, что  $v + 0 = 0 + v$  для всех  $v$  из  $V$ ;
- 4) для любого  $v$  из  $V$  существует единственный элемент  $-v$  из  $V$ , такой, что  $v + (-v) = (-v) + v = 0$ .

Произведение

- 5)  $r_1 \cdot (r_2 v) = (r_1 \cdot r_2) \cdot v$  для всех  $r_1$  и  $r_2$  из  $R$  и всех  $v$  из  $V$ ;
- 6)  $1 \cdot v = v$  для всех  $v$  из  $V$ ;
- 7)  $r(v_1 + v_2) = rv_1 + rv_2$  для всех  $r$  из  $R$  и любых  $v_1$  и  $v_2$  из  $V$ ;
- 8)  $(r_1 + r_2) \cdot v = r_1 \cdot v + r_2 \cdot v$  для всех  $r_1$  и  $r_2$  из  $R$  и всех  $v$  из  $V$ .

Если  $V$  — векторное пространство, то элементы  $V$  будем называть «векторами» и в дальнейшем для их обозначения будем использовать «жирные» строчные буквы латинского алфавита. Произведение на вещественное число будем записывать в виде  $r \cdot v$ .

Рассмотрим важный пример, иллюстрирующий понятие векторного пространства. Этот пример будет играть основную роль в дальнейшем изложении, и поэтому читателю его следует тщательно изучить. Пусть  $V$  есть множество всех  $n$  реальных чисел, написанных столбцами:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Под  $r_i$  иногда понимают  $i$ -й элемент столбца. Если

$$v = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n \end{bmatrix} \text{ и } w = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{bmatrix}$$

являются двумя элементами  $V$ , то

$$v + w = \begin{bmatrix} r_1 + s_1 \\ r_2 + s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n + s_n \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$



а если  $r \in R$ , то

$$r \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} rr_1 \\ rr_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ rr_n \end{bmatrix} = r\mathbf{v}. \quad (2.21)$$

Векторное пространство  $V$  в этом случае обозначают  $R_n$ , а элементы  $V$  называют  $n$ -мерными векторами-столбцами.

**Упражнение 2.5.** Проверьте условия с 1 по 8 для  $R_n$ . Покажите также, что если  $\mathbf{v} \in R_n$ , то  $-\mathbf{v} = (-1) \cdot \mathbf{v}$  и  $0 \cdot \mathbf{v} = 0$ . Справедливо ли это для любых векторных пространств?

**Пример 2.12.** Пусть  $V$  есть множество всех  $n$  вещественных чисел, написанных строками  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ . Если  $\mathbf{v} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  и  $\mathbf{w} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  — элементы из  $V$ , то  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n)$ , и если  $r \in R$ , то  $r \cdot \mathbf{v} = (rr_1, rr_2, \dots, rr_n)$ . Векторное пространство  $V$  в этом случае будем обозначать  $R^n$ , а его элементы  $V$  называть  $n$ -мерными векторами-строками.

**Упражнение 2.6.** Покажите, что  $R^n$  является векторным пространством.

Предположим, что  $V$  — векторное пространство и  $W$  — подмножество из  $V$ . Будем считать, что  $W$  есть подпространство  $V$ , если

1)  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ , то  $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$ ;

2)  $r \in R, \mathbf{w} \in W$ , то  $r\mathbf{w} \in W$ .

Другими словами,  $W$  — подпространство  $V$ , если  $W$  само является векторным пространством по отношению к операциям сложения и умножения. Заметим, что если  $W_1$  и  $W_2$  — подпространства  $V$ , то  $W_1 \cap W_2$  также является подпространством  $V$ . Если  $W_1$  и  $W_2$  — подмножества  $V$ , то  $W_1 + W_2 \subset V$  определим как

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{v} : \text{существуют } \mathbf{w}_1 \text{ в } W_1 \text{ и } \mathbf{w}_2 \text{ в } W_2 \text{ такие,} \\ \text{что } \mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2\} \quad (2.22)$$

и будем называть суммой  $W_1$  и  $W_2$ . В частности, если  $W_1$  и  $W_2$  — подмножества  $V$ , то  $W_1 + W_2$  — также подмножество  $V$ . Если  $W$  — подмножество  $V$  и  $r$  — вещественное число, то подмножество  $r \cdot W \subset V$  можно определить как

$$rW = \{\mathbf{v} : \text{существует } \mathbf{w} \text{ в } W \text{ такое, что } \mathbf{v} = r\mathbf{w}\}.$$

Будем называть его произведением  $W$  на  $r$ . В частности, если  $W$  — подмножество  $V$ , то  $rW$  — подмножество  $V$ .

**Пример 2.13.** Пусть  $W$  — подмножество из  $R_n$ , определенное как

$$W = \left\{ \mathbf{v} : \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n \end{bmatrix} \right\}.$$

$W$  есть подпространство  $R_n$ .

**Пример 2.14.** Если  $W$  — подмножество из  $V$ , состоящее только из 0, то  $W$  — подпространство  $V$ .

**Упражнение 2.7.** Покажите, что если  $W_1$  и  $W_2$  — подпространства  $V$ , то  $W_1 \cap W_2$  и  $W_1 + W_2$  также подпространства  $V$ . Покажите, что если  $W$  — подпространство  $V$ , то  $rW$  — также подпространство  $V$ .

На протяжении всей книги мы будем оперировать исключительно вещественным векторным пространством. Однако понятие векторного пространства можно определить значительно шире, заменив множество вещественных чисел  $R$  множеством любых, например комплексных чисел  $C$ ,

имеющим те же основные алгебраические свойства. Множество  $S$  комплексных элементов, для которого определены и справедливы понятия суммы и произведения, аналогичные 1)–8), стр. 31 называется комплексным векторным пространством. Обсуждение общего понятия векторного пространства можно найти в работе [24]. В этой книге мы найдем много примеров того, насколько понятия векторного пространства полезны при решении задач управления. Существует много других областей, например теория цепей, теория связи, теория электромагнитного поля, в которых понятие векторного пространства играет исключительно важную роль и позволяет решать различные задачи, с которыми читатель может быть уже знаком. Математическое представление известного физического понятия линейности является основой для определения векторного пространства.

## 2.6. ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ И БАЗИС

Предположим, что  $V$  — векторное пространство, а  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  — элементы  $V$ . Считаем, что вектор  $\mathbf{v}$  из  $V$  есть линейная комбинация  $\mathbf{v}_i$  (или линейно зависит от  $\mathbf{v}_i$ ), если существуют вещественные числа  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , такие, что

$$\mathbf{v} = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_n\mathbf{v}_n. \quad (2.23)^1$$

Вместо (2.23) иногда записывают

$$\sum_{i=1}^n r_i\mathbf{v}_i = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_n\mathbf{v}_n. \quad (2.24)$$

Элементы  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  из  $V$  линейно зависимы (или  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  линейно зависимы), если  $\mathbf{0}$  есть линейная комбинация  $\mathbf{v}_i$ , в которой не все  $r_i = 0$ . Другими словами,  $\mathbf{v}_i : i = 1, 2, \dots, n$  линейно зависимы, если

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n r_i\mathbf{v}_i = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_n\mathbf{v}_n \quad (2.25)$$

и существуют  $r_i \neq 0$ . С другой стороны, если

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n r_i\mathbf{v}_i \quad (2.26)$$

справедливо только при условии  $r_i = 0$ , для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , то векторы  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  называют линейно независимыми.

Заметим, что векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  из  $R_n$ , определенные как

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

(т. е.  $i$ -я составляющая равна 1, а все остальные 0), линейно независимы.

**Упражнение 2.8.** Покажите, что если  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , то векторы  $\{\mathbf{v}\}$  линейно независимы. Указание. Воспользуйтесь условием 6.

<sup>1</sup> Сумма  $n$  элементов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  в пространстве  $V$  может быть определена путем индукции (т. е.  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_{n-1}) + \mathbf{v}_n$ , что легко сделать, воспользовавшись условиями 1 и 2 на стр. 31.

Множество всех линейных комбинаций векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  из  $V$  есть подпространство  $V$ , которое мы будем называть отображением множества  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ . Легко показать, что отображение  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  есть все пространство  $R_n$ .

**Упражнение 2.9.** Покажите, что отображение  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  есть подпространство  $V$ .

Набор векторов  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  множества  $V$  называется (конечным) базисом  $V$ , если:

- 1) векторы  $\mathbf{v}_i, i = 1, 2, \dots, n$  линейно независимы;
- 2) каждый элемент  $V$  есть линейная комбинация  $\mathbf{v}_i$  (т. е.  $V$  есть отображение векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ ).

Напомним, что  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  [см. (2.27)] является базисом  $R_n$ , который мы будем называть единичным или нормальным базисом  $R_n$ .

Если  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  есть базис  $V$ , то  $\mathbf{v} \in V$  означает, что

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i, \quad (2.28)$$

где  $\alpha_i$  — единственные элементы  $R$ ;  $\alpha_i$  называют координатами  $\mathbf{v}$  по отношению к базису  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ . Легко видеть, что если

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n \end{bmatrix} \in R_n,$$

то числа  $r_1, r_2, \dots, r_n$  являются координатами вектора  $\mathbf{v}$  по отношению к базису  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ .

Если  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  есть некоторый (фиксированный) базис  $V$ , а  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$  — некоторый элемент  $V$ , то можно считать, что координаты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  вектора  $\mathbf{v}$  определяют некоторый вектор  $\mathbf{a}$  в  $R_n$ , компоненты которого по отношению к нормальному базису  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  в  $R_n$  равны  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , т. е.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Если  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  является базисом  $V$ , то  $n$  называется размерностью  $V$ . Можно показать, что если  $V$  имеет базис, то любые два базиса  $V$  имеют одинаковое число элементов. Более того, можно показать, что любая линейно независимая система векторов  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$  из  $V$  может быть дополнена до базиса  $V$  (существуют такие элементы  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-m}$  в  $V$ , что система векторов  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-m}\}$  образует базис  $V$ ). Следовательно, размерность любого соответствующего<sup>1</sup> подпространства  $W$  ( $W \neq V$ )  $n$ -мерного пространства  $V$  меньше, чем  $n$ .

<sup>1</sup> Слово «соответствующее» означает, что  $W \subset V$ , но  $W \neq V$ .

**Пример 2.15.** Если  $W_1$  и  $W_2$  — подпространства  $n$ -мерного пространства  $V$ , то  $\dim [W_1] + \dim [W_2] = \dim [W_1 + W_2] + \dim [W_1 \cap W_2]$ .

где  $\dim [ \ ]$  обозначает размерность. Например, в  $R^n$ , если  $W_1$  есть отображение  $\{e_1\}$  и  $W_2$  — отображение  $\{e_1 + e_2\}$ , то  $\dim [W_1] + \dim [W_2] = 2 = \dim [W_1 + W_2] + \dim [W_1 \cap W_2]$ , поскольку  $W_1 + W_2$  есть отображение  $\{e_1, e_2\}$  и  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ .

## ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

### 2.7. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И МАТРИЦЫ

Сформулировав определение векторного пространства, математик старается отыскать естественный класс преобразований, который «сохраняет» это понятие. Например, если  $V$  и  $W$  — векторные пространства и если  $\mathfrak{A}$  есть преобразование (функция)  $V$  в  $W$ , то можно поставить вопрос: какими свойствами должно обладать  $\mathfrak{A}$ , чтобы сохранить структуру  $V$  и  $W$ ?

Во-первых,  $\mathfrak{A}$  должно сохранять понятие суммы. Иначе говоря, для всех элементов  $v_1$  и  $v_2$  из  $V$  должно выполняться:

$$1) \mathfrak{A}(v_1 + v_2) = \mathfrak{A}(v_1) + \mathfrak{A}(v_2). \quad (2.29)$$

Во-вторых,  $\mathfrak{A}$  должно сохранять понятие произведения. Если  $r \in R$  и  $v \in V$ , то

$$2) \mathfrak{A}(rv) = r\mathfrak{A}(v). \quad (2.30)$$

Преобразование  $\mathfrak{A}$  множества  $V$  в  $W$ , область существования которого есть все  $V$  и которое удовлетворяет приведенным выше условиям, называется линейным преобразованием. Для обозначения линейных преобразований мы в дальнейшем, если не сделана специальная оговорка, будем всегда использовать готические прописные буквы.

Предположим, что  $V$  есть  $n$ -мерное пространство с базисом  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ;  $W$  —  $m$ -мерное пространство с базисом  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  и  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $V$  в  $W$ . Так как каждый элемент  $W$  есть линейная комбинация  $w_i$  и  $\mathfrak{A}(v_j)$  есть элемент  $W$ , то можно написать

$$\mathfrak{A}(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.31)$$

Далее, если  $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$  — элемент  $V$ , то согласно условиям 1) и 2) имеем

$$\mathfrak{A}(v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_j a_{ij} w_i. \quad (2.32)$$

Набор чисел  $\{a_{ij}; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$  можно записать в виде таблицы, обозначенной  $A$  и содержащей  $m$  строк и  $n$  столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Такая таблица называется  $m \times n$  матрицей. Числа  $a_{ij}$  называются элементами (коэффициентами, или составляющими) матрицы  $A$ . Иногда для сокращения вместо матрицы вида (2.33) пишут

$$A = (a_{ij}).$$

Укажем, что  $i$  обозначает строку и  $j$  — столбец матрицы  $A$ , в которых находится элемент  $a_{ij}$ . В дальнейшем для обозначения матриц будут

\*

использоваться жирные заглавные латинские буквы. Мы видим, что матрица  $\mathbf{A}$  связана с линейным преобразованием  $\mathfrak{A}$  и базисами  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  и  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$ .

Если

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

есть  $m \times n$  матрица, то линейное преобразование  $\mathfrak{B}$  пространства  $V$  в  $W$  можно определить как

$$\mathfrak{B}(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_j b_{ij} \mathbf{w}_i \quad (2.35)$$

для  $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j$  в  $V$ .  $\mathbf{B}$  есть матрица  $\mathfrak{B}$  по отношению к базисам  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  и  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$  пространств  $V$  и  $W$  соответственно.

**Упражнение 2.10.** Покажите, что  $\mathfrak{B}$ , определенное как (2.35), действительно является линейным преобразованием  $V$  в  $W$ .

**Пример 2.16.** Пусть  $V = R_3$ ,  $W = R_3$  и  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $V$  в  $W$ , определенное как  $\mathfrak{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ ,  $\mathfrak{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$  [см. (2.27)].

Тогда матрицу  $\mathbf{A}$  преобразования  $\mathfrak{A}$  можно записать в виде:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если задана матрица

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

то  $\mathfrak{B}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$  и  $\mathfrak{B}(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ .

Отметим, что если  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $V$  в  $W$ , такое, что  $\mathfrak{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  для любого  $\mathbf{v}$  из  $V$ , то его матрица  $\mathbf{A}$  будет состоять только из нулей; и наоборот, если  $\mathbf{B}$  состоит из элементов, равных 0, то линейное преобразование  $\mathfrak{B}$  (2.35) обладает тем свойством, что  $\mathfrak{B}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  для всех  $\mathbf{v}$  из  $V$ .

## 2.8. ОПЕРАЦИИ НАД ЛИНЕЙНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ И МАТРИЦАМИ

Предположим, что  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  — линейные преобразования  $V$  в  $W$  и что  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — матрицы  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  по отношению к базисам  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  и  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$  соответственно. Найдем матрицы преобразований  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  и  $r\mathfrak{A}$ ,  $r \in R$ , определенные как

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(\mathbf{v}) = \mathfrak{A}(\mathbf{v}) + \mathfrak{B}(\mathbf{v}) \text{ для всех } \mathbf{v} \in V \quad (2.36)$$

и

$$(r\mathfrak{A})(\mathbf{v}) = r[\mathfrak{A}(\mathbf{v})] \text{ для всех } \mathbf{v} \in V. \quad (2.37)$$

Легко видеть, что  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  и  $r\mathfrak{A}$  также будут линейными преобразованиями  $V$  в  $W$ ; мы будем называть  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  суммой  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ ,  $r\mathfrak{A}$  — произведением  $\mathfrak{A}$  на  $r$ .

Если  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$ , то

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(\mathbf{v}_j) &= \mathfrak{A}(\mathbf{v}_j) + \mathfrak{B}(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \boldsymbol{\omega}_i + \\ &+ \sum_{i=1}^m b_{ij} \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) \boldsymbol{\omega}_i \end{aligned} \quad (2.38)$$

и

$$(r\mathfrak{A})(\mathbf{v}_j) = r[\mathfrak{A}(\mathbf{v}_j)] = r \sum_{i=1}^m a_{ij} \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{i=1}^m (ra_{ij}) \boldsymbol{\omega}_i. \quad (2.39)$$

Другими словами, матрица преобразования  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  есть  $(a_{ij} + b_{ij})$  и матрица преобразования  $r\mathfrak{A}$  есть  $(ra_{ij})$ . Обозначим эти матрицы соответственно через  $A + B$  и  $rA$ . В развернутой форме

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

и

$$rA = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \dots & ra_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

$A + B$  называется суммой матриц  $A$  и  $B$ , а  $rA$  — произведением матрицы  $A$  на число  $r$ . Можно показать, что множество всех линейных преобразований  $V$  в  $W$  и множество всех  $m \times n$  матриц являются векторными пространствами по отношению к понятиям суммы и произведения. Множество всех линейных преобразований  $V$  в  $W$  будем обозначать  $\mathfrak{L}(V, W)$  и множество всех  $m \times n$  матриц —  $\mathfrak{M}(m, n)$ .

**Упражнение 2.11.** Докажите, что  $\mathfrak{L}(V, R)$  — векторное пространство, и покажите справедливость аксиом 1—8 по отношению к  $\mathfrak{L}(V, R)$ . Пространство  $\mathfrak{L}(V, R)$  обозначают  $V^*$  и называют пространством, сопряженным к  $V$ .

**Упражнение 2.12.** Пусть  $V = R_n$  и пусть  $\mathfrak{A} \in R_n^*$  [см. упражнение 2.11]. Покажите, что если  $\mathbf{v} \in R_n$ , то  $\mathfrak{A}(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathfrak{A}(\mathbf{e}_j)$ , где  $\alpha_j$  — координаты  $\mathbf{v}$  по отношению к  $\mathbf{e}_j$  (см. § 2.6). Покажите, что преобразования  $\mathfrak{A}_i$  пространства  $R_n$  в  $R$ , определяемые как  $\mathfrak{A}_i(\mathbf{v}) = \alpha_i$  (где  $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{e}_j$ ) для  $i = 1, 2, \dots, n$ , принадлежат к  $R_n^*$  и что

$\mathfrak{A}_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$  и  $\delta_{ii} = 1$  (Указание:  $\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \mathbf{e}_j$ ). Покажите

что  $\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n\}$  является базисом  $R_n^*$ . Базис  $\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n\}$  называют дуальным по отношению к  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Чему равна матрица  $\mathfrak{A}_i$  по отношению к базисам  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  в  $R_n$  и 1 для  $R$ ? Можно ли найти однозначное линейное преобразование  $R_n^*$  в  $R^n$  (пространство  $n$ -мерных векторов-строк)? (Указание: Примите, что  $\mathbf{f}_i$  —  $n$ -мерный вектор-строка, имеющий 1 на  $i$ -м месте и 0 на всех остальных). Если такое преобразование существует, какая матрица с ним связана относительно базисов  $\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n\}$  и  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ ?

Предположим теперь, что  $V, W$  и  $X$  — векторные пространства с базисами  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ,  $\{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \dots, \boldsymbol{\omega}_m\}$  и  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p\}$  соответственно. Если  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $W$  в  $X$  и  $\mathfrak{B}$  — линейное преобразование  $V$  в  $W$ , то  $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$  будет линейным преобразо-

ванием  $V$  в  $X$ . Для примера проверим условие 1. Пусть  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  — элементы  $V$ , тогда

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})(\mathbf{v} + \mathbf{v}') &= \mathfrak{A} [\mathfrak{B}(\mathbf{v} + \mathbf{v}')] = \mathfrak{A} [\mathfrak{B}(\mathbf{v}) + \mathfrak{B}(\mathbf{v}')] = \\ &= \mathfrak{A} [\mathfrak{B}(\mathbf{v})] + \mathfrak{A} [\mathfrak{B}(\mathbf{v}')] = (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})(\mathbf{v}) + (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})(\mathbf{v}'). \end{aligned}$$

Попытаемся теперь найти матрицу преобразования  $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ , предполагая, что  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  и  $\mathbf{B} = (b_{kj})$  — матрицы  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ . Имеем

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})(\mathbf{v}_j) &= \mathfrak{A} [\mathfrak{B}(\mathbf{v}_j)] = \mathfrak{A} \left[ \sum_{k=1}^m b_{kj} \boldsymbol{\omega}_k \right] = \\ &= \sum_{k=1}^m b_{kj} \mathfrak{A}(\boldsymbol{\omega}_k) = \sum_{k=1}^m b_{kj} \sum_{i=1}^p a_{ik} \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \right) \mathbf{x}_i. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Другими словами, элементы матрицы  $\mathbf{C} = (c_{ij})$  преобразования  $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$  имеют вид

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \quad (2.43)$$

для  $i = 1, 2, \dots, p$  и  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Матрицу  $\mathbf{C}$  называют произведением матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  и записывают

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}. \quad (2.44)$$

Отметим, что число столбцов матрицы  $\mathbf{A}$  должно быть равно числу строк матрицы  $\mathbf{B}$ . В общем случае  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ .

**Пример 2.17.** Пусть  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  и  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Тогда  $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

**Упражнение 2.13**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Найдите } \mathbf{AB} \text{ и } \mathbf{BA}.$$

Если  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  есть матрица  $m \times n$ , то матрица  $\mathbf{A}'$  размера  $n \times m$ , определенная как

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

называется транспонированной матрицей  $\mathbf{A}$ . Строки  $\mathbf{A}'$  являются столбцами  $\mathbf{A}$  и столбцы  $\mathbf{A}'$  — строками  $\mathbf{A}$ . Если транспонированную матрицу  $\mathbf{A}$  представить как

$$\mathbf{A}' = (a'_{ji}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.46)$$

то  $a'_{ji} = a_{ij}$ .

**Пример 2.18.** Если  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ , то  $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ .

Если  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  — базис  $V$ ,  $\{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \dots, \boldsymbol{\omega}_m\}$  — базис  $W$  и  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $V$  в  $W$  с матрицей  $\mathbf{A}$  по отношению к этим базисам, то для  $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j$  имеем

$$\mathfrak{A}(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \right) \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a'_{ji} \alpha_j \right) \boldsymbol{\omega}_i. \quad (2.47)$$

Иначе говоря,  $A'$  может рассматриваться как определение перехода от координат  $\alpha_j$  вектора  $\boldsymbol{v}$  к координатам  $\mathfrak{U}(\boldsymbol{v})$ . Отметим также, что

$$(A')' = A; (A + B)' = A' + B'; (AB)' = B'A'. \quad (2.48)$$

Рассмотрим транспонирование матрицы с другой точки зрения. Предположим, что  $A = (a_{ij})$  есть матрица  $m \times n$  и  $\boldsymbol{w}$  — элемент  $R_m$ , т. е., что

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Тогда  $\boldsymbol{w}$  можно рассматривать как  $m \times 1$  матрицу и произведение  $A'\boldsymbol{w}$  как

$$A'\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m a'_{1i} s_i \\ \sum_{i=1}^m a'_{2i} s_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m a'_{ni} s_i \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

$A'\boldsymbol{w}$  есть элемент  $R_n$ , и преобразование  $\mathfrak{U}'$  пространства  $R_m$  в  $R_n$  можно определить, полагая

$$\mathfrak{U}'(\boldsymbol{w}) = A'\boldsymbol{w} \quad (2.51)$$

для  $\boldsymbol{w}$  из  $R_m$ . Легко видеть, что  $\mathfrak{U}'$  — линейное преобразование  $R_m$  в  $R_n$ . Так как элементы базы  $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_m$  пространства  $R_m$  определяются как

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad i\text{-я строка}, \quad (2.52)$$

нетрудно заметить, что

$$\mathfrak{U}'(\boldsymbol{e}_i) = \begin{bmatrix} a'_{1i} \\ a'_{2i} \\ \vdots \\ a'_{ni} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n a'_{ji} \boldsymbol{e}_j. \quad (2.53)$$

Другими словами,  $A'$  есть матрица  $\mathfrak{U}$  по отношению к нормальным базисам  $R_m$  и  $R_n$ .



## 2.9. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ $V$ В $V$

Сосредоточим теперь внимание на линейном преобразовании векторного пространства  $V$  в  $V$ . Предположим, что  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  — данный базис  $V$ . Если  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $V$  в  $V$ , то его матрица  $\mathbf{A}$ , отнесенная к заданному базису, будет иметь  $n$  строк и  $n$  столбцов (т. е.  $\mathbf{A}$  есть  $n \times n$  матрица). Важным частным случаем линейного преобразования  $V$  в  $V$  является идентичное преобразование  $\mathfrak{I}$ , определяемое как

$$\mathfrak{I}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}. \quad (2.54)$$

Матрица  $\mathbf{I}$  преобразования  $\mathfrak{I}$  имеет вид

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

т. е.

$$\mathbf{I} = (\delta_{ij}), \quad (2.56)$$

где  $\delta_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$  и  $\delta_{ij} = 1$ .  $\delta_{ij}$  называется символом Кронекера, а  $\mathbf{I}$  — единичной матрицей. Заметим, что  $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{I} = \mathfrak{I} \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$  для любых линейных преобразований  $\mathfrak{A}$  пространства  $V$  в  $V$ , и, следовательно,

$$\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A} \quad (2.57)$$

для любой  $n \times n$  матрицы  $\mathbf{A}$ .

**Упражнение 2.14.** Докажите формулу (2.57), используя выражение (2.43).

**Упражнение 2.15.** Покажите двумя способами, что если

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n \end{bmatrix}$$

принадлежит к  $R_n$  и  $\mathbf{I}$  —  $n \times n$  единичная матрица, то  $\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}$  [см. (2.50)]. Укажи-те: используйте формулу (2.43) и определение (2.51).

Предположим, что  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $V$  в себя и что существует линейное преобразование  $\mathfrak{B}$  пространства  $V$  в себя, такое, что

$$\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{I}. \quad (2.58)$$

В этом случае преобразование  $\mathfrak{A}$  называют невырожденным, а преобразование  $\mathfrak{B}$ , обозначаемое  $\mathfrak{A}^{-1}$ , — обратным к  $\mathfrak{A}$ . Если  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — матрицы  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  соответственно, то уравнение (2.58) означает, что

$$\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}. \quad (2.59)$$

С другой стороны, если  $\mathbf{A}$  есть  $n \times n$  матрица и существует  $n \times n$  матрица  $\mathbf{B}$ , которая удовлетворяет выражению (2.59), то говорят, что  $\mathbf{A}$  — невырожденная матрица и матрица  $\mathbf{B}$ , обозначаемая  $\mathbf{A}^{-1}$ , называется матрицей обратной к  $\mathbf{A}$ . Отметим, что

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (2.60)$$

Следующая теорема (доказательство которой содержится в упражнении 2.16) дает более глубокое представление о понятии невырожденного линейного преобразования.

**Теорема 2.2.** Если  $V$  —  $n$ -мерное пространство и  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $V$  в себя, то

а)  $\mathfrak{U}$  невырожденное тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{U}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  справедливо лишь при  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ;

б)  $\mathfrak{U}$  невырожденное тогда и только тогда, когда областью существования  $\mathfrak{U}$  является все пространство  $V$ .

**С л е д с т в и е т е о р е м ы:**  $\mathfrak{U}$  есть невырожденное преобразование тогда и только тогда, когда базис  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  преобразуется в базис  $\{\mathfrak{U}(\mathbf{v}_1), \mathfrak{U}(\mathbf{v}_2), \dots, \mathfrak{U}(\mathbf{v}_n)\}$ . Другими словами, невырожденное преобразование соответствует изменению базиса  $V$ . Заметим, что единичная матрица всегда невырожденная. Можно также показать, что  $n \times n$  матрица  $\mathbf{A}$  невырожденная тогда и только тогда, когда детерминант  $\mathbf{A}$ , обозначаемый как  $\det \mathbf{A}$ , не равен нулю, т. е.  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

**Пример 2.19.** Пусть  $\mathfrak{U}$  — линейное преобразование  $R_2$  в себя, определенное как  $\mathfrak{U}(e_1) = ae_1 + be_2$ ,  $\mathfrak{U}(e_2) = ce_1 + de_2$ . Тогда матрицу  $\mathbf{A}$  преобразования  $\mathfrak{U}$  относительно базы  $\{e_1, e_2\}$  запишем в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{A}$  — невырожденная матрица в том и только в том случае, если  $ad - bc \neq 0$ . Если  $\mathfrak{U}$  — невырожденное преобразование, то  $\mathfrak{U}^{-1}$  определяется как:

$$\mathfrak{U}^{-1}(e_1) = \frac{d}{ad-bc} e_1 + \frac{-b}{ad-bc} e_2; \quad \mathfrak{U}^{-1}(e_2) = \frac{-c}{ad-bc} e_1 + \frac{a}{ad-bc} e_2$$

и

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-c}{ad-bc} \\ \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}.$$

Например, если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{то } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

**Упражнение 2.16.** Докажите теорему 2.2. Пусть  $\mathfrak{U}$  — линейное преобразование  $V$  в  $V$  такое, что: 1) если  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ , то  $\mathfrak{U}(\mathbf{v}_1) \neq \mathfrak{U}(\mathbf{v}_2)$  и 2) область существования  $\mathfrak{U}$  — все пространство  $V$ . Покажите, что  $\mathfrak{U}$  невырождено. **У к а з а н и е:** если  $\mathbf{v} \in V$ , то  $\mathbf{v} = \mathfrak{U}(\mathbf{w})$  для некоторого  $\mathbf{w}$ . Примите  $\mathfrak{U}^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ . Единственно ли  $\mathbf{w}$ ? Покажите, что если  $\mathfrak{B}$  — невырожденное линейное преобразование  $V$  в  $V$ , то  $\mathfrak{B}$  удовлетворяет условиям 1 и 2. Теперь можно доказать теорему 2.2. (**У к а з а н и е:** используйте свойства 1 и 2. Например, покажите, что утверждение: « $\mathfrak{U}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  справедливо лишь для  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ » подтверждает, что если  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  есть базис  $V$ , то  $\mathfrak{U}(\mathbf{v}_1), \mathfrak{U}(\mathbf{v}_2), \dots, \mathfrak{U}(\mathbf{v}_n)$  линейно независимы.

Пусть  $\mathfrak{C}$  — линейное преобразование  $V$  в  $V$  и  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  и  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$  — базисы пространства  $V$ . Можно написать

$$\mathfrak{C}(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{v}_i, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

и

$$\mathfrak{C}(\mathbf{w}_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \mathbf{w}_i. \quad (2.61)$$

Иначе говоря,  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  есть матрица преобразования  $\mathfrak{C}$  по отношению к базису  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  и  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  — матрица  $\mathfrak{C}$  по отношению к базису  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ . Установим взаимосвязь между  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Поскольку  $\mathbf{w}_i$  принадлежат  $V$  и  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  — базис, то

$$\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{v}_i, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.62a)$$

и поскольку  $\mathbf{v}_k$  принадлежат  $V$  и  $\{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \dots, \boldsymbol{\omega}_n\}$  — базис, то

$$\mathbf{v}_k = \sum_{j=1}^n q_{jk} \boldsymbol{\omega}_j, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.62б)$$

Пусть  $\mathbf{P} = (p_{ij})$  и  $\mathbf{Q} = (q_{jk})$ . Легко видеть, что  $\mathbf{PQ} = \mathbf{QP} = \mathbf{I}$  и, следовательно,  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ .

Далее,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\boldsymbol{\omega}_j) &= \mathfrak{C}\left(\sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathfrak{C}(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (p_{ij} a_{ki}) \mathbf{v}_k = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n (p_{ij} a_{ki} q_{rk}) \boldsymbol{\omega}_r = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n q_{rk} a_{ki} p_{ij}\right) \boldsymbol{\omega}_r = \sum_{r=1}^n b_{rj} \boldsymbol{\omega}_r. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Следовательно,

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1}. \quad (2.64)$$

Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  называют подобными, а линейные преобразования, определяемые (2.62а) и (2.62б), называют преобразованиями подобия. В общем случае, если  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — любые две  $n \times n$  матрицы, для которых имеется невырожденная матрица  $\mathbf{P}$  такая, что справедливо уравнение (2.64), то  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  называют подобными матрицами. Отметим, что подобные матрицы соответствуют одному и тому же линейному преобразованию, но по отношению к различным базисам.

## 2.10. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Предположим, что  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $V$  в себя и  $\mathbf{A}$  есть матрица  $\mathfrak{A}$  по отношению к базису  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  в  $V$ . Вектор  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  в  $V$  называют собственным вектором  $\mathfrak{A}$ , если существует  $\lambda \in \mathbb{R}$  такое, что

$$\mathfrak{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}, \quad (2.65)$$

$\lambda$  называют собственным значением  $\mathfrak{A}$ . Посмотрим, что это значит. Для начала заметим: поскольку  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , отображение вектора  $\mathbf{v}$  (см. § 2.6) есть одномерное подпространство  $V_1$  пространства  $V$ . Легко видеть, что  $\mathfrak{A}(V_1) \subset V_1$  ( $\mathbf{v}$  есть базис  $V_1$ ). Затем, если  $W_1$  — одномерное подпространство  $V$  с  $\boldsymbol{\omega}_1$  в качестве базиса и  $\mathfrak{A}(W_1) \subset W_1$ , то  $\mathfrak{A}(\boldsymbol{\omega}_1) \in W_1$  означает, что

$$\mathfrak{A}(\boldsymbol{\omega}_1) = \lambda \boldsymbol{\omega}_1, \quad (2.66)$$

так как  $\boldsymbol{\omega}_1$  — собственный вектор  $\mathfrak{A}$ . Иначе говоря, собственные значения  $\mathfrak{A}$  соответствуют одномерным подпространствам пространства  $V$ , которые преобразование  $\mathfrak{A}$  преобразует в самих себя.

**Пример 2.20.** Предположим, что  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $R_2$  в себя, для которого  $\mathfrak{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  и  $\mathfrak{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ , тогда  $\mathfrak{A}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ , так что  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  — собственный вектор  $\mathfrak{A}$  и 2 — собственное значение  $\mathfrak{A}$ ; аналогично  $\mathfrak{A}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \mathbf{0} = 0(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ , где  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  — собственный вектор и 0 — собственное значение  $\mathfrak{A}$ . Матрица  $\mathbf{A}$  преобразования  $\mathfrak{A}$  по отношению к  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  записывается в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица подобна матрице

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Действительно,

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Что представляет собой данное преобразование подобия?

Собственные значения можно рассматривать несколько иначе. Если  $\mathbf{v}$  — собственный вектор  $\mathfrak{A}$  с собственным значением  $\lambda$ , то  $\mathfrak{A}(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} = 0$ ;  $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j$ , поскольку  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  — базис  $V$ , то можно обнаружить:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathfrak{A}(\mathbf{v}_j) - \lambda \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_j a_{ij} \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^n (\lambda \alpha_j) \mathbf{v}_j = 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Заметим, что  $\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \mathbf{v}_j$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Поэтому уравнение (2.67) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_j a_{ij} \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_j \delta_{ij} \mathbf{v}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ij} - \lambda \alpha_j \delta_{ij} \right) \mathbf{v}_i = 0. \end{aligned} \quad (2.67a)$$

Так как  $\mathbf{v}_i$  — базис  $V$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= 0; \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= 0; \\ \dots &\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

Система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_n$  вида

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0; \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

имеет ненулевое решение  $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$  (так как  $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$ ). Отсюда заключаем, что

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (2.70)$$

Если  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$  раскрыть в виде функции от  $\lambda$ , то получится полином вида

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-1)^n \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0, \quad (2.71)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  зависят от  $a_{ij}$ . Иначе говоря,  $\lambda$  есть корень полинома  $p(z)$  степени  $n$ :

$$p(z) = \det(\mathbf{A} - z\mathbf{I}) = (-1)^n z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n. \quad (2.72)$$

Полином  $p(z)$  иногда называют характеристическим полиномом матрицы  $A$ . Если, с другой стороны,  $\mu \in R$  есть корень полинома  $p(z)$ , то система уравнений

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \mu)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \mu)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0; \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \mu)x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

имеет ненулевое решение  $x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, \dots, x_n = \beta_n$  и вектор  $w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$  есть собственный вектор  $\mathfrak{U}$  с собственным значением  $\mu$ . Характеристический полином  $p(z)$  [уравнение (2.72)] матрицы  $A$  имеет  $n$  комплексных корней, и мы условимся называть любой корень  $p(z)$  собственным значением матрицы  $A$ . Если матрица  $B$  подобна матрице  $A$ ,  $B = PAP^{-1}$  ( $P$  — невырожденная матрица), то

$$\det(B - zI) = \det(PAP^{-1} - PzIP^{-1}) = \det(A - zI). \quad (2.74)$$

Подобные матрицы  $A$  и  $B$  имеют один и тот же характеристический полином и, следовательно, одинаковые собственные значения. Заметим, что собственные значения линейного преобразования  $\mathfrak{U}$  действительно являются собственными значениями матрицы  $A$  и каждое вещественное собственное значение  $A$  является собственным значением преобразования  $\mathfrak{U}$ . Корни характеристического полинома матрицы  $A$ , имеющие мнимые части (и часто называемые комплексными собственными значениями  $A$ ), не являются собственными значениями линейного преобразования  $\mathfrak{U}$ .

Другим интересным и полезным свойством характеристического полинома  $p(z)$  матрицы  $A$  является то, что сама матрица  $A$  является «корнем» полинома. Справедлива следующая теорема:

**Теорема 2.3. (Теорема Кэли—Гамильтона):** Если  $A$  есть  $n \times n$  матрица с характеристическим полиномом  $p(z)$  (2.12), то  $A$  есть «корень»  $p(z)$  в том смысле, что

$$p(A) = (-1)^n A^n + c_1 A^{n-1} + \dots + c_n I.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в работах [21] и [24].

**Пример 2.21.** Пусть  $\mathfrak{U}$  — линейное преобразование  $R_3$  в себя с матрицей  $A$  по отношению к базе  $\{e_1, e_2, e_3\}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином матрицы  $A$  есть  $p(z) = -z^3 + 3z^2 + z - 3$ ; собственные значения  $A$  — числа 1,  $-1$  и 3. Далее,  $\sqrt{3}e_1 + e_3$  — собственный вектор  $\mathfrak{U}$  с собственным значением 1,  $e_1 + 2e_2 - \sqrt{3}e_3$  — собственный вектор  $\mathfrak{U}$  с собственным значением  $-1$  и  $-e_1 + 2e_2 + \sqrt{3}e_3$  — собственный вектор  $\mathfrak{U}$  с собственным значением 3. Матрица  $A$  подобна матрице

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Упражнение 2.17.** Проверьте основные положения примера 2.21. Покажите, что  $A$  удовлетворяет уравнению  $-A^3 + 3A^2 + A - 3I = 0$ .

Предположим, что преобразование  $\mathfrak{U}$  обладает свойством:

$$\mathfrak{U}(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.75)$$

Говорят, что  $\mathfrak{A}$  — диагональное преобразование по отношению к базису  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ . В этом случае матрица  $\mathbf{A}$  по отношению к  $\mathbf{v}_i$  имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные значения  $\mathbf{A}$  (или  $\mathfrak{A}$ ).

Если  $\mathbf{B}$  есть матрица  $\mathfrak{A}$  по отношению к другому базису  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$  того же пространства  $V$ , то, как мы уже знаем из выражения (2.64),  $\mathbf{B}$  подобна  $\mathbf{A}$  (т. е. существует невырожденная матрица  $\mathbf{P}$  такая, что  $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$ ) и, следовательно,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  являются также собственными значениями  $\mathbf{B}$  (вернитесь к примеру 2.21, имея это в виду).

Теперь рассмотрим линейное преобразование  $\mathfrak{A}$  пространства  $V$  в себя, имеющее различные собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Предположим, что  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$  — соответствующие собственные векторы  $\mathfrak{A}$  [т. е.  $\mathfrak{A}(\mathbf{w}_i) = \lambda_i \mathbf{w}_i$ ]. Можно показать, что множество  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$  действительно является базисом  $V$ . Следовательно, матрица  $\mathbf{B}$  преобразования  $\mathfrak{A}$  по отношению к базису  $\mathbf{w}_i$  диагональна, т. е.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

Если окажется, что  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $R_n$  в себя с  $n$  различными собственными значениями  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , то через  $\mathbf{A}$  мы будем обычно обозначать  $n \times n$  матрицу вида

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

и будем называть  $\mathbf{A}$  матрицей собственных значений.

Наконец, когда  $\mathbf{A}$  есть  $n \times n$  матрица, а через  $\mathbf{A}_k(\lambda)$  мы обозначим  $k \times k$  матрицу вида

$$\mathbf{A}_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

то можно показать, что если все собственные значения  $\mathbf{A}$  — вещественные числа, то  $\mathbf{A}$  подобна матрице вида

$$\mathbf{J}(\mathbf{A}) = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_{m_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{m_2}(\lambda_2) & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{m_p}(\lambda_p) \end{array} \right], \quad (2.80)$$

где  $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$  и  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  — собственные значения (необязательно различные) матрицы  $\mathbf{A}$ .  $\mathbf{J}(\mathbf{A})$  называется жордановой канонической формой матрицы  $\mathbf{A}$ .

**Пример 2.22.** Рассмотрим  $3 \times 3$  матрицу  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \frac{\sqrt{3}}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

можно показать, что

$$J(A) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} + 3\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

или

$$J(A) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} + 3\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

**Пример 2.23.** Если  $A$  есть  $2 \times 2$  матрица и  $\lambda$  — двойной корень уравнения  $\det(A - zI) = 0$ , то  $A$  подобна матрицам вида

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

## ЭВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

### 2.11. ВНУТРЕННИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Предположим, что  $V$  — векторное пространство и  $P$  — функция, область существования которой — все пространство  $V \times V$  и область изменения заключена в  $R$ . Говорят, что  $P$  есть внутреннее произведение на  $V$ , если удовлетворяются следующие условия:

- 1)  $P(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + P(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  для всех  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{v}_3$  из  $V$ ;
- 2)  $P(r\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = rP(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  для всех  $r$  из  $R$  и  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  из  $V$ ;
- 3)  $P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = P(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$  для всех  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  из  $V$ .

$P$  иногда называют симметричной билинейной формой на  $V$ <sup>1</sup>.

Функцию  $P(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  часто называют квадратичной формой на  $V$ , произведенной  $P$ .

**Упражнение 2.18.** Покажите, что если  $P$  — внутреннее произведение на  $V$ , то:

- а)  $P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$  для всех  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{v}_3$  из  $V$  и б)  $P(\mathbf{v}_1, r\mathbf{v}_2) = rP(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  для всех  $r \in R$  и  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ . У к а з а н и е: следует многократно использовать условие 3.

Предположим, что  $P$  есть внутреннее произведение на  $V$  и что  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  — некоторый базис в  $V$ . Положим, что

$$P(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.81)$$

<sup>1</sup> Это более общая терминология, так как термин внутреннее произведение обычно сохраняют для того, что мы в дальнейшем будем называть положительно определенным внутренним произведением [см. уравнение (2.84)].

и пусть  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  есть  $n \times n$  матрица.  $\mathbf{A}$  называют матрицей  $P$  по отношению к базису  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ . Прежде всего отметим, что условие 3 означает, что

$$a_{ij} = P(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = P(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i) = a_{ji}. \quad (2.82)$$

Матрица  $\mathbf{A}$  обладает свойством  $a_{ij} = a_{ji}$  для  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $j = 1, 2, \dots, n$ , т. е.  $\mathbf{A}$  и транспонированная матрица  $\mathbf{A}'$  одинаковы:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}'. \quad (2.82a)$$

В общем случае, если  $n \times n$  матрица  $\mathbf{B}$  остается той же самой при транспонировании (т. е.  $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ ), то  $\mathbf{B}$  называют симметричной матрицей. Например, единичная матрица  $\mathbf{I}$  есть матрица симметричная. Мы показали, что если  $P$  — внутреннее произведение на  $V$ , то матрица  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ , где  $a_{ij} = P(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ , симметрична. Предположим далее, что  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  есть симметричная  $n \times n$  матрица. Можно ли определить внутреннее произведение  $Q$  на  $V$ , для которого  $Q(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = b_{ij}$ ? Можно, когда  $Q$  задается формулой

$$Q(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i b_{ij} \beta_j, \quad (2.83)$$

где  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$  и  $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j$ .

**Упражнение 2.19.** Покажите, что уравнение (2.83) действительно определяет внутреннее произведение  $Q$  на  $V$ . Если  $\mathbf{B}$  — единичная матрица  $\mathbf{I}$ , найдите, во что превращается формула для  $Q$ ?

**Пример 2.24.** Матрица

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

симметрична и определяет внутреннее произведение  $Q$  на  $R_3$ , причем

$$Q\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}\right) = \alpha_1 \beta_1 + 2\alpha_1 \beta_2 - \alpha_1 \beta_3 + 2\alpha_2 \beta_1 + 3\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1 + 3\alpha_3 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3.$$

Отметим, что

$$Q\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \text{ и } Q\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = -5.$$

Иначе говоря, существует ненулевой вектор  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , такой, что  $Q(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ ,

и другой ненулевой вектор  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , такой, что  $Q(\mathbf{w}, \mathbf{w}) < 0$ .

Внутреннее произведение  $P$  на  $V$  положительно, если  $P$  обладает свойством

$$P(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0 \quad (2.84)$$

для всех  $\mathbf{v}$  из  $V$ .

Будем называть  $P$  определенным (невырожденным), если утверждение « $P(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0) = 0$  для всех  $\mathbf{v} \in V$ » справедливо лишь для  $\mathbf{v}_0 = 0$ . Если  $\mathbf{B}$  — симметричная матрица, причем соответствующее ей внутреннее произведение на  $V$  [см. формулу (2.83)] положительно определено, то  $\mathbf{B}$  — положительно определенная матрица. Значение последнего понятия рассмат-



ривается в § 2.12, 2.13 и 2.15. Векторное пространство  $V$  вместе с определенным внутренним произведением  $P$  на  $V$  называется эвклидовым пространством.

Например, если рассматривать внутреннее произведение  $P$  на  $R_n$ , матрица которого по отношению к нормальному базису  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ <sup>1</sup> равна единичной матрице  $I$ , т. е.

$$P \left( \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \delta_{ij} \beta_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i, \quad (2.85)$$

то это внутреннее произведение положительно определено и  $R_n$  оказывается эвклидовым пространством. Выделим это внутреннее произведение называя его скалярным произведением, и будем использовать обозначение  $\langle v, w \rangle$  для  $P(v, w)$ .

Если

$$v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad w = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

— суть элементы  $R_n$ , то скалярное произведение  $v$  на  $w$

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i. \quad (2.86)$$

Это внутреннее произведение будет использоваться в дальнейшем очень часто.

**Пример 2.25.** Если  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  и  $w = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}$  — элементы  $R_2$ , то  $\langle v, w \rangle = \sqrt{2} - 3$ ,  $\langle v, v \rangle = 2$  и  $\langle w, w \rangle = 11$ .

**Упражнение 2.20.** Покажите, что скалярное произведение на  $R_n$ ,  $\langle v, w \rangle$  положительно определено.

## 2.12. НЕРАВЕНСТВО ШВАРЦА

Пусть  $V$  есть эвклидово пространство с внутренним произведением  $P$ . Докажем неравенство, известное как неравенство Шварца, а именно:

$$|P(v, w)|^2 \leq P(v, v)P(w, w) \quad (2.87)$$

для всех  $v, w$  из  $V$ . Для доказательства неравенства (2.87)  $P$  должно быть лишь положительно (определенности  $P$  не требуется). Если  $\lambda$  — любое вещественное число, то

$$P(v + \lambda w, v + \lambda w) = P(v, v) - 2\lambda P(v, w) + \lambda^2 P(w, w) \geq 0, \quad (2.88)$$

так как  $P$  положительно. Если  $P(w, w) \neq 0$ , то подстановка  $\lambda = -P(v, w)/P(w, w)$  в уравнение (2.88) даст желаемый результат, т. е. формулу (2.87). Если  $P(w, w) = 0$ , но  $P(v, v) \neq 0$ , то, рассматривая выражение  $P(\lambda v + w, \lambda v + w)$ , мы снова придем к формуле (2.87). Наконец,

<sup>1</sup> См. также формулу (2.27).

если  $P(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = 0$  и  $P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ , то, полагая в уравнении (2.88)  $\lambda = -P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ , получим неравенство

$$-2[P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})]^2 \geq 0, \quad (2.89)$$

которое справедливо лишь для  $P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ , что опять доказывает справедливость формулы (2.87). В дальнейшем мы будем использовать неравенство Шварца довольно часто.

Заметим, что если  $P$  — скалярное произведение на  $R_n$  [см. (2.86)], то неравенство Шварца принимает вид

$$|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle|^2 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle. \quad (2.90)$$

Полагая

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

имеем

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \right). \quad (2.91)$$

### 2.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ И НОРМЫ

Пусть  $V$  — евклидово пространство с внутренним произведением  $P$ . Будем говорить, что два вектора  $\boldsymbol{v}$  и  $\boldsymbol{w}$  ортогональны (или перпендикулярны), если

$$P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0. \quad (2.92)$$

Например, векторы  $\boldsymbol{e}_1$  и  $\boldsymbol{e}_2$  в  $R_2$  ортогональны по отношению к скалярному произведению на  $R_2$ :  $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle = 0$ . Если  $V$   $n$ -мерно, то в нем существует такой базис  $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ , что  $\boldsymbol{v}_i$  ортогонально  $\boldsymbol{v}_j$ , если  $i \neq j$  и  $P(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = 1$ . Иначе говоря, матрица  $P$  по отношению к базису  $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$  есть единичная матрица  $I$ . Такой базис называется ортогональным в пространстве  $V$ . Например, натуральный базис  $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$  есть ортогональный базис  $R_n$  для скалярного произведения на  $R_n$ , т. е.

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.93)$$

**Пример 2.26.** Матрица  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$  симметрична и определяет внутреннее произведение  $P$  на  $R_3$ :

$$P\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}\right) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + 3\alpha_2 \beta_2 + 2\alpha_2 \beta_3 + 2\alpha_3 \beta_2 + 4\alpha_3 \beta_3 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) + \alpha_2 \beta_2 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)(\beta_2 + 2\beta_3).$$

$P$  — положительно определено, и поэтому, если положить  $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{e}_1$ ,  $\boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3$  и  $\boldsymbol{w}_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3$ , то векторы  $\boldsymbol{w}_1$ ,  $\boldsymbol{w}_2$  и  $\boldsymbol{w}_3$  образуют ортогональный базис  $R_3$  по отношению к внутреннему произведению  $P$ . Заметим, что  $P(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} \rangle$  и что  $P(\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j) = \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_j \rangle = \delta_{ij}$  для  $i, j = 1, 2, 3$ .

**Упражнение 2.21.** Докажите, что внутреннее произведение  $P$  для примера 2.26 действительно положительно определено. Укажите: используйте ортогональный базис  $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ , предварительно доказав его ортогональность.

**Упражнение 2.22.** Покажите, что  $|(\alpha_1 \beta_1 + 4\alpha_3 \beta_3)|^2 \leq (\alpha_1^2 + 4\alpha_3^2)(\beta_1^2 + 4\beta_3^2)$ .

Укажите: используйте неравенство (2.87) и внутреннее произведение примера 2.26.

Если  $V$  — евклидово пространство с внутренним произведением  $P$ , то  $\sqrt{P(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$  называют нормой элемента  $\mathbf{v}$  из  $V$  и записывают

$$\|\mathbf{v}\|_P = \sqrt{P(\mathbf{v}, \mathbf{v})}. \quad (2.94)$$

В случае скалярного произведения на  $R_n$  для нормы  $\mathbf{v}$  записывают

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \text{ для всех } \mathbf{v} \text{ из } R_n. \quad (2.95)$$

Норма обладает следующими важными свойствами:

1)  $\|\mathbf{v}\|_P \geq 0$  для всех  $\mathbf{v}$  из  $V$ , причем  $\|\mathbf{v}\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ;

2)  $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|_P \leq \|\mathbf{v}_1\|_P + \|\mathbf{v}_2\|_P$  для всех  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  из  $V$ ;

3)  $\|r\mathbf{v}\|_P = |r| \|\mathbf{v}\|_P$  для всех  $r$  из  $R$  и для всех  $\mathbf{v}$  из  $V$ .

В следующей главе мы более подробно рассмотрим понятие нормы. В § 3.2 мы покажем, что норма позволяет определить расстояния между элементами  $V$ . Более того, мы можем определить «угол»  $\theta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  между векторами  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  с помощью формулы

$$\cos \theta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_1\|_P \|\mathbf{v}_2\|_P}. \quad (2.96)$$

Таким образом, существуют понятия длины и угла в пространстве  $V$ . Поэтому  $V$  называют евклидовым пространством.

#### 2.14. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА $R_n$

Предположим, что  $C = (c_{ij})$  есть  $n \times m$  матрица. Тогда, если  $\mathbf{u}$  — элемент из  $R_m$ , то  $C\mathbf{u}$  мы можем рассматривать как элемент из  $R_n$  (см. § 2.8). Иначе говоря, если

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \text{ то } C\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_{1j}u_j \\ \sum_{j=1}^m c_{2j}u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m c_{nj}u_j \end{bmatrix}.$$

Попытаемся определить  $\langle C\mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$ , где  $\mathbf{x} \in R_n$ . Имеем

$$\begin{aligned} \langle C\mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_{1j}u_j \\ \sum_{j=1}^m c_{2j}u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m c_{nj}u_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m c_{ij}u_j \right) x_i = \\ &= \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n c_{ij}x_i \right) u_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n c'_{ji}x_i \right) u_j = \end{aligned}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n c'_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^n c'_{2i} x_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^n c'_{mi} x_i \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{C}'\mathbf{x} \rangle, \quad (2.97)$$

где  $\mathbf{C}' = (c'_{ji})$  — транспонированная матрица  $\mathbf{C}$  и  $c'_{ji} = c_{ij}$  для  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $j = 1, 2, \dots, m$ . Итак,

$$\langle \mathbf{C}\mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{C}'\mathbf{x} \rangle. \quad (2.98)$$

Последнее выражение мы будем использовать в дальнейшем довольно часто.

**Пример 2.27.** Пусть  $\mathbf{C}$  —  $3 \times 2$  матрица  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

Если  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$  и  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  — элементы  $R_2$  и  $R_3$  соответственно, то

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 + 2u_2 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{C}'\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{bmatrix},$$

а  $\langle \mathbf{C}\mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_1 x_3 + 2u_2 x_3 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{C}'\mathbf{x} \rangle = u_1 (x_1 + x_3) + u_2 (x_2 + 2x_3)$ .

Подставьте какие-нибудь числа вместо  $u_j$  и  $x_i$ , если вы все еще сомневаетесь в справедливости данного положения.

Далее в этом параграфе мы будем рассматривать только пространство  $R_n$ . Все векторы будут считаться элементами  $R_n$  и все матрицы — размера  $n \times n$ . Предположим, что  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}', \quad (2.99)$$

что эквивалентно

$$a_{ij} = -a_{ji} \text{ для } i = 1, 2, \dots, n \text{ и } j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.100)$$

Говорят, что  $\mathbf{A}$  — кососимметричная матрица. Каково значение этого свойства по отношению к скалярному произведению? Согласно выражению (2.98) имеем

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}'\mathbf{x} \rangle \quad (2.101)$$

для любого  $\mathbf{x}$ . Это означает, что

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, -\mathbf{A}\mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \quad (2.102)$$

для любого  $\mathbf{x}$ , если  $\mathbf{A}$  кососимметрична. Иначе говоря,

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \quad (2.103)$$

для любого  $\mathbf{x}$ , если  $\mathbf{A}$  кососимметрична. Справедливо и обратное: если матрица  $\mathbf{A}$  удовлетворяет уравнению (2.103) для любого  $\mathbf{x}$ , то  $\mathbf{A}$  — кососимметрична. Уравнение (2.103) означает, что векторы  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}$  ортогональны. Таким образом, операция  $\mathbf{A}$  над вектором  $\mathbf{x}$  производит вектор  $\mathbf{A}\mathbf{x}$ , ортогональный к  $\mathbf{x}$ .

**Пример 2.28.**  $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{bmatrix}$  кососимметрична;  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  также кососимметрична.

**Пример 2.29.** Если  $B$  — любая  $n \times n$  матрица, то матрица  $\frac{B - B'}{2}$  кососимметрична (почему?), а матрица  $\frac{B + B'}{2}$  — симметрична. Отметим, что  $B = \frac{B + B'}{2} + \frac{B - B'}{2}$ .

**Упражнение 2.23.** Покажите, что если  $\langle Ax, x \rangle = 0$  для любого  $x$ , то  $A = -A'$ . Указания:  $\langle A(e_i - e_j), e_i - e_j \rangle = 0$ .

Мы знаем, что  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  есть ортонормальный базис в  $R_n$ . Предположим, что  $\Phi$  невырожденная матрица; тогда набор векторов  $\{\Phi e_1, \Phi e_2, \dots, \Phi e_n\}$  есть базис  $R_n$  (почему?). Посмотрим, каким условиям должна удовлетворять матрица  $\Phi$  для того, чтобы этот базис был ортонормальным. Имеем

$$\langle \Phi e_i, \Phi e_j \rangle = \langle e_i, \Phi' \Phi e_j \rangle. \quad (2.104)$$

Если  $\Phi = (\varphi_{ij})$ , то можно написать

$$\langle e_i, \Phi' \Phi e_j \rangle = \sum_{p=1}^n \varphi'_{ip} \varphi_{pj}, \quad (2.105)$$

где  $\Phi' = (\varphi'_{ji})$  с  $\varphi'_{ji} = \varphi_{ij}$ . Следовательно,  $\langle \Phi e_i, \Phi e_j \rangle = \delta_{ij}$  тогда и только тогда, когда

$$\Phi' \Phi = I. \quad (2.106)$$

Аналогично можно показать, что  $\langle \Phi e_i, \Phi e_j \rangle = \delta_{ij}$  тогда и только тогда, когда

$$\Phi \Phi' = I \quad (2.107)$$

В результате получаем, что базис  $\{\Phi e_1, \Phi e_2, \dots, \Phi e_n\}$  снова будет ортонормальным только в том случае, если обратная и транспонированная матрицы  $\Phi'$  одинаковы, т. е.

$$\Phi^{-1} = \Phi', \quad (2.108)$$

или, что то же самое,

$$\Phi' \Phi = \Phi \Phi' = I. \quad (2.109)$$

Любая матрица, удовлетворяющая условию (2.109), называется ортогональной матрицей (и преобразование, определяемое  $\Phi$ , как в § 2.7, называется ортогональным преобразованием). Мы видим, что

$$\langle \Phi x, \Phi x \rangle = \langle x, x \rangle \quad (2.110)$$

для любого вектора  $x$  и

$$\|\Phi x\| = \|x\| \quad [\text{см. (2.95)}] \quad (2.111)$$

для любого  $x$  в  $R_n$ , если  $\Phi$  — ортогональная матрица.

Ортогональную матрицу (или преобразование)  $\Phi$  можно представлять себе как преобразование, сохраняющее евклидову длину  $\|x\|$  вектора  $x$ , но изменяющее его «направление».

**Пример 2.30.** Пусть  $\Phi$  есть матрица  $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

(для некоторого угла  $\theta$ ). Тогда

$$\Phi' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}; \quad \Phi' \Phi = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{так что } \Phi \text{ есть}$$

ортогональная матрица.

**Упражнение 2.24.** Определите, является ли матрица  $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  ортогональной?

Является ли ортогональной матрица  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}$ ?

Что можно сказать о произведении этих матриц?

## 2.15. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ

В § 2.11 мы уже отмечали, что существует тесная связь между понятием внутреннего произведения и симметричными матрицами. Используем эту связь, чтобы отыскать некоторые свойства симметричных матриц, которые нам часто будут нужны в дальнейшем.

В этом параграфе мы будем рассматривать лишь пространство  $R_n$ . Следовательно, все векторы будут предполагаться элементами из  $R_n$ , а все матрицы — размера  $n \times n$ . Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  обозначает нормальный базис в  $R_n$  [см. уравнение (2.27)] и пусть  $Q = (q_{ij})$  — симметричная  $n \times n$  матрица, т. е.

$$Q = Q', \quad (2.112)$$

где  $Q'$  — транспонированная матрица  $Q$ .

Мы знаем, что функция  $Q(v, w)$ , определенная как

$$Q(v, w) = \langle v, Qw \rangle \quad (2.113)$$

для всех  $v$  и  $w$  из  $R_n$ , является внутренним произведением на  $R_n$ , поскольку  $Q$  симметрична.

Если  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  и  $w = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$ , то имеем

$$Q(v, w) = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, Q \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \langle e_i, Qe_j \rangle \beta_j. \quad (2.114)$$

Мы знаем, однако, что

$$Qe_j = \sum_{k=1}^n q_{kj} e_k, \quad (2.115)$$

и, следовательно,

$$\langle e_i, Qe_j \rangle = \sum_{k=1}^n q_{kj} \langle e_i, e_k \rangle = q_{ij}, \quad (2.116)$$

поскольку  $\langle e_i, e_k \rangle = \delta_{ik}$  (где  $\delta_{ik} = 0$ , если  $i \neq k$  и  $\delta_{ii} = 1$ ). Отсюда вытекает, что

$$Q(v, w) = \langle v, Qw \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i q_{ij} \beta_j \quad (2.117)$$

и что  $Q$  — матрица внутреннего произведения  $Q$  по отношению к нормальному базису  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .

Рассмотрим теперь очень важную теорему, которая утверждает, что существует ортонормальный базис  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  в  $R_n$ , обладающий свойством

$$Q(f_i, f_j) = \lambda_i \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.118)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  —  $n$  вещественных чисел. Иными словами, матрица внутреннего произведения  $Q$  по отношению к базису  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  есть диагональная матрица с элементами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Строго говоря, мы можем доказать следующую теорему:

**Теорема 2.4.** Если  $Q$  — симметричная  $n \times n$  матрица и  $Q$  — внутреннее произведение на  $R_n$ , определенное уравнением (2.113), то в  $R_n$  существует ортонормальный базис  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ , т. е.

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.119)$$

такой, что матрица  $Q$  по отношению к  $f_i$  есть диагональная матрица  $\Lambda$  вида

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.120)$$

Иначе говоря, существует ортогональная матрица  $\Phi$  [т. е.  $\Phi' \Phi = I$ , см. уравнение (2.109)], обладающая свойством

$$\langle \Phi e_i, Q \Phi e_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.121)$$

или, что эквивалентно,

$$\Phi' Q \Phi = \Lambda. \quad (2.122)$$

Поскольку  $\Phi$  ортогональна и  $\Phi'$  — инвертированная матрица  $\Phi$ , уравнение (2.122) означает, что  $Q$  и  $\Lambda$  — подобные матрицы (см. § 2.9). Следовательно, вещественные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные значения  $Q$ <sup>1</sup>.

Можно непосредственно установить два следствия этой теоремы.

**Следствие 2.1.** Если  $Q$  — (вещественная) симметричная  $n \times n$  матрица, то собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы  $Q$  вещественны.

**Следствие 2.2.** Если  $Q(v, v) = \langle v, Qv \rangle$  — квадратичная форма, произведенная внутренним произведением  $Q$  (см. § 2.11), то существует ортонормальный базис  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ , такой, что

$$Q(v, v) = \langle v, Qv \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i^2 \quad (2.123)$$

для всех  $v$  из  $R_n$ , где  $\lambda_i$  — собственные значения  $Q$  и  $\beta_i$  — координаты  $v$  по отношению к базису  $f_i$ , т. е.  $v = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i$ .

**Пример 2.31.** Пусть  $Q$  — симметричная  $2 \times 2$  матрица:

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}; \quad \langle e_1, Qe_1 \rangle = a \quad \langle e_1, Qe_2 \rangle = b; \\ \langle e_2, Qe_1 \rangle = b \quad \langle e_2, Qe_2 \rangle = c.$$

Теорема устанавливает, что существует ортонормальный базис  $\{f_1, f_2\}$  в  $R_2$ , такой, что  $\langle f_1, Qf_1 \rangle = \lambda_1$ ,  $\langle f_1, Qf_2 \rangle = \langle f_2, Qf_1 \rangle = 0$  и  $\langle f_2, Qf_2 \rangle = \lambda_2$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — собственные значения  $Q$ .

Так как

$$Q - \lambda I = \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{bmatrix},$$

нетрудно видеть, что  $\det(Q - \lambda I) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2)$  и, следовательно, собственные значения  $Q$  равны

$$\lambda_1 = \frac{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{(a+c) - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}.$$

<sup>1</sup> Доказательство этой теоремы можно найти в литературе [21] или [24].

Так как  $(a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$ , собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  должны быть действительными. В частности, если  $a = b = c = 1$ , т. е.  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , то собственные значения  $Q$  равны 0 и 2, и существует ортогональная матрица  $\Phi$ , а именно:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

такая, что  $\Phi'Q\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

Векторы  $f_1 = \Phi e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  и  $f_2 = \Phi e_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  являются новыми ортонормальными

векторами базиса в  $R_2$ .

Исходя из следствия 2.2, введем следующую терминологию для симметричной  $n \times n$  матрицы  $Q$ . Будем говорить, что  $Q$ :

1. **Положительно определена**, если все собственные значения  $\lambda_i$  положительны, т. е.  $\lambda_i > 0$  для всех  $i$ , (2.124)

или, что эквивалентно, тогда и только тогда, когда

$$Q(v, v) = \langle v, Qv \rangle > 0 \quad (2.125)$$

для всех  $v \neq 0$  из  $R_n$ .

2. **Положительно полуопределена**, если собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы  $Q$  неотрицательны и хотя бы одно из собственных значений  $\lambda_i$  равно нулю, т. е.

$$\lambda_i \geq 0 \text{ для всех } i \quad (2.126)$$

и  $\lambda_{i_1} = 0$  для некоторых  $i_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , (2.127)

или эквивалентно, если

$$Q(v, v) = \langle v, Qv \rangle \geq 0 \quad (2.128)$$

для всех  $v$  из  $R_n$  и существует некоторый вектор  $\hat{v} \neq 0$  в  $R_n$ , для которого

$$Q(\hat{v}, \hat{v}) = \langle \hat{v}, Q\hat{v} \rangle = 0. \quad (2.129)$$

3. **Отрицательно определена** тогда и только тогда, когда собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы  $Q$  отрицательны, т. е.

$$\lambda_i < 0 \text{ для всех } i \quad (2.130)$$

или эквивалентно, если

$$Q(v, v) = \langle v, Qv \rangle < 0 \quad (2.131)$$

для всех  $v \neq 0$  из  $R_n$ .

4. **Отрицательно полуопределена** тогда и только тогда, когда все собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы  $Q$  неположительны и по крайней мере одно из них равно нулю, т. е.

$$\lambda_i \leq 0 \text{ для всех } i \quad (2.132)$$

и  $\lambda_{i_1} = 0$  для некоторого  $i_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$  (2.133)

или эквивалентно, если

$$Q(v, v) = \langle v, Qv \rangle \leq 0 \quad (2.134)$$

для всех  $v$  из  $R_n$  и

$$Q(\hat{v}, \hat{v}) = \langle \hat{v}, Q\hat{v} \rangle = 0 \quad (2.135)$$

для некоторого  $\hat{v} \neq 0$  из  $R_n$ .



Заметим, что если  $Q$  положительно или отрицательно определена, то  $Q$  должна быть невырожденной, поскольку  $Q$  подобна диагональной матрице, не имеющей нулей среди элементов главной диагонали. Если  $Q$  положительно или отрицательно полуопределена, то  $Q$  должна быть вырожденной матрицей, поскольку  $Q$  имеет нулевое собственное значение. Частные случаи использования этих понятий рассматриваются в гл. 6 и 9.

**Пример 2.32.** Матрица  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  положительно полуопределена, так как ее собственные значения равны 0 и 2.

Так как нам часто надо будет определять, является ли данная симметричная  $n \times n$  матрица  $Q = (q_{ij})$  положительно определенной, установим два критерия положительной определенности с помощью следующей теоремы:

**Теорема 2.5.** Пусть  $Q = (q_{ij})$  — симметричная  $n \times n$  матрица. Тогда а)  $Q$  положительно определена в том и только в том случае, если существует некоторое  $k > 0$ , такое, что

$$\langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v} \rangle \geq k \|\mathbf{v}\|^2 \quad (2.136)$$

для всех  $\mathbf{v}$  из  $R_n$ , где  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$  — эвклидова норма  $\mathbf{v}$  [см. уравнение (2.95)].

б)  $Q$  положительно определена в том и только в том случае, если справедливы соотношения

$$\det(Q_r) > 0, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (2.137)$$

где  $\det(Q_r)$  есть детерминант  $r \times r$  матрицы

$$Q_r = (q_{\alpha\beta}); \quad \alpha = 1, 2, \dots, r; \quad \beta = 1, 2, \dots, r, \quad (2.138)$$

т. е.

$$Q_r = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1r} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{r1} & q_{r2} & \dots & q_{rr} \end{bmatrix}. \quad (2.139)$$

Докажем пункт а) этой теоремы, а за доказательством пункта б) отошлем читателя к литературе [21]. Предположим сначала, что соотношение (2.136) удовлетворяется. Так как  $k > 0$  и  $\|\mathbf{v}\| \neq 0$ , если  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  (см. § 2.13), то

$$\langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v} \rangle \geq k \|\mathbf{v}\|^2 > 0 \quad (2.140)$$

для всех  $\mathbf{v}$  из  $R_n$ . С одной стороны, на основании уравнения (2.125) можно заключить, что  $Q$  положительно определена. С другой стороны, предположим,  $Q$  положительно определена, тогда на основании следствия 2.2 заключаем, что существует ортонормальный базис  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \dots, \mathbf{f}_n$ , такой что

$$\langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i^2 \quad (2.141)$$

для всех  $\mathbf{v}$  из  $R_n$ ,

где  $\beta_i$  — координаты  $\mathbf{v}$  по отношению к  $\mathbf{f}_i$  и

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.142)$$

(так как  $Q$  положительно определена). Однако, так как

$$\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.143)$$

мы имеем

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{f}_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{f}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \quad (2.144)$$

и если считать  $k$  положительным числом ( $k > 0$ ), причем

$$k \leq \lambda_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.145)$$

то из уравнений (2.141) и (2.144) можно заключить, что

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{Qv} \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i^2 \geq k \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = k \|\mathbf{v}\|^2. \quad (2.146)$$

Таким образом, пункт а) теоремы 2.5 доказан.

**Пример 2.33.** Предположим, что

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

— симметричная  $2 \times 2$  матрица.  $\mathbf{Q}$  положительно определена только тогда, когда  $q_{11} > 0$  и  $q_{11}q_{22} - q_{12}^2 > 0$ .

Если

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

— симметричная  $3 \times 3$  матрица, то  $\mathbf{Q}$  положительно определена, если  $q_{11} > 0$  и  $q_{11}q_{22} - q_{12}^2 > 0$  и  $\det \mathbf{Q} > 0$ . Этот пример иллюстрирует пункт б) теоремы в тех частных случаях, когда  $n = 2$  и  $n = 3$ .

---

## ГЛАВА 3 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

### 3.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе продолжим изложение некоторых положений математики, необходимых нам в дальнейшем. Основное внимание будет сосредоточено на таких понятиях как расстояние, сходимости векторных функций, дифференциальные уравнения и линейные системы. С целью полноты изложения привлечен математический аппарат высшего анализа. Все эти теоретические положения развиваются лишь в такой степени, чтобы читателю было доступно изучение последующих глав книги. Заинтересованный читатель может углубить свои знания в этой области с помощью следующих книг: [21], [25], [46], [51], [59], [124], [180], [192], [196], [205] и [212].

### РАССТОЯНИЕ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ПОНЯТИЯ

#### 3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Мы приступаем к изучению очень важного понятия о расстоянии и некоторых его следствий. Рассмотрим сначала интуитивное понятие расстояния и попытаемся абстрагировать его наиболее существенные элементы. Прежде всего заметим, что когда мы говорим о расстоянии, то всегда представляем его между двумя точками, например: расстояние между Нью-Йорком и Бостоном 208 миль. Во-вторых, отметим, что расстояние между двумя точками равно нулю, когда эти точки совпадают. Например, расстояние между Бостоном и Бостоном равно нулю миль. В-третьих, мы обычно рассматриваем расстояние между точками независимо от порядка, в котором эти точки называются, т. е. расстояние между Нью-Йорком и Бостоном то же самое, что между Бостоном и Нью-Йорком. И, наконец, интуитивное понятие расстояния триангулярно в том смысле, что если  $A$ ,  $B$  и  $C$  — три точки, то расстояние между  $A$  и  $C$  не превышает суммы расстояний между  $A$  и  $B$  и  $B$  и  $C$ . Например, расстояние между Нью-Йорком и Бостоном меньше, чем сумма расстояний между Нью-Йорком и Олбани и между Олбани и Бостоном. Эти сведения приводят нас к следующему строгому определению понятия расстояния.

**Определение 3.1.** Если  $X$  — некоторое множество, то функция  $d$ , принимающая лишь вещественные значения, определенная на всем множестве  $X \times X$ , называется функцией расстояния на  $X$ , если удовлетворяются следующие условия:

1)  $d(x, y) \geq 0$  для всех  $x, y$  из  $X$  и  $d(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;

2)  $d(x, y) = d(y, x)$  для всех  $x, y$  из  $X$ ;

3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  для всех  $x, y$  и  $z$  из  $X$ . Функцию  $d(x, y)$  мы часто будем называть расстоянием между  $x$  и  $y$  и именовать (3) неравенством треугольника. Множество  $X$  вместе с заданной функцией расстояния  $d$  на  $X$  называется метрическим пространством.

Если  $X$  — евклидово пространство с  $P$  в качестве внутреннего произведения (см. § 2.11 и 2.13), то мы можем определить расстояние, приняв

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_P = \sqrt{P(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})}, \quad (3.1)$$

где  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_P$  представляет собой норму  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  (см. § 2.13) и  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ . На основании первого и второго свойств нормы (§ 2.13) и свойства произведения  $P$  (§ 2.11) замечаем, что уравнение (3.1) действительно определяет расстояние на  $X$ . В частном случае, когда  $X$  есть пространство  $R_n$  и  $P$  — скалярное произведение на  $R_n$  [уравнение (2.86)], мы имеем

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} \quad (3.2)$$

или, что эквивалентно,

$$d\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (3.3)$$

Такую функцию расстояния будем называть натуральным, или евклидовым, расстоянием.

**Пример 3.1.** Если  $X = R$  есть множество вещественных чисел, то расстояние между  $x$  и  $y$ ,  $d(x, y)$  представляет собой абсолютное значение разности  $x - y$ , т. е.  $d(x, y) = |x - y|$ . Например,  $d(5, 3) = |5 - 3| = 2$ .

**Пример 3.2.** Если

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

то  $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| = \sqrt{5}$ ,  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 2\sqrt{6}$ ,  $d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| = 3$ .

Итак, получим  $\sqrt{5} < 2\sqrt{6} + 3$ ;  $2\sqrt{6} < \sqrt{5} + 3$ ;  $3 < \sqrt{5} + 2\sqrt{6}$ .

**Пример 3.3.** Если  $X$  — любое множество и мы зададим  $d(x, y) = 1$ , если  $x \neq y$  и  $d(x, x) = 0$  для  $x$  и  $y$  из  $X$ , то  $d$  будет функцией расстояния на  $X$ .

**Пример 3.4.** Предположим, что  $X = R_2$  и  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ , тогда функция  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , заданная как  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$  есть функция расстояния на  $R_2$ .

**Упражнение 3.1.** Покажите, что функция  $d$  примера 3.4 действительно есть функция расстояния на  $R_2$ . Обобщите это понятие расстояния на  $R_n$ . У к а з а н и е: в примере 3.4

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^2 |x_i - y_i|.$$

**Упражнение 3.2.** Если  $\max\{a, b\}$  обозначает наибольшую величину из  $a, b$ , то функция  $d$ , заданная как  $d\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ , есть расстояние на  $R_2$ . Докажите это и обобщите на  $R_n$ . У к а з а н и е:

$$d\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \max_{i=1,2} \{|x_i - y_i|\}.$$

### 3.3. СФЕРЫ И ПРЕДЕЛЫ

Пусть  $X$  — множество,  $d$  — расстояние на  $X$  и  $x_0$  — фиксированный элемент  $X$ . Часто интерес представляют точки, находящиеся в пределах заданного расстояния от фиксированной точки  $x_0$ . Если  $\rho > 0$  — вещественное число, то множество  $S(x_0, \rho)$ , определенное как

$$S(x_0, \rho) = \{x \in X : d(x_0, x) < \rho\}, \quad (3.4)$$

называется открытой сферой радиуса  $\rho$  вокруг  $x_0$ . Иными словами,  $S(x_0, \rho)$  — множество элементов из  $X$ , расстояние которых от  $x_0$  меньше, чем  $\rho$ .

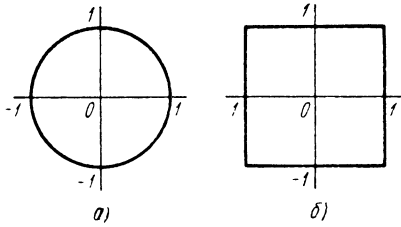


Рис. 3.1 а)  $S(0, 1)$  — внутренняя часть круга,  $\overline{S(0, 1)}$  — внутренняя часть круга вместе с окружностью, являющейся границей круга; б)  $S(0, 1)$  — внутренняя часть квадрата,  $\overline{S(0, 1)}$  — весь квадрат

Например, если  $X = R$  и мы используем натуральное расстояние на  $R$ , то  $S(0, 1) = \{r : |r| < 1\}$ . Отметим, что если  $\rho < \sigma$ , то  $S(x_0, \rho) \subset S(x_0, \sigma)$ .

**Пример 3.5.** Пусть  $X = R_2$  и  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Если использовать натуральное расстояние [уравнение (3.3)], то  $S(0, 1)$  есть множество  $\{x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  (см. рис. 3.1, а). Если использовать определение расстояния из упражнения 3.2, то

$$S(x_0, 1) = \left\{x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\right\} \text{ (см. рис. 3.1, б).}$$

Аналогичным образом, если  $\rho > 0$  — вещественное число, то множество  $\overline{S(x_0, \rho)}$ , определенное как

$$\overline{S(x_0, \rho)} = \{x \in X : d(x_0, x) \leq \rho\}, \quad (3.5)$$

называют замкнутой сферой радиуса  $\rho$  около  $x_0$ . Другими словами,  $\overline{S(x_0, \rho)}$  есть множество элементов из  $X$ , расстояние которых от  $x_0$  не превосходит  $\rho$ . Например, если  $X = R$  и мы будем использовать натуральное расстояние на  $R$ , то  $\overline{S(0, 1)} = \{r : |r| \leq 1\}$ . Причина использования терминов «открытое и замкнутое пространство» будет ясна из следующего параграфа.

Наконец, заметим, что в частном случае пространства  $R_n$  с расстоянием  $\|x - y\|$  имеем

$$S(x_0, \rho) = \{x \in R_n : \|x - x_0\| < \rho\} \quad (3.6a)$$

и

$$\overline{S(x_0, \rho)} = \{x \in R_n : \|x - x_0\| \leq \rho\}. \quad (3.6b)$$

Определив понятия открытой и замкнутой сферы с центром в некоторой точке, мы готовы к тому, чтобы сформулировать понятие сходимости. Предположим, что  $x_n, n = 1, 2, \dots$  есть последовательность элементов из  $X$ . Что означает утверждение: последовательность приближается к  $x_0$  (стремится или сходится к  $x_0$ )? Интуитивно мы рассматриваем последовательность как стремящуюся к  $x_0$ , если элементы  $x_n$  все больше приближаются к  $x_0$  по мере увеличения  $n$ .

**Определение 3.2. Сходимость.** Последовательность  $\{x_n: n = 1, 2, \dots\}$  называют сходящейся к  $x_0$ , если для любого действительного  $\varepsilon > 0$  существует  $N(\varepsilon)$  такое, что если  $n > N(\varepsilon)$ , то  $x_n$  окажется в  $S(x_0, \varepsilon)$ , т. е.  $d(x_0, x_n) < \varepsilon$  для всех  $n$  больших, чем  $N(\varepsilon)$ . Иначе говоря, если взять любую открытую сферу с центром в  $x_0$ , то, начиная с некоторого элемента, все остальные члены последовательности будут находиться внутри этой открытой сферы.

Часто пишут  $x_n \rightarrow x_0$  для обозначения следующего положения: « $x_n$  сходится к  $x_0$ ». Например, последовательность  $x_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$  в  $R$  сходится к 0. Легко видеть, что последовательность  $x_n$  сходится к  $x_0$  тогда и только тогда, когда последовательность вещественных чисел  $d(x_0, x_n)$  сходится к 0. В частном случае пространства  $R_n$  с расстоянием  $\|x - y\|$  последовательность  $x_n$  сходится к  $x_0$  тогда и только тогда, когда для  $\varepsilon > 0$  существует  $N(\varepsilon)$  такое, что  $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$  для всех  $n > N(\varepsilon)$ .

**Пример 3.6.** Точки  $x_n = \begin{bmatrix} 1/n \\ 1/n \end{bmatrix}$  в  $R_2$  сходятся к началу координат  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  в  $R_2$  по отношению к натуральному расстоянию на  $R_2$ , а также по отношению к расстояниям из упражнений 3.1 и 3.2.

**Пример 3.7.** Если  $X$  — любое множество и  $d$  — расстояние из примера 3.3 (т. е.  $d(x, y) = 1$  при  $x \neq y$  и  $d(x, x) = 0$  для  $x, y$  из  $X$ ), то последовательность  $x_n = x_0, n = 1, 2, \dots$  сходится к  $x_0$ .

**Определение 3.3. Предел последовательности.** Если последовательность  $x_n, n = 1, 2, \dots$  сходится к  $x_0$ , то  $x_0$  называют пределом последовательности и записывают это так:

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Посмотрим, может ли последовательность  $x_n, n = 1, 2, \dots$  иметь больше одного предела? Заметим сначала, что если  $x_0$  и  $y_0$  — два различных элемента из  $X$ , то  $d(x_0, y_0) = \rho > 0$  и, следовательно,  $S(x_0, \frac{\rho}{2})$  и  $S(y_0, \frac{\rho}{2})$  не пересекаются, т. е.  $S(x_0, \frac{\rho}{2}) \cap S(y_0, \frac{\rho}{2}) = \emptyset$  [см. (рис. 3.2)]. Для того чтобы  $x$  принадлежал одновременно  $S(x_0, \frac{\rho}{2})$

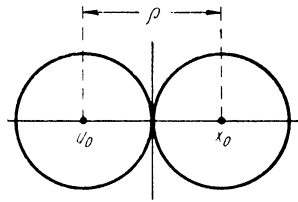


Рис. 3.2 Две открытые сферы  $S(x_0, \frac{\rho}{2})$  и  $S(y_0, \frac{\rho}{2})$  [см. уравнение (3.4)] не встречаются

и  $S(y_0, \frac{\rho}{2})$ , должно быть обеспечено условие  $d(x_0, y_0) = \rho \leq d(x_0, x) + d(x, y_0)$ , что приводит к противоречию  $\rho < \rho$  (почему?). Если положить  $\varepsilon = \frac{\rho}{2}$ , то нетрудно получить, что для  $n > N(\varepsilon)$   $x_n$  не принадлежит к  $S(y_0, \varepsilon)$ , и поэтому  $y_0$  не является пределом последовательности.

Наконец, предположим, что  $x_n, n = 1, 2, \dots$  есть последовательность элементов из  $R_n$ , и обозначим компоненты  $x_n$  через  $x_{ni}$ , т. е.

$$x_n = \begin{bmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,N} \end{bmatrix}.$$

Тогда  $N$ -мерный вектор  $\mathbf{x}$  с компонентами  $x_1, x_2, \dots, x_N$  есть предел последовательности  $\{\mathbf{x}_n\}$  только в том случае, если каждая величина  $x_i$  есть предел последовательности  $\{x_{n,i}\}$ . Иначе говоря,  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$  тогда и только тогда, когда

$$x_{n,i} \rightarrow x_i \text{ для всех } i. \quad (3.6\text{в})$$

Чтобы показать это, запишем

$$|x_{n,i} - x_i| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \leq \sum_{i=1}^N |x_{n,i} - x_i|, \quad (3.6\text{г})$$

так как

$$\begin{aligned} |x_{n,i} - x_i| &= \sqrt{|x_{n,i} - x_i|^2} = \sqrt{(x_{n,i} - x_i)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_{n,i} - x_i)^2} \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N |x_{n,i} - x_i|\right)^2} = \sum_{i=1}^N |x_{n,i} - x_i|. \end{aligned}$$

### 3.4. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

Предположим опять, что  $X$  — множество и  $d$  — расстояние на нем. В этом параграфе мы рассмотрим важные свойства, которыми могут обладать подмножества из множества  $X$ .

**Определение 3.4. Внутренняя точка.** Если  $A$  — подмножество из  $X$  и если  $x \in A$ , то говорят, что  $x$  есть внутренняя точка  $A$ , когда существует  $\rho > 0$  такое, при котором открытая сфера  $S(x, \rho)$  содержится в  $A$ , т. е.  $S(x, \rho) \subset A$ .

Например, если подмножество  $A$  само является открытой сферой ( $A = S(x_0, \rho)$ ), тогда любой элемент  $A$  есть внутренняя точка  $A$ .

**Упражнение 3.3.** Покажите, что если  $A = S(x_0, \sigma)$  и  $x \in A$ , то  $x$  есть внутренняя точка  $A$ . У к а з а н и е: рассматривайте открытую сферу  $S(x, \rho)$  с  $\rho = \sigma - d(x_0, x)$ .

**Пример 3.8.** Пусть  $X = R$ , с натуральным расстоянием  $d(r, s) = |r - s|$ , и пусть  $A$  — подмножество из  $X$ , заданное соотношением  $A = \{r : 0 < r \leq 1\}$ . Точка  $r = \frac{1}{2}$  есть внутренняя точка  $A$ , но точка  $r = 1$  таковой не является.

**Пример 3.9.** Пусть  $X$  — любое множество и  $d$  — функция расстояния из примера 3.3 (т. е.  $d(x, y) = 1$  при  $x \neq y$  и  $d(x, x) = 0$ ). Если  $A$  — любое подмножество из  $X$ , то каждый элемент  $A$  есть внутренняя точка  $A$ .

**Определение 3.5. Открытое множество.** Говорят, что  $A$  — открытое подмножество множества  $X$ , если каждый элемент  $A$  есть внутренняя точка  $A$ .

Иначе говоря,  $A$  открыто, если для каждого  $x$  из  $A$  существует  $\rho > 0$  (которое может зависеть от  $x$ ), такое, что  $S(x, \rho)$  содержится в  $A$ . Заметим, что открытая сфера является открытым подмножеством (упражнение 3.3). Если  $X = R$  и  $a, b$  — элементы  $R$ , причем  $a < b$ , то множество  $\{r : a < r < b\}$  открыто и называется открытым интервалом с концами  $a$  и  $b$ . Такое множество мы иногда будем обозначать  $(a, b)$ <sup>1</sup>, т. е.  $(a, b) = \{r \in R : a < r < b\}$ .

Если  $A_1$  и  $A_2$  открыты, то можно показать, что  $A_1 \cap A_2$  также открыто. Далее, если  $A_i, i = 1, 2, \dots$  открыты, нетрудно видеть, что  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  также открыто. Наконец, все пространство  $X$  и нулевое множество  $\emptyset$  также открыты.

**Упражнение 3.4.** Покажите, что если  $A_1$  и  $A_2$  открыты, то  $A_1 \cap A_2$  открыто. [У к а з а н и е: Если  $x \in A_1 \cap A_2$ , то существуют  $\rho_1 > 0$  и  $\rho_2 > 0$ , такие, при которых

<sup>1</sup> Нельзя путать с парой  $(a, b)$  в пространстве  $R \times R$ . Значение символа  $(a, b)$  всегда будет очевидно из контекста.

$S(x, \rho_1) \subset A_1$  и  $S(x, \rho_2) \subset A_2$ . Что представляет собой  $S(x, \rho_1) \cap S(x, \rho_2)$ ?]. Если множества  $A_1, A_2, \dots, A_n$  открыты, то является ли открытым множеством их пересечение  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ ? Является ли множество  $\left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} : x_1^2 + x_2^2 < 1 \text{ и } x_1 > 0 \right\}$  открытым в  $R_2$ ?

**Определение 3.6. Предельная точка.** Пусть  $B$  есть подмножество из  $X$  и  $x$  — элемент  $X$ . Будем говорить, что  $x$  — предельная точка  $B$ , если существует последовательность  $x_n, n = 1, 2, \dots$  элементов  $B$  ( $x_n \in B$  для  $n = 1, 2, \dots$ ), которая сходится к  $x$ .

Отметим, что  $x$ , будучи предельной точкой  $B$ , может и не быть элементом  $B$ . Например, если  $B$  — подмножество из  $R$ , заданное соотношением  $B = \{r : 0 < r \leq 1\}$ , то точка 0 является предельной точкой  $B$ , которая не принадлежит  $B$ , поскольку последовательность  $\frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$  элементов из  $B$  сходится к 0, который не является элементом  $B$ . Если  $y$  — любая точка из  $B$ , то  $y$  есть предельная точка  $B$ , так как последовательность  $x_n = y, n = 1, 2, \dots$  сходится к  $y$ .

**Определение 3.7. Замкнутое множество.** Будем говорить, что  $B$  — замкнутое подмножество из  $X$  (или, что  $B$  замкнуто), если каждая предельная точка принадлежит  $B$ .

Докажем теперь следующую теорему.

**Теорема 3.1.** Если  $A$  открыто, то  $X - A$  (дополнение  $A$ , см. § 2.3) замкнуто, и, наоборот, если  $B$  замкнуто, то  $X - B$  открыто.

**Доказательство.** Пусть  $A$  открыто и  $x \in A$ . Существует  $\rho > 0$ , такое, что  $S(x, \rho) \subset A$  и, следовательно,  $S(x, \rho)$  не встречается с  $X - A$ , т. е.  $S(x, \rho) \cap (X - A) = \emptyset$ . Ясно, что  $x$  не может быть предельной точкой  $X - A$ . Это доказывает, что все предельные точки  $X - A$  принадлежат  $X - A$ , т. е. что  $X - A$  замкнуто.

С другой стороны, предположим, что  $B$  замкнуто и  $x \in X - B$ . Рассмотрим открытые сферы  $S(x, \frac{1}{n})$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Докажем, что существует  $N$ , для которого  $S(x, \frac{1}{N}) \subset X - B$ . Если это не так, то каждая сфера  $S(x, \frac{1}{n})$  пересекается с  $B$  и существует  $x_n$  в  $S(x, \frac{1}{n}) \cap B$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Последовательность  $\{x_n\}, n = 1, 2, \dots$  сходится к  $x$ , так как  $m > n$  соответствует  $S(x, \frac{1}{m}) \subset S(x, \frac{1}{n})$  и так как для  $\rho > 0$  существует  $m$  такое, что  $\rho > \frac{1}{m}$ . Поскольку  $B$  закрыто и все  $x_n$  принадлежат  $B$ , получаем противоречие:  $x \in B$ . Итак, открытая сфера  $S(x, \frac{1}{N})$  содержится в  $X - B$  (для некоторого  $N$ ), и поэтому  $x$  есть внутренняя точка  $X - B$ . Следовательно,  $X - B$  открыто.

**Упражнение 3.5.** Покажите, что замкнутая сфера  $\overline{S(x_0, \rho)}$  есть замкнутое множество. У к а з а н и е: Если  $x_n, n = 1, 2, \dots$ , принадлежит  $\overline{S(x_0, \rho)}$  и  $\{x_n\}$  сходится к  $x$ , то  $d(x_n, x)$  сходится к 0, так как  $d(x_0, x) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, x) \leq \rho + d(x_n, x)$ .

Если  $B_1$  и  $B_2$  замкнуты, можно показать, что  $B_1 \cup B_2$  также замкнуто. Далее, если  $B_i, i = 1, 2, \dots$ , замкнуты, то  $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$  также замкнуто. Наконец, все пространство  $X$  замкнуто и нулевое пространство  $\emptyset$  также замкнуто.

Если  $X = R$  и  $a$  и  $b$  — элементы  $R$ , причем  $a < b$ , то множество  $\{r : a \leq r \leq b\}$  замкнуто и называется замкнутым интервалом с концами  $a$  и  $b$ . Такое множество мы иногда будем обозначать как  $[a, b]$ , т. е.  $[a, b] = \{r \in R : a \leq r \leq b\}$ . Мы будем также использовать обо-



значения  $[a, b]$  и  $(a, b]$  для множеств  $\{r : a \leq r < b\}$  и  $\{r : a < r \leq b\}$  соответственно. Резюмируя все это, получим

$$\left. \begin{aligned} (a, b) &= \{r : a < r < b\}; \\ [a, b] &= \{r : a \leq r \leq b\}; \\ [a, b) &= \{r : a \leq r < b\}; \\ (a, b] &= \{r : a < r \leq b\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Укажем, что множества  $[a, b)$  и  $(a, b]$  не являются ни открытыми, ни замкнутыми и часто называются полужамкнутыми или полуоткрытыми интервалами.

Предположим, что  $C$  — подмножество из  $X$ . Дадим определения трех подмножеств из  $X$ , которые называются внутренней частью, замыканием и границей  $C$ .

**Определение 3.8. Внутренняя часть.** Если дано множество  $C$ , то его внутренней частью, обозначаемой  $i(C)$ , является множество всех внутренних точек  $C$ , т. е.

$$i(C) = \{x : \text{существует } \rho > 0, \text{ такое при котором } S(x, \rho) \subset C\}. \quad (3.8)$$

Заметим, что  $A$  открыто в том и только в том случае, если оно совпадает со своей внутренней частью [иначе говоря,  $i(A) = A$ ]. Например, внутренней частью  $[a, b)$  является открытый интервал  $(a, b)$ .

**Определение 3.9. Замыкание множества.** Замыканием данного множества  $C$ , обозначаемым  $c(C)$  (или  $\bar{C}$ ), является множество всех предельных точек  $C$ :

$$c(C) = \{x : \text{существует последовательность } x_n, \\ n = 1, 2, \dots, \text{ такая, что } x_n \text{ сходится к } x\}. \quad (3.9)$$

Можно показать (упражнение 3.6), что  $c(C)$  есть замкнутое множество. Далее, множество  $B$  замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием, т. е.  $B = c(B)$ . Например, замыкание интервала  $[a, b)$  есть замкнутый интервал  $[a, b]$ .

**Определение 3.10. Граница множества.** Границей данного множества  $C$ , обозначаемой  $b(C)$ , называется множество предельных точек  $C$ , которые не являются внутренними точками  $C$ :

$$b(C) = c(C) - i(C). \quad (3.10)$$

Можно показать, что граница  $C$ ,  $b(C)$  есть замкнутое множество. Действительно,

$$b(C) = c(C) \cap c(X - C). \quad (3.11)$$

Иными словами, граница  $C$  есть пересечение замыкания  $C$  с замыканием  $X - C$ . Например, границей множества  $[a, b)$  является множество, состоящее из двух точек  $a$  и  $b$ .

**Пример 3.10.** Множество  $C$  на  $R_2$  задано как  $C = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1^2 + x_2^2 < 1 \text{ или } x_1 = 2, x_2 = 3 \right\}$  (рис. 3.3). Иначе говоря,  $C = S(0, 1) \cup \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ <sup>1</sup>. Тогда  $i(C) = S(0, 1)$ ;  $c(C) = \overline{S(0, 1)} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$  и  $b(C) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ или } x_1 = 2, x_2 = 3 \right\}$ . Отметим, что среди четырех множеств  $C$ ,  $i(C)$ ,  $c(C)$  и  $b(C)$  тождественных множеств нет.

<sup>1</sup> Где  $\{(2, 3)\}$  есть множество, состоящее из одной точки  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

**Упражнение 3.6.** Докажите, что  $c(C)$  замкнуто. **У к а з а н и е:** Предположим, что  $x \in c\{c(C)\}$ ; тогда существует последовательность  $y_n, y_n \in c(C)$ , которая сходится к  $x$ . Но  $y_n \in c(C)$  означает, что существует  $x_n$  в  $C$  с  $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ . Покажите, что последовательность  $x_n$  сходится к  $x$ .

**Пример 3.11.** Пусть  $X = R$  и  $C$  — множество всех рациональных чисел,  $C = \{r \in R; r = \frac{p}{q}, \text{ где } p \text{ и } q \text{ — целые числа}\}$ . Тогда  $i(C)$  пусто,  $c(C)$  есть вся линия  $R$  и  $b(C)$  также вся линия  $R$ .

Понятия, которые мы рассмотрели, могут быть несколько обобщены. По сути дела, мы говорили о метрических пространствах и о том, что называется топологией. Общее понятие топологии и топологического пространства основано скорее на понятии открытых множеств, чем на понятии расстояния. Эти более общие идеи можно найти в работе [196].

### 3.5. ПОЛНОТА И СЖАТИЕ

Предположим, что  $X$  есть множество с функцией расстояния  $d$  и что  $x_n, n = 1, 2, \dots$  — последовательность, сходящаяся к  $x_0$ . Для  $\epsilon > 0$  существует  $N(\frac{\epsilon}{2})$  такое, что если  $n > N(\frac{\epsilon}{2})$ , то  $d(x_0, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ . Из неравенства треугольника

(определение 3.1) следует, что если  $n, m > N(\frac{\epsilon}{2})$ , то  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ . Это свойство сходящихся последовательностей весьма важно и приводит к следующему.

**Определение 3.11. Равномерная сходимость.** Последовательность  $y_n, n = 1, 2, \dots$ , элементов из  $X$  независимо от того, принадлежит ее предел к  $X$  или нет, называется равномерно сходящейся, если для каждого  $\epsilon > 0$  существует  $N(\epsilon)$  такое, что если  $n$  и  $m$  превосходят  $N(\epsilon)$ , т. е.  $n > N(\epsilon), m > N(\epsilon)$ , то  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ . Если каждая последовательность в  $X$  равномерно сходится к элементу из  $X$ , то говорят, что множество  $X$  является полным. Например, евклидово пространство  $R_n$  с евклидовой функцией расстояния является полным<sup>1</sup>.

**Пример 3.12.** Пусть  $X = (0, 1]$  и  $d(x, y) = |x - y|$  для  $x, y$  в  $(0, 1]$ . Последовательность  $x_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ , сходится равномерно в  $X$ , но ее предел не принадлежит  $X$ . Иначе говоря, множество  $X = (0, 1]$  не является полным.

**Упражнение 3.7.** Докажите, что если  $X = [1, 2)$ , причем  $d(x, y) = |x - y|$  для  $x, y$  из  $[1, 2)$ , то  $X$  не является полным.

**Определение 3.12. Сжатие.** Пусть  $X$  — полное множество и  $T$  — преобразование (функция)  $X$  в себя, т. е.  $T$  — функция, область существования которой — все множество  $X$  и область изменения содержится в  $X$ . Если существует вещественное число  $k, 0 \leq k < 1$ , такое, что для всех  $x, y$  из  $X$  справедливо

$$d\{T(x), T(y)\} \leq kd(x, y), \quad (3.12)$$

<sup>1</sup> Действительно,  $R_n$  полно по отношению к функциям расстояния  $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$  (евклидово расстояние);  $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$  и  $d(x, y) = \max\{|x_i - y_i|\}$ .

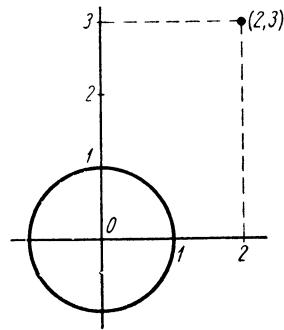


Рис. 3.3. Множество  $C$  состоит из внутренней части круга и точки  $(2, 3)$ . Внутренней частью множества  $i(C)$  является внутренняя часть круга; границей  $b(C)$  — граница круга (окружность) и точка  $(2, 3)$ ; замыканием  $(C)$  — весь круг и точка  $(2, 3)$ .

то преобразование  $T$  называют сжатием на  $X$ . Иначе говоря,  $T$  есть сжатие, если  $T$  уменьшает расстояние между точками. Отметим, что число  $k$  в уравнении (3.12) не зависит от  $x$  и  $y$ .

**Пример 3.13.** Пусть  $X$  — закрытый интервал  $[0, 1]$  с  $d(x, y) = |x - y|$  для  $x, y$  из  $[0, 1]$  и пусть  $f$  — преобразование  $[0, 1]$  в себя, заданное как  $f(x) = \frac{x^2}{3}$ . Тогда  $|f(x) - f(y)| = \frac{|x^2 - y^2|}{3} \leq \frac{|x + y| |x - y|}{3} \leq \frac{2}{3} |x - y|$ , и  $f$  есть сжатие на  $[0, 1]$ .

**Пример 3.14.** Пусть  $X = R_n$  и  $\mathfrak{U}$  — линейное преобразование  $R_n$  в себя, заданное как  $\mathfrak{U}(v) = Av$ , где  $A = (a_{ij})$  есть  $n \times n$  матрица и  $v \in R_n$  [см. уравнение (2.51)]. Предположим также, что  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = k < 1$ ; в этом случае  $\mathfrak{U}$  есть сжатие.

Если  $v, w \in R_n$ , то

$$d(Av, Aw) = \|Av - Aw\| = \|A(v - w)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}(v_j - w_j) \right\}^2}.$$

В силу неравенства Шварца [уравнения (2.87) или (2.91)]

$$d(Av, Aw) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \|v - w\|.$$

Следовательно,  $d(Av, Aw) \leq kd(v, w)$ .

Таким образом,  $\mathfrak{U}(v)$  есть сжатие. Например, при  $n = 2$  и  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

имеем  $a_{11}^2 = \frac{1}{3}$ ;  $a_{12}^2 = \frac{1}{24}$ ;  $a_{21}^2 = \frac{1}{24}$ ;

$$a_{22}^2 = \frac{1}{3}; \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 = \frac{3}{4} = k < 1.$$

Следовательно, преобразование  $\mathfrak{U}$ , заданное как  $\mathfrak{U}(e_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ ,  $\mathfrak{U}(e_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$  (где  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ), является сжатием.

Докажем теперь важную теорему, которая показывает, как сжатие может быть связано с решением уравнений.

**Теорема 3.2.** Если  $T$  есть сжатие на  $X$ , то существует единственный элемент  $x^* \in X$ , такой что

$$T(x^*) = x^*. \quad (3.13)$$

Более того, если  $x_1$  — произвольный элемент  $X$  и если  $x_2 = T(x_1)$ ,  $x_3 = T(x_2)$ , ...,  $x_n = T(x_{n-1})$ , то последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $x^*$ .

**Доказательство.** Прежде всего докажем, что такой элемент  $x^*$  должен быть единственным. Предположим, что  $x^*$  и  $y^*$  — два элемента из  $X$ , удовлетворяющие уравнению (3.13), т. е.  $T(x^*) = x^*$  и  $T(y^*) = y^*$ . Тогда  $d[T(x^*), T(y^*)] \leq kd(x^*, y^*)$ , поскольку  $T$  — сжатие и, следовательно,  $d(x^*, y^*) \leq kd(x^*, y^*)$ , что при любом  $k$ ,  $0 \leq k < 1$  справедливо лишь в случае  $d(x^*, y^*) = 0$ . Следовательно,  $x^* = y^*$ .

Докажем теперь, что существует элемент  $x^*$ , удовлетворяющий уравнению (3.13). Пусть  $x_1$  — любой элемент из  $X$ ,  $x_2 = T(x_1)$ ,  $x_3 = T(x_2)$  и вообще

$$x_n = T(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  сходится равномерно. Если  $\varepsilon > 0$ , то существует  $N(\varepsilon)$  такое, что если  $n > N(\varepsilon)$ , то

$$k^{n-1}d(x_1, x_2) \left\{ \frac{1}{1-k} \right\} < \varepsilon. \quad (3.15)$$

Предположим, что  $n, m > N(\varepsilon)$  (положим, что  $m \geq n$ ), тогда

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d[T(x_{n-1}), T(x_{m-1})] \leq kd[T(x_{n-2}), T(x_{m-2})] \leq \\ &\leq k^{n-1}d[x_1, T(x_{m-n-1})] \leq k^{n-1}\{d(x_1, x_2) + d(x_1, x_3) + \dots + d(x_1, x_{m-n})\} \leq \\ &\leq k^{n-1}d(x_1, x_2)\{1 + k + k^2 + \dots + k^{m-n-1}\} \leq \\ &\leq k^{n-1}d(x_1, x_2) \left\{ \frac{1}{1-k} \right\} < \varepsilon \end{aligned} \quad (3.16)$$

[по неравенству (3.15)]. Другими словами, последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  сходится равномерно и, следовательно, имеет пределом  $x^*$  (так как  $X$  — полное множество).

Мы убедились, что  $T(x^*) = x^*$ . Рассмотрим последовательность  $y_n = T(x_n) = x_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ясно, что  $y_n$  сходится к  $x^*$ , и мы покажем, что  $y_n$  сходится к  $T(x^*)$ . Это и обоснует сформулированную нами теорему. Так как  $x^*$  — предел последовательности  $\{x_n\}$ , для  $\varepsilon > 0$  существует  $N(\varepsilon)$  такое, что если  $n > N(\varepsilon)$ , то  $x_n$  принадлежит к  $S(x^*, \varepsilon)$ , т. е.  $d(x^*, x_n) < \varepsilon$ . Следовательно,  $d[T(x^*), T(x_n)] = d[T(x^*), y_n] \leq kd(x^*, x_n) < \varepsilon$  и  $y_n$  принадлежит к  $S(T(x^*), \varepsilon)$  для всех  $n > N(\varepsilon)$ . Таким образом, мы показали, что  $y_n$  сходится к  $T(x^*)$ .

Эту теорему мы используем в дальнейшем для доказательства теоремы существования решения дифференциальных уравнений.

## СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ В $R_n$

### 3.6. КОМПАКТНОСТЬ

В этом и следующем параграфах мы будем рассматривать исключительно евклидово пространство  $R_n$  с натуральным расстоянием  $d$  на  $R_n$ . [см. уравнение (3.2)].

**Определение 3.13. Ограниченное множество.** Предположим, что  $S$  есть подмножество из  $R_n$ . Будем говорить, что  $S$  ограничено, если<sup>1</sup> имеется конечное  $\rho > 0$ , при котором  $S$  заключено в сфере  $S(0, \rho)$  радиуса  $\rho$  с центром в начале координат.

**Определение 3.14. Компактность.** Пусть  $S$  есть подмножество из  $R_n$ . Если множество  $S$  замкнуто и ограничено, то говорят, что  $S$  есть компактное подмножество из  $R_n$  (или что  $S$  компактно).

Например, замкнутый интервал  $[0, T]$ ,  $T > 0$  есть компактное подмножество множества  $R = R_1$ .

Компактные множества обладают различными свойствами, которые можно использовать для определений компактности и которые часто полезны при доказательствах теорем, связанных с компактными множествами. Эти свойства могут быть записаны так:

1)  $S$  компактно, если  $S$  замкнуто и ограничено;

2)  $S$  компактно, если для любого заданного набора открытых мно-

жеств  $A_1, A_2, \dots$ , таких, что  $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , существует конечный набор чисел  $n_1, n_2, \dots, n_N$ , при которых  $S \subset A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \dots \cup A_{n_N}$ <sup>1</sup>. Это утверждение часто называют свойством Гейне—Бореля;

<sup>1</sup> Это утверждение часто формулируют следующим образом: множество является замкнутым, если найдется конечная система открытых множеств, которые целиком покрывают это множество. В нашей литературе это утверждение именуется леммой о конечном покрытии. (Прим. ред.).

3)  $C$  компактно, если  $B_1, B_2, \dots$  — любой набор закрытых множеств, причем  $C \cap \left( \bigcap_{j=1}^n B_j \right) \neq \emptyset$  для каждого  $n$ , то  $C \cap \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \right) \neq \emptyset$  (это утверждение часто называют свойством конечного числа пересечений);

4)  $C$  компактно, если для любой заданной последовательности  $x_n, x_{n_2}, \dots$ , которая сходится к элементу из  $C$  (это утверждение иногда называют свойством Больцано—Вейерштрасса). Можно показать, что если подмножество  $C$  из  $R_n$  обладает хотя бы одним из этих свойств, то оно обладает и всеми остальными [51], [196].

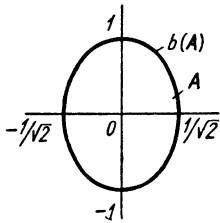


Рис. 3.4. Замыкание  $c(A)$  и граница  $b(A)$  ограниченного открытого множества  $A$  являются компактными подмножествами из  $R_2$

**Пример 3.15.** Если  $x$  — элемент из  $R_n$  и  $\rho > 0$ , то замкнутая сфера  $S(x, \rho)$  компактна, а открытая сфера  $S(x, \rho)$  — нет. Действительно, если  $A$  есть ограниченное подмножество из  $R_n$ , то замыкание  $A$ ,  $c(A)$  [уравнение (3.9)] компактно и граница  $b(A)$  также компактна. Например, если  $A$  — подмножество из  $R_2$ , определенное как  $A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : 2x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}$ , то  $c(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : 2x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$  и  $b(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : 2x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$  — суть компактные подмножества из  $R_2$  (рис. 3.4).

### 3.7. ГИПЕРПЛОСКОСТИ И КОНУСЫ

Рассмотрим два специальных класса подмножеств эвклидова пространства, чтобы подойти к изучению в следующем параграфе понятия выпуклости.

Грубо говоря, гиперплоскость в  $R_n$  аналогична линии на плоскости  $R_2$  и может рассматриваться как подпространство размерности  $(n - 1)$  пространства  $R_n$ . Более строго это можно сформулировать в виде:

**Определение 3.15.** Гиперплоскость в  $R_n$ . Пусть  $L(x)$  — функция на  $R_n$ , принимающая только вещественные значения и определяемая в виде

$$L(x) = \langle a, x \rangle - b = \left\langle \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\rangle - b = \sum_{i=1}^n a_i x_i - b, \quad (3.17)$$

где  $a$  — заданный ненулевой элемент из  $R_n$  и  $b$  — заданное вещественное число.

Тогда подмножество  $L$  из  $R_n$ , заданное как

$$L = \left\{ x : L(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i - b = 0 \right\}, \quad (3.18)$$

называют гиперплоскостью в  $R_n$ .

Например, множество  $L$  из  $R_3$ , имеющее вид

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 - \sqrt{2} = 0 \right\},$$

есть гиперплоскость в  $R_3$ .

Примем, что

$$L^+ = \left\{ \mathbf{x} : L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i - b > 0 \right\} \quad (3.19)$$

и

$$L^- = \left\{ \mathbf{x} : L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i - b < 0 \right\}. \quad (3.20)$$

$L^+$  и  $L^-$  называют открытыми полупространствами, определенными  $L$ . Заметим, что  $L^+$  и  $L^-$  — суть открытые множества и что  $R_n = L^+ \cup L \cup L^-$ . Иногда мы будем называть множества  $L^+ \cup L$  и  $L^- \cup L$  замкнутыми полупространствами, определенными  $L$ . Легко видеть, что  $L^+ \cup L$  есть замыкание для  $L^+$ , что  $L^- \cup L$  — замыкание для  $L^-$  и  $L$  есть граница как для  $L^+$ , так и для  $L^-$  (рис. 3.5).

Если  $A$  и  $B$  — два любых подмножества из  $R_n$ , то говорят, что гиперплоскость  $L$  разделяет  $A$  и  $B$ , если  $A$  содержится целиком в одном закрытом полупространстве, определенном  $L$ , и  $B$  содержится целиком в другом закрытом полупространстве, определенном  $L$ , т. е. если

$$A \subset L^+ \cup L \text{ и } B \subset L^- \cup L \quad (3.21a)$$

или

$$A \subset L^- \cup L \text{ и } B \subset L^+ \cup L. \quad (3.21б)$$

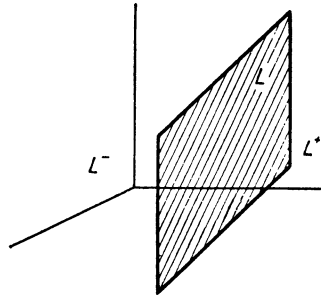


Рис. 3.5. Гиперплоскость  $L$  и полупространства  $L^+$  и  $L^-$

Если окажется, что  $A$  содержится целиком в одном открытом полупространстве, определенном  $L$ , а  $B$  — в другом, то говорят, что  $L$  строго разделяет  $A$  и  $B$ . Например, в  $R_3$  гиперплоскость  $x_1 - 1 = 0$  разделяет

множество  $\overline{S(0, 1)}$  и  $S\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 1\right)$  и строго разделяет множества  $S(0, 1)$

и  $S\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 1\right)$ .

Пусть  $L$  — гиперплоскость в  $R_n$  и  $A$  — подмножество из  $R_n$ . Очевидно, что  $L$  или имеет элементы с замыканием  $A$ , т. е.  $L \cap c(A) \neq \emptyset$ , или  $L$  не имеет общих элементов с замыканием  $c(A)$ , т. е.  $L \cap c(A) = \emptyset$ . Если  $L$  имеет общие точки с замыканием  $c(A)$ , то должно удовлетворяться одно из трех условий:

- 1)  $L$  содержит  $A$  или  $A \subset L$ ;
  - 2) оба множества  $L^+ \cap A$  и  $L^- \cap A$  не являются пустыми;
  - 3)  $L$  не содержит  $A$ , и  $A$  содержится или в  $L^+ \cup L$ , или в  $L^- \cup L$ ;
- т. е. либо  $L^+ \cap A$ , либо  $L^- \cap A$  является пустым.

Если  $L$  удовлетворяет условию 2, говорят, что  $L$  пересекает  $A$ ; если удовлетворяется условие 3, то говорят, что  $L$  есть плоскость, опорная к  $A$ .

**Пример 3.16.** Пусть  $A$  — подмножество из  $R_3$ , определенное как

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0 \right\}.$$

Гиперплоскость  $x_3 - 1 = 0$  не имеет общих точек с замыканием  $A$ ; гиперплоскость  $x_3 = 0$  содержит  $A$ ; гиперплоскость  $x_1 - x_2 = 0$  пересекает  $A$  и гиперплоскость  $x_1 + x_2 +$

$+x_3 - \sqrt{2} = 0$  является опорной к  $A$  (соприкасается с замыканием  $A$  в точке  $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x_3 = 0$ ) (рис. 3.6).

**Пример 3.17.** Пусть  $A$  — подмножество  $S(0, 1)$  из  $R_2$ , т. е.  $A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}$ . Если  $L$  — прямая в  $R_2$  (иначе говоря,  $L$  — гиперплоскость в  $R_2$ ),

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : a_1 x_1 + a_2 x_2 - b = 0 \right\}.$$

то возможны три случая: а)  $L \cap A = \emptyset$ ; б)  $L$  пересекает  $A$  и в)  $L$  является касательной

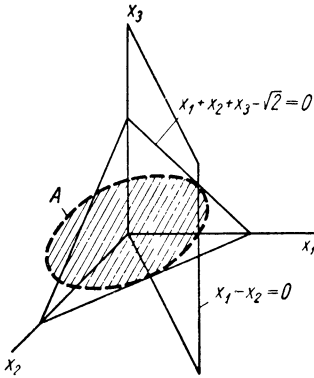


Рис. 3.6. Множества из примера 3.16

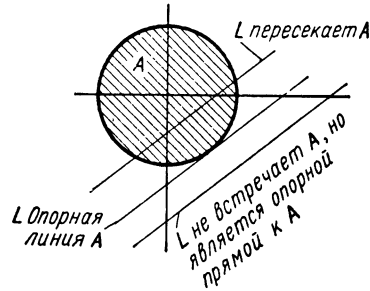


Рис. 3.7. Три возможных варианта расположения прямой  $L$  относительно области  $A$

к  $A$ , т. е.  $L \cap c(A)$  состоит из одной точки на границе  $A$  (рис. 3.7). Прямые, удовлетворяющие условиям а) или в), являются прямыми, опорными к  $A$ .

Этот параграф мы завершим определениями отрезка, луча и конуса.

**Определение 3.16.** Пусть  $x$  и  $y$  — два элемента из  $R_n$ . Отрезком прямой, соединяющим  $x$  и  $y$ , является подмножество из  $R_n$ , определяемое соотношением

$$\{z \in R_n : z = rx + sy, r \geq 0, s \geq 0, r + s = 1\}, \quad (3.22a)$$

и лучом, соединяющим  $x$  с  $y$  и

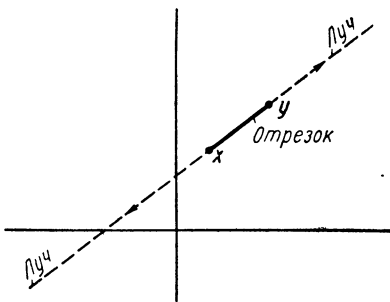


Рис. 3.8. Отрезок прямой, соединяющий точки  $x$  и  $y$  и два луча, определяемых этими точками

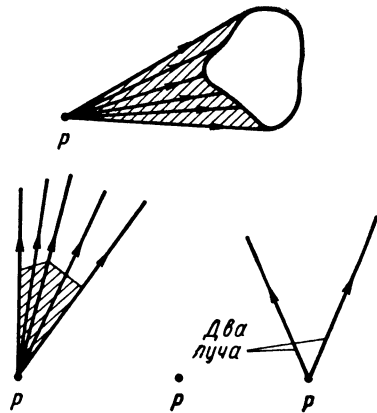


Рис. 3.9. Конусы с вершиной  $P$

исходящим из  $x$ , является подмножество, задаваемое соотношением

$$\{z \in R_n : z = x + r(y - x), r \geq 0\}. \quad (3.22б)$$

Заметим, что отрезок, соединяющий  $x$  и  $y$ , совпадает с отрезком, соединяющим  $y$  с  $x$ . Но луч, соединяющий  $x$  с  $y$  и исходящий из  $x$ , отличается от луча, соединяющего  $y$  с  $x$  и исходящего из  $y$  (рис. 3.8).

**Определение 3.17. Конусы.** Подмножество  $K$  из  $R_n$  называется конусом с вершиной  $x_0$ , если для любой точки  $x$  в  $K$ ,  $x \neq x_0$ , все точки луча, соединяющего  $x_0$  с  $x$  и исходящего из  $x_0$ , принадлежат  $K$ .

Различные примеры конусов иллюстрируются рис. 3.9.

### 3.8. ВЫПУКЛОСТЬ

Обратимся к очень важному свойству, а именно, к выпуклости. Подмножество из  $R_n$  выпукло, если отрезок прямой, соединяющий две любые точки этого множества, принадлежит множеству. Более точное определение приведено ниже.

**Определение 3.18. Выпуклость.** Подмножество  $A$  из  $R_n$  выпукло, если для любых  $x$  и  $y$  из  $A$  и  $r \geq 0$ ,  $s \geq 0$  из  $R$ ,  $r + s = 1$ , точка  $rx + sy$  принадлежит  $A$ .

Например, открытая сфера  $S(0, \rho)$  из  $R_n$  выпукла, так как из  $\|x\| < \rho$ ,  $\|y\| < \rho$  можно заключить, что  $\|rx + sy\| \leq \|rx\| + \|sy\| = r\|x\| + s\|y\| < r\rho + s\rho = \rho$ , если  $r \geq 0$ ,  $s \geq 0$  и  $r + s = 1$ .

**Пример 3.18.** В пространстве  $R_3$  множество

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1 \right\} \text{ (куб)}$$

выпукло;  
множество

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \right\} \text{ (плоскость)}$$

также выпукло. Любой отрезок прямой или луч выпуклы.

**Пример 3.19.** Множество точек  $A$  из  $R_2$ , заданное в виде  $A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, (x_1^{2/3} + x_2^{2/3})^{3/2} \leq 1 \right\}$ , не является

выпуклым (рис. 3.10). Множество точек  $K$  на  $R_2$ , заданное в виде  $K = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \text{один из } x_1 = 0 \text{ или } x_2 = 0 \right\}$ , не является выпуклым, хотя и представляет собой конус с вершиной  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

**Пример 3.20.** Если  $a$  и  $b$  — элементы из  $R$ , причем  $a < b$ , то интервалы  $(a, b)$ ,  $[a, b)$  и  $(a, b]$  выпуклы.

**Упражнение 3. 8.** Докажите, что закрытая сфера  $\overline{S(0, \rho)}$  в  $R_n$  выпукла.

**Упражнение 3.9.** Докажите, что интервалы  $[0, 2]$  и  $[4, 5]$  выпуклы, а  $[0, 2] \cup [4, 5]$  — нет.

**Определение 3.19. Выпуклый конус.** Конус  $K$  в  $R_n$ , если он является выпуклым множеством, часто называют выпуклым конусом. Заметим, что не каждый конус является выпуклым (см. пример 3.19). Выпуклые конусы будут рассматриваться в гл. 5 и 6.

**Определение 3.20. Выпуклая комбинация.** Предположим, что  $x_1, x_2, \dots, x_N$  —  $N$  элементов евклидова пространства  $R_n$ . Будем говорить, что  $x$  есть выпуклая комбинация элементов  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , если существуют вещественные числа  $r_1, r_2, \dots, r_N$ , такие, что

$$x = \sum_{i=1}^N r_i x_i, \tag{3.23}$$

$$r_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^N r_i = 1.$$

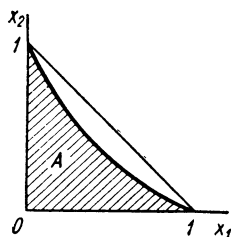


Рис. 3.10. Множество  $A$  не является выпуклым. Выпуклая оболочка  $A$  представляет собой треугольник



Если  $A$  — выпуклое подмножество из  $R_n$  и  $x_1, x_2, \dots, x_N$  — элементы  $A$ , то любая выпуклая комбинация из  $x_i$  принадлежит к  $A$ . Так как  $A$  выпукло, то это утверждение справедливо согласно определению для случая  $N = 2$ . С помощью индукции распространим его на  $N$  элементов. Полагая, что это утверждение справедливо для  $N - 1$ , предположим, что  $x = \sum_{i=1}^N r_i x_i$  есть выпуклая комбинация  $x_i$ . Можно считать, что  $r_N \neq 1$ , в этом случае

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{N-1} = 1 - r_N \neq 0, \quad (3.24)$$

следовательно,

$$x = (r_1 + r_2 + \dots + r_{N-1}) \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r_i}{r_1 + r_2 + \dots + r_{N-1}} x_i \right\} + r_N x_N. \quad (3.25)$$

Но выражение в скобках (3.25) представляет собой элемент  $A$  согласно допущению, сделанному по индукции; поэтому из-за выпуклости  $A$   $x$  принадлежит  $A$ .

**Определение 3.21. Выпуклая оболочка.** Пусть  $B$  — любое подмножество из  $R_n$  и  $\text{co}(B)$  обозначает множество всех выпуклых комбинаций элементов из  $B$ , т. е.

$$\text{co}(B) = \{x: \text{существуют элементы } x_1, x_2, \dots, x_N^1 \text{ в } B, \text{ такие, что } x \text{ есть выпуклая комбинация } x_i\}; \quad (3.26)$$

$\text{co}(B)$  называется выпуклой оболочкой  $B$ . Заметим, что множество  $B$  выпукло в том случае, если оно совпадает со своей наименьшей выпуклой оболочкой, т. е.  $B = \text{co}(B)$ . Действительно, выпуклая оболочка есть наименьшее выпуклое множество, содержащее  $B$ .

**Упражнение 3.10.** Покажите, что множество  $\text{co}(B)$  выпукло. *У к а з а н и е:* предположите сперва, что

$$x = \sum_{i=1}^N r_i x_i \text{ и } y = \sum_{i=1}^N s_i x_i \text{ принадлежат } \text{co}(B) \text{ и } rx + sy = \sum_{i=1}^{N-1} (rr_i + ss_i) x_i + \left\{ r \left( 1 - \sum_{i=1}^{N-1} r_i \right) + s \left( 1 - \sum_{i=1}^{N-1} s_i \right) \right\} x_N.$$

Затем надо показать, что если

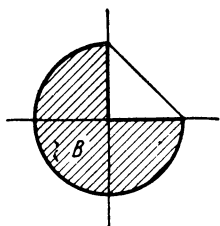
$$x = \sum_{i=1}^N r_i x_i; \quad y = \sum_{j=1}^M s_j y_j \text{ и } z_1 = x_1, \dots, z_N = x_N, z_{N+1} = y_1, \dots, z_{N+M} = y_M, \text{ то}$$

$$x = \sum_{i=1}^N r_i z_i + \sum_{N+1}^{N+M} 0 z_j; \quad y = \sum_{i=1}^N 0 \cdot z_i + \sum_{N+1}^{N+M} s_j z_{N+j}.$$

**Пример 3.21.** Предположим, что  $B$  есть множество из примера 3.19, а именно:

$$B = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, (x_1^{2/3} + x_2^{2/3})^{3/2} \leq 1\}.$$

Рис. 3.11. Выпуклая оболочка области  $B$  есть сама область  $B$  и треугольник



В этом случае выпуклая оболочка определяется как  $\text{co}(B) = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$  (см. рис. 3.10).

**Пример 3.22.** Пусть  $B = B_1 \cup B_2$ , где

$$B_1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \leq 0\} \text{ и } B_2 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_2 \leq 0\},$$

иначе говоря, состоит из трех квадрантов окружности единичного радиуса, как показано на рис. 3.11. Тогда выпуклая оболочка  $B$ ,  $\text{co}(B)$  будет иметь вид

$$\text{co}(B) = B \cup \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

<sup>1</sup>  $N$  может зависеть и от  $x$ .

Сформулируем и докажем несколько важных теорем относительно выпуклых множеств в  $R_n$ .

**Теорема 3.3.** Если  $A$  — выпуклое подмножество из  $R_n$ , то замыкание  $A$ ,  $c(A)$  [уравнение (3.9)] также выпукло.

**Доказательство.** Предположим, что  $x, y$ , — элементы  $c(A)$ , а  $r, s$  — элементы из  $R$ ,  $r > 0$  и  $s > 0$  и  $r + s = 1$ . Покажем, что  $rx + sy$  принадлежит к  $c(A)$ , т. е. найдем последовательность элементов  $\{z_n\}$  из  $A$ , которая сходится к  $rx + sy$ . Поскольку  $x$  и  $y$  принадлежат  $c(A)$ , существуют последовательности  $x_n$  и  $y_n$  элементов из  $A$ , такие, что  $x_n$  сходится к  $x$  и  $y_n$  сходится к  $y$ . Выберем  $z_n = rx_n + sy_n$ . Прежде всего  $z_n$  принадлежит  $A$ , так как  $A$  выпукло. Покажем теперь, что  $z_n$  сходится к  $rx + sy$ . Если  $\varepsilon > 0$ , то существует  $M(\varepsilon)$  такое, что если  $n > M(\varepsilon)$ , то  $\|x_n - x\| < \varepsilon$  и  $\|y_n - y\| < \varepsilon$ . Следовательно, для всех  $n > M(\varepsilon)$  имеем

$$\begin{aligned} \|rx_n + sy_n - (rx + sy)\| &= \|r(x_n - x) + s(y_n - y)\| \leq \\ &\leq r\|x_n - x\| + s\|y_n - y\| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Отсюда видно, что последовательность  $z_n$  сходится к  $rx + sy$ . Это и доказывает теорему.

**Теорема 3.4.** Если  $A$  — выпуклое подмножество из  $R_n$ , то  $i(A)$  [внутренняя часть  $A$ , уравнение (3.8)] является либо выпуклым, либо пустым множеством.

Действительно, если  $A$  выпукло и  $i(A)$  не «пусто», справедливо следующее утверждение. Если даны две точки  $x$  и  $y$  в  $A$ , причем  $y$  принадлежит  $i(A)$ , то любая точка отрезка прямой между  $x$  и  $y$  (за исключением, возможно, лишь самой точки  $x$ ) есть внутренняя точка  $A$  (см. рис. 3.12).

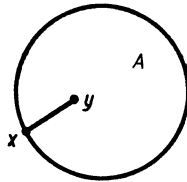


Рис. 3.12. Любая точка отрезка, соединяющего  $x$  и  $y$ , за исключением, возможно, точки  $x$ , является внутренней точкой выпуклого множества  $A$

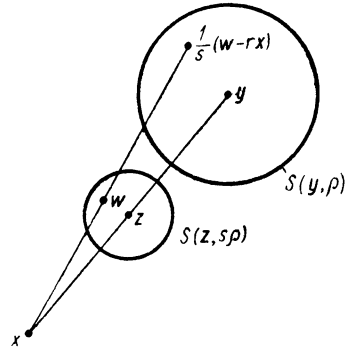


Рис. 3.13. К доказательству теоремы 3.4

**Доказательство.**

Так как  $y$  есть внутренняя точка  $A$ , то имеется  $\rho > 0$ , такое, при котором  $S(y, \rho) \subset A$ . Пусть  $z$  — точка на отрезке прямой, соединяющей  $x$  и  $y$ , отличная от  $x$ . Тогда

$$z = rx + sy, \quad r + s = 1, \quad r \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (3.28)$$

Покажем, что открытая сфера  $S(z, sp)$  содержится в  $A$ , следовательно,  $z$  есть внутренняя точка  $A$  (см. рис. 3.13). Если  $w \in S(z, sp)$ , тогда

$$\|w - z\| = \|w - (rx + sy)\| < sp, \quad (3.29)$$

что означает

$$\left\| \frac{s}{s} (w - rx) - sy \right\| = s \left\| \frac{1}{s} (w - rx) - y \right\| < sp. \quad (3.30)$$

$$\text{Иначе говоря,} \quad \left\| \frac{1}{s} (w - rx) - y \right\| < \rho, \quad (3.31)$$

откуда видно, что  $\frac{1}{s} (w - rx)$  принадлежит  $S(y, \rho)$ . Так как  $S(y, \rho)$  содержится в  $A$  и  $A$  выпукло,  $w = s \frac{1}{s} (w - rx) + rx$  есть элемент  $A$ . Таким образом,  $S(z, sp) \subset A$ . Теорема доказана.

Следующая теорема, доказательство которой мы опустим (см. [59]), будет применяться в гл. 5. Сформулируем теорему.

**Теорема 3.5.** а) Если  $A$  и  $B$  — открытые выпуклые подмножества из  $R_n$ , не имеющие общих точек, то существует гиперплоскость  $L$ , разделяющая  $A$  и  $B$ .

б) Если  $A$  — выпуклое подмножество из  $R_n$  и  $x$  — элемент границы  $A$ , то существует по крайней мере одна плоскость, опорная к  $A$  и содержащая точку  $x$ .

в) Если  $A$  — замкнутое множество из  $R_n$ , внутренняя часть которого  $i(A)$  не является «пустым» множеством, и для каждого элемента  $x$  границы  $A$  существует опорная плоскость, то  $A$  выпукло.

Пункт а) теоремы иллюстрируется рис. 3.14, а и б. Отметим, что на рис. 3.14, а гиперплоскость  $L$  строго разделяет  $A$  и  $B$ , но для случая,

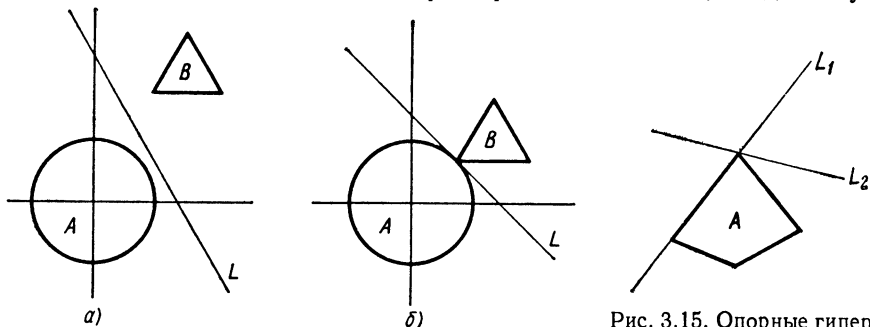


Рис. 3.14. а)  $L$  строго разделяет  $A$  и  $B$ ; б)  $L$  разделяет  $A$  и  $B$ . Прямой, строго разделяющей  $A$  и  $B$ , не существует.

Рис. 3.15. Опорные гиперплоскости  $L_1$  и  $L_2$ , проходящие через граничные точки выпуклого множества  $A$

показанного на рис. 3.14, б, не существует гиперплоскости, строго разделяющей  $A$  и  $B$ . Пункт б) теоремы иллюстрируется рис. 3.15. Его можно сформулировать иначе следующим образом: «Если  $x$  есть точка границы выпуклого множества  $A$ , то существует гиперплоскость  $L$ , проходящая через  $x$ , такая, что  $A$  содержится целиком либо в  $L^+ \cup L$ , либо в  $L^- \cup L$ . Последнее утверждение мы будем использовать в гл. 5. Пункт в) теоремы дает косвенный способ определения, является ли закрытое множество выпуклым.

Наконец, рассмотрим более подробно точки границы выпуклого множества и опорные плоскости. Можно сформулировать следующие положения:

1. Точка  $x$  границы выпуклого множества  $A$  из  $R_n$  является регулярной точкой, если она является элементом единственной гиперплоскости, опорной к  $A$ .

2. Опорная гиперплоскость  $L$  выпуклого множества  $A$  есть регулярная опорная гиперплоскость  $A$ , если она имеет с  $A$  единственную общую точку.

3. Выпуклое множество  $A$  называется регулярным выпуклым множеством, если каждая точка его границы является регулярной точкой и если каждая опорная к  $A$  гиперплоскость является регулярной опорной к  $A$  гиперплоскостью.

Сфера  $S(0, \rho)$  есть образец регулярного выпуклого множества. Термин «регулярный» по отношению к множеству, грубо говоря, означает, что множество не имеет «углов». Множество  $A_1$  на рис. 3.16 регулярно, множество  $A_2$  имеет две нерегулярные точки (или «угла»), но каждая гиперплоскость, опорная к  $A_2$ , регулярна. Множество  $A_3$  имеет и нерегу-

лярные точки, и нерегулярную опорную гиперплоскость. Отметим, что выпуклые множества типа  $\{(x_1, x_2) : x_2 = 0, -1 \leq x_1 \leq 1\}$  или типа единичного куба в  $R_3$  также являются нерегулярными выпуклыми множествами.

И, наконец, отметим, что невозможно определить единственную нормаль к выпуклому множеству в нерегулярной точке (или в «угле») множества.

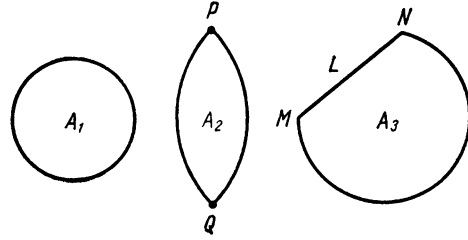


Рис. 3.16.  $A_1$  — регулярное выпуклое множество.  $P$  и  $Q$  — нерегулярные точки («углы») выпуклого множества  $A_2$ .  $M$  и  $N$  — нерегулярные точки выпуклого множества  $A_3$ .  $L$  — нерегулярная опорная гиперплоскость множества  $A_3$

## ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ

### 3.9. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Переходим к изучению векторных функций, т. е. таких функций, которые принимают различные значения, соответствующие точкам векторного пространства, и сформулируем ряд важных свойств, которыми такие функции могут обладать. Мы надеемся, что читатель уже встречался в курсах математики со многими понятиями, которые рассматриваются ниже. Поэтому изложение известных вопросов будет весьма кратким. Однако понятия, которые представляют для нас особый интерес, излагаются более строго, чем это свойственно основным курсам математики. Мы рассмотрим понятия непрерывности, производной и интеграла от функции, функциональные пространства и функционалы<sup>1</sup>.

Мы часто будем начинать обсуждение с рассмотрения знакомого случая функции, преобразующей  $R$  в  $R$ , т. е. вещественной функции одной переменной. Далее мы будем переходить к обсуждению функций (преобразования)  $R$  в  $R_n$  (векторных функций одной переменной) и, наконец, рассматривать функции от  $R_m$  в пространстве  $R_n$  [векторные функции нескольких (вещественных) переменных.] Обычно мы будем вводить такие понятия, как непрерывность функции одной переменной только по отношению к  $R$ , а не к интервалу из  $R$  [см. уравнение (3.1)]. Если читатель примет интервал за область существования функции (см. § 2.4) в определении, то он легко получит соответствующую формулировку понятия и будет в состоянии интерпретировать теоремы для этого случая.

Напомним, что если  $x$  есть элемент из  $R_n$ ,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

<sup>1</sup> См. [51], [192] и [196]. Эта литература особенно интересна с точки зрения углубления приведенных понятий.

то  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются компонентами  $\mathbf{x}$ . Если  $\mathbf{f}$  — функция из  $R$  в  $R_n$ , то для  $t$  из  $R$  имеем

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

где  $f_1, f_2, \dots, f_n$  — вещественные функции, которые называются компонентами  $\mathbf{f}$ . Например, функция  $\mathbf{f}(t)$  из  $R$  в  $R_3$ ,  $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ e^{-t} \\ \cos t \end{bmatrix}$  имеет

вид (3.33), где  $f_1(t) = t$ ,  $f_2(t) = e^{-t}$ ,  $f_3(t) = \cos t$ . Для обозначения векторных функций мы будем использовать жирные прописные буквы латинского алфавита. Аналогично, если  $\mathbf{g}$  есть функция из  $R_m$  в  $R_n$  и  $\mathbf{u}$  — элемент из  $R_m$ , то

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{u}) \\ g_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

где  $g_i$  — действительные функции от  $\mathbf{u} \in R_m$ , называемые компонентами  $\mathbf{g}$ .

Например, если  $\mathbf{g}$  есть функция из  $R_2$  в  $R_3$ , а  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$  — элемент из  $R_2$ , то типичная функция  $\mathbf{g}$  из  $R_2$  в  $R_3$  может иметь вид

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 + 3u_2^2 \\ \log u_1 + e^{-u_2} \\ \sin u_1 + u_2^3 \end{bmatrix},$$

где  $g_1(\mathbf{u}) = u_1 + 3u_2^2$ ,  $g_2(\mathbf{u}) = \log u_1 + e^{-u_2}$  и  $g_3(\mathbf{u}) = \sin u_1 + u_2^3$ .

Рассматривая уравнения (3.33) и (3.34), видим, что существует тесная связь между векторными функциями и функциями, принимающими только вещественные значения. Эту связь мы часто будем использовать в дальнейшем.

Если обозначить через  $\mathfrak{F}(R_m, R_n)$  совокупность всех функций из  $R_m$  в  $R_n$ , т. е.

$$\mathfrak{F}(R_m, R_n) = \{\mathbf{f} : \mathbf{f} \text{ есть функция из } R_m \text{ в } R_n\}, \quad (3.35)$$

и определить понятия суммы и произведения (на элемент из  $R$ ) для элементов  $\mathfrak{F}(R_m, R_n)$ , полагая

$$[\mathbf{f} + \mathbf{g}](\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{u}) \text{ — сумма} \quad (3.36)$$

$$[r\mathbf{f}](\mathbf{u}) = r\mathbf{f}(\mathbf{u}) \text{ — произведение} \quad (3.37)$$

для  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  из  $\mathfrak{F}(R_m, R_n)$ ,  $\mathbf{u}$  из  $R_m$  и  $r$  из  $R$ , то  $\mathfrak{F}(R_m, R_n)$  становится векторным пространством по отношению к этим понятиям суммы и произведения (см. § 2.5). Эти понятия суммы и произведения мы будем часто использовать ниже.

### 3.10. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

В § 2.7 мы обнаружили, что если математик дал определение понятия, то он пытается установить, какой вид преобразований это понятие «сохраняет». Мы дали определение предельной точки в § 3.3, и теперь мы рассмотрим преобразования, сохраняющие это понятие. Для начала введем понятие предельной точки преобразования.

**Определение 3.22.** Если  $X_1$  и  $X_2$  — множества с функциями расстояния  $d_1$  и  $d_2$  соответственно,  $f$  — преобразование из  $X_1$  в  $X_2$ , область существования которого все множество  $X_1$ , и  $x_0$  — элемент из  $X_1$ , то будем называть элемент  $y$  из  $X_2$  предельной точкой  $f$  при  $x_0$ , если для любой последовательности  $x_n$ ,  $n = 1, 2$  элементов из  $X_1$ , сходящейся к  $x_0$  ( $x_n \neq x_0$  для любого  $n$ ), соответствующая последовательность  $f(x_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , сходится к  $y$ . В этом случае

$$y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad (3.38)$$

Заметим, что преобразование может и не иметь предельной точки при данном  $x_0$ , но если оно имеет такую, то она единственна. Отметим также, что  $y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  вовсе не означает, что  $y = f(x_0)$ .

**Определение 3.23. Непрерывность.** Пусть  $X_1$  и  $X_2$  — множества с функциями расстояния  $d_1$  и  $d_2$  соответственно,  $f$  — преобразование  $X_1$  в  $X_2$ , областью существования которого являются все  $X_1$ , и  $x_0$  — точка в  $X_1$ . Говорят, что  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , если  $f(x_0)$  есть предельная точка  $f$  при  $x_0$ , т. е.

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad (3.39)$$

Если  $f$  непрерывна в любой точке  $x_0$ , то говорят, что  $f$  есть непрерывное преобразование (или функция) или просто, что  $f$  непрерывна.

Непрерывность  $f$  означает, что если  $x_0$  есть предел последовательности  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то  $f(x_0)$  является пределом последовательности  $f(x_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Читатель хорошо знаком с так называемым  $\epsilon, \delta$  определением непрерывности вещественных функций одной переменной. Покажем, как оно связано с определением (3.23). Понятие предельной точки преобразования мы будем связывать со сферами в множествах  $X_1$  и  $X_2$ . Следующая теорема устанавливает искомую зависимость.

**Теорема 3.6.** Точка  $y$  является предельной точкой преобразования  $f$  при  $x_0$  тогда и только тогда, когда для каждого  $\epsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что

$$f[S(x_0, \delta)] \subset S(y, \epsilon) \cup \{f(x_0)\} \quad (3.40)$$

или что эквивалентно, если

$$0 < d_1(x, x_0) < \delta \text{ соответствует } d_2(f(x), y) < \epsilon. \quad (3.41)$$

В частности, если  $f$  есть функция из  $R$  в  $R$ , то  $y$  есть предельная точка  $f$  при  $x_0$  тогда и только тогда, когда для каждого  $\epsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

соответствует  $|f(x) - y| < \epsilon$ . (3.42)

В более общем случае, если  $f$  преобразует  $R_m$  в  $R_n$ , то  $y$  есть предельная точка  $f$  при  $x_0$ , в том случае, когда для любого  $\epsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , которое может зависеть от  $\epsilon$ , такое, что

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \text{ соответствует } \|f(x) - y\| < \epsilon, \quad (3.43)$$

где знак  $\| \cdot \|$  обозначает евклидову норму на  $R_n$ . Наконец, из уравнения (3.40) следует, что  $f$  непрерывна при  $x_0$ , тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что

$$f[S(x_0, \delta)] \subset S(f(x_0), \varepsilon). \quad (3.44)$$

Последнее утверждение иллюстрируется рис. 3.17 для случая преобразования  $R_2$  в себя.

**Доказательство.** Из определения предельной точки видно, что если  $f$  удовлетворяет условию (3.40), то  $y$  — предельная точка  $f$  при  $x_0$ . С другой стороны, если  $y$  — предельная точка  $f$  при  $x_0$  и задано  $\varepsilon > 0$ , то мы утверждаем, что существует  $\delta > 0$ , такое, что  $f[S(x_0, \delta)] \subset S(y, \varepsilon) \cup \{f(x_0)\}$ . Если это не так, то для  $n = 1, 2, \dots$  в  $X_1$  найдется  $x_n \neq x_0$ , такое, что  $d_1(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$  и  $d_2(f(x_n), y) \geq \varepsilon$ . Но это означало бы, что

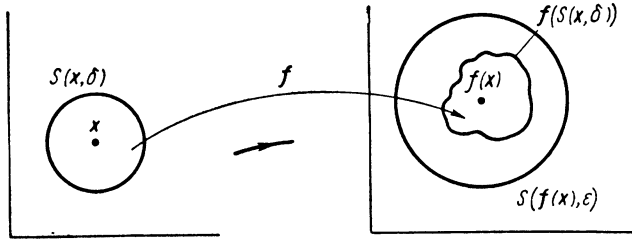


Рис. 3.17.  $\varepsilon, \delta$  — свойство непрерывности

$x_n$  сходится к  $x$  в то время, как  $f(x_n)$  не сходится к  $y$ . Это противоречит тому, что  $y$  является предельной точкой  $f$  при  $x_0$ . Таким образом, наше утверждение доказано, а вместе с ним доказана и теорема 3.6. Эта теорема имеет прямое следствие: функция  $f$  непрерывна тогда и только тогда, когда обратное отображение [см. уравнение (2.15)] каждого открытого подмножества из  $X_2$  есть открытое подмножество в  $X$ , т. е.  $f^{-1}(A)$  открыто в  $X_1$ , если  $A$  открыто в  $X_2$ . В силу теоремы 3.1 можно обнаружить, что  $f$  непрерывна тогда и только тогда, когда обратное изображение любого замкнутого подмножества из  $X$  есть замкнутое подмножество в  $X_1$ , т. е.  $f^{-1}(B)$  замкнуто в  $X_1$ , если  $B$  замкнуто в  $X_2$ .

Если  $g$  есть функция преобразования из  $R_m$  в  $R_n$ , из уравнения (3.44) легко заключить, что  $g$  непрерывна тогда и только тогда, когда каждая из ее компонент  $g_1, g_2, \dots, g_n$  есть непрерывная функция преобразования  $R_m$  в  $R$  [см. уравнение 3.34)]. Действительно, заметим, что если  $u$  и  $v$  — элементы  $R_m$ , то для  $i = 1, 2, \dots, n$

$$|g_i(u) - g_i(v)| \leq \|g(u) - g(v)\| \leq \sum_{i=1}^n |g_i(u) - g_i(v)|, \quad (3.45)^1$$

откуда следует справедливость сделанного выше утверждения.

Далее, легко видеть, что если  $g$  и  $h$  — непрерывные функции преобразования  $R_m$  в  $R_n$ , то сумма  $g$  и  $h$ ,  $g + h$  [см. уравнение (3.36)] и произведение  $g$  на элемент  $r$  из  $R$  [см. уравнение (3.37)] также являются непрерывными функциями преобразования из  $R_m$  в  $R_n$ . Иначе говоря, множество

$$\{g : g \text{ — непрерывная функция преобразования } R_m \text{ в } R_n\} \quad (3.46)$$

есть векторное пространство, которое является подпространством множества всех функций преобразования  $R_m$  в  $R_n$ ,  $\mathfrak{F}(R_m, R_n)$  [см. уравнение (3.35)]. О пространствах такого типа будет сказано несколько под-

<sup>1</sup> См. уравнение (3.6r).

рнее в § 3.15. Наконец, отметим, что если  $g$  — непрерывная функция преобразования  $R_m$  в  $R_n$  и  $h$  — непрерывная функция преобразования  $R_n$  в  $R_p$ , то сложная функция  $h \circ g$  [см. уравнение (2.16)] есть непрерывная функция преобразования  $R_m$  в  $R_p$ .

**Пример 3.23.** Пусть  $f_n$  — преобразование  $R$  в себя, заданное соотношением  $f_n(x) = x^n$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Преобразование  $f_n$  непрерывно, и, следовательно, любая полиномиальная функция непрерывна. Преобразование  $R$  в себя, заданное как  $U(x) = 0$ , при  $x \leq 0$  и  $U(x) = 1$  при  $x > 0$ , не является непрерывным при  $x = 0$ , но оно непрерывно во всех точках  $x \neq 0$ .

**Пример 3.24.** Пусть  $\mathcal{U}$  — линейное преобразование  $R_m$  в  $R_n$  с матрицей преобразования  $A = (a_{ij})$  по отношению к нормальным базисам в  $R_m$  и  $R_n$  (см. § 2.6). Преобразование  $\mathcal{U}$  непрерывно. Для доказательства непрерывности отметим, что если

$$v = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \text{ и } w = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}$$

являются элементами из  $R_m$ , то  $\mathcal{U}(v) - \mathcal{U}(w) = \mathcal{U}(v - w)$  и

$$\langle \mathcal{U}(v - w), \mathcal{U}(v - w) \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}(r_j - s_j) \\ \sum_{j=1}^m a_{2j}(r_j - s_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}(r_j - s_j) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}(r_j - s_j) \\ \sum_{j=1}^m a_{2j}(r_j - s_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}(r_j - s_j) \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Отсюда используя уравнение (2.32), имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U}(v - w), \mathcal{U}(v - w) \rangle &= \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^m a_{ij}(r_j - s_j) \right\}^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^m (r_j - s_j)^2 \right\} \left\{ \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right\}^1 \leq \|v - w\|^2 \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right\}, \end{aligned}$$

и, следовательно, преобразование  $\mathcal{U}$  непрерывно.

**Пример 3.25.** Пусть  $f$  — функция преобразования  $R$  в себя, заданная как  $f(x) = |x|$  (см. рис. 3.18).  $f$  непрерывна. Вообще, функция преобразования  $R_m$  в  $R$ , заданная как  $f(x) = \|x\|$ , для  $x$  из  $R_m$  есть непрерывная функция.

**Пример 3.26.** Если  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$  есть элемент  $R_m$  и мы зададим функцию преобразования  $R_m$  в  $R$  как

$$f(x) = \max_{i=1, 2, \dots, m} \{|x_i|\}$$

( $f(x)$  равна наибольшей из абсолютных величин компонент  $x$ ), то  $f$  непрерывна, так как  $|x_i| \leq \left( \sum_{j=1}^m x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$   $i = 1, 2, \dots, m$ .

**Пример 3.27.** Если  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$  — элемент  $R_m$  и заданы функции  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$

<sup>1</sup> См. уравнение (2.91).



преобразования  $R_m$  в  $R$  как  $\Phi_i(\mathbf{x}) = x_i$ , то функции  $\Phi_i$  будут непрерывны. В частности, если рассматривать  $R_2$  и  $\Phi_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1$ , то  $\Phi_1$  непрерывна. Если  $A$  есть подмножество из  $R_2$ , заданное как  $A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_2 = \frac{1}{x_1}, x_1 > 0 \right\}$  (рис. 3.19), то  $A$  является замкнутым в  $R_2$ , но  $\Phi_1(A)$  не является замкнутым в  $R$ . Рассмотрите в свете этого примера замечания, следующие за теоремой 3.6.

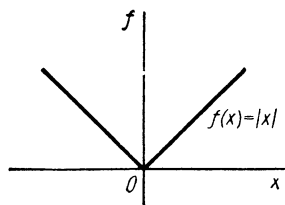


Рис. 3.18. Непрерывная функция  $f(x) = |x|$

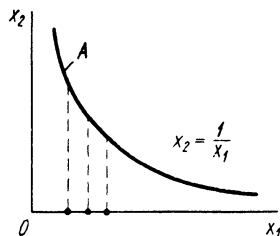


Рис. 3.19. Множество  $A$  замкнуто, но его проекция на ось  $x_1$  не является замкнутым множеством

**Упражнение 3.11.** Покажите, что если  $g$  и  $h$  — непрерывные функции преобразования  $R_m$  в  $R_n$ , то  $g + h$  является также непрерывной функцией преобразования  $R_m$  в  $R_n$ . У к а з а н и е: если  $u$  и  $v$  принадлежат  $R_m$ , то

$$\|(g + h)(u) - (g + h)(v)\| \leq \|g(u) - g(v)\| + \|h(u) - h(v)\|.$$

Предположим теперь, что  $f$  — непрерывная функция преобразования  $R_m$  в  $R_n$  и  $C$  — компактное подмножество из  $R_m$  (см. определение 3.14). Ниже мы покажем (см. теорему 3.7), что  $f(C)$  [см. уравнение (2.14)] есть компактное подмножество из  $R_n$ . Важным частным следствием этого положения является то, что вещественная непрерывная функция достигает максимального и минимального значений, если область ее существования ограничена компактным множеством.

**Теорема 3.7.** Если  $f$  есть непрерывное преобразование  $R_m$  в  $R_n$  и  $C$  — компактное подмножество из  $R_m$ , то  $f(C)$  есть компактное подмножество из  $R_n$ .

**Доказательство:** Для того чтобы доказать компактность  $f(C)$ , мы воспользуемся свойством 4) из § 3.6<sup>1</sup>. Предположим, что  $y_n, n = 1, 2, \dots$  есть последовательность элементов  $f(C)$ ; тогда существуют элементы  $x_n, n = 1, 2, \dots$  из  $C$  такие, что  $f(x_n) = y_n, n = 1, 2, \dots$ . Так как  $C$  компактно, то существует подпоследовательность  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$  последовательности  $\{x_n\}$ , имеющая  $x$  своим пределом в  $C$ . Однако из непрерывности  $f$  следует, что  $y_{n_1} = f(x_{n_1}), y_{n_2} = f(x_{n_2}), \dots$  сходится к  $f(x)$ , который является элементом  $f(C)$ . Иначе говоря,  $y_{n_1}, y_{n_2}, \dots$  и есть искомая сходящаяся подпоследовательность последовательности  $\{y_n\}$ .

### 3.11. КУСОЧНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели понятие непрерывности в точке. Посмотрим, что происходит в точке, где преобразование не является непрерывным. В этой точке функция разрывна. Для начала рассмотрим два примера.

**Пример 3.28.** Пусть  $f$  — преобразование  $R$  в себя, заданное как  $f(x) = -1$ , для  $x \leq 0$  и  $f(x) = 1$  для  $x > 0$  (рис. 3.20). Функция  $f(x)$  не является непрерывной при  $x = 0$ .

<sup>1</sup> Свойство (4) устанавливает, что множество  $K$  компактно, если для заданной последовательности  $x_n, n = 1, 2, \dots$  элементов из  $K$  существует подпоследовательность  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$  элементов  $\{x_n\}$ , которая сходится к элементу из  $K$ .

Если  $x_n, n = 1, 2, \dots$  есть последовательность, сходящаяся к 0 при  $x_n \leq 0$  для каждого  $n$  или  $x_n > 0$  для каждого  $n$ , то предел последовательности  $f(x_n), n = 1, 2, \dots$  существует. Действительно, при  $x_n \leq 0$  для всех  $n$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -1$ ; при  $x_n > 0$  для всех  $n$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1.$$

**Пример 3.29.** Пусть  $g$  — функция преобразования  $R$  в себя, заданная как  $g(x) = -1$ , если  $x$  — иррациональное число, и  $g(x) = 1$ , если  $x$  — рациональное число. Функция  $g$  не является непрерывной ни при каком  $x$ , в том числе и при  $x = 0$ . Имеются последовательности  $x_n, n = 1, 2, \dots$ , сходящиеся к 0, скажем,  $x_n > 0$  для любого  $n$ , для которых пределом является  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = -1$ , либо  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 1$ , для которых последовательность  $g(x_n), n = 1, 2, \dots$  не имеет предела.

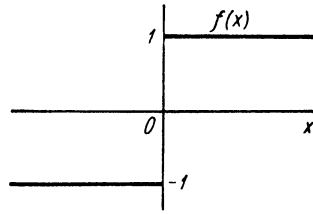


Рис. 3.20. Функция  $f(x)$  в точке  $x = 0$  не является непрерывной (имеет разрыв)

По существу, функция  $f$  примера 3.28 гораздо «ближе» к непрерывной при 0, чем функция  $g$  примера 3.29. Мы попытаемся разъяснить это положение в последующей части настоящего параграфа.

Пусть теперь  $f$  — преобразование  $R$  в множество  $X$  с  $d$  в качестве расстояния на  $X$ .

**Определение 3.24. Пределы справа и слева.** Если  $t$  — элемент  $R$ , то будем говорить, что  $f$  имеет предел справа при  $t$  (или имеет предел сверху при  $t$ ), если в  $X$  существует такой элемент  $x$ , что для любой заданной последовательности  $t_n, n = 1, 2, \dots$ , которая сходится к  $t$  (причем  $t_n > t$  для любого  $n$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = x$ , т. е.  $x$  есть предел последовательности  $\{f(t_n)\}$ . Часто это записывают так:

$$x = f(t^+) \text{ или } \lim_{t \rightarrow t^+} f(t) = x. \quad (3.47)$$

Аналогично будем говорить, что  $f$  имеет предел слева при  $t$  (или имеет предел снизу при  $t$ ), если имеется элемент  $y$  в  $X$  такой, что для любой заданной последовательности  $t_n, n = 1, 2, \dots$ , сходящейся к  $t$  (причем  $t_n < t$  для любого  $n$ )  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = y$ , т. е.  $y$  есть предел последовательности  $\{f(t_n)\}$ . Можно это записать в виде

$$y = f(t^-) \text{ или } \lim_{t \rightarrow t^-} f(t) = y. \quad (3.48)$$

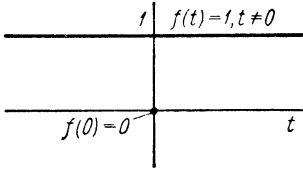


Рис. 3.21. Пределы функции  $f(t)$  слева и справа в точке  $t = 0$  одинаковы, однако в этой точке имеет место разрыв функции

Например, функция  $f$  в примере 3.28 имеет при 0 пределом справа 1 и пределом слева  $-1$ . Отметим, что если даже  $x = f(t^+)$  и  $y = f(t^-)$  существуют и равны, функция  $f$ , тем не менее, может иметь разрыв при  $t$ . Этот случай показан на рис. 3.21, который иллюстрирует пример 3.30.

**Пример 3.30.** Пусть  $f$  — преобразование  $R$  в себя, определенное как  $f(t) = 1$ , если  $t \neq 0$  и  $f(0) = 0$ . Тогда  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1 = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)$ , но  $f$  не является непрерывным при 0 (рис. 3.21).

**Определение 3.25. Кусочная непрерывность.** Если  $f$  — преобразование  $R$  в множество  $X$  с расстоянием  $d$  на  $X$ , будем говорить, что  $f$  имеет простой разрыв (или скачок) при  $t$ , если (1)  $f$  претерпевает разрыв при  $t$  и (2)  $f$  имеет при  $t$  пределы как справа, так и слева, т. е.  $f(t^+)$  и  $f(t^-)$  оба существуют. Если множество точек разрыва  $\mathfrak{D}(f) = \{t : t \text{ есть разрыв } f, \text{ т. е. } f \text{ не непрерывна при } t\}$  есть счетное множество<sup>1</sup> [т. е. если элементы  $\mathfrak{D}(f)$  могут быть пронумерованы в некоторой последовательности  $t_n$ ,

<sup>1</sup> См. § 2.2.

$n = 1, 2, \dots$  (которая может быть конечной)] и состоит только из простых разрывов, то будем называть  $f$  кусочно-непрерывной (или регулярной)<sup>1</sup> функцией. Иными словами,  $f$  кусочно-непрерывна, если имеется счетное количество точек разрыва и в каждой из этих точек  $f$  имеет оба предела (справа и слева).

**Пример 3.31.** Пусть  $f$  — функция преобразования  $R$  в себя, заданная как  $f(t) = 0$ , если  $t < 0$ ,  $f(t) = 1$ , если  $0 \leq t \leq 1$ ,  $f(t) = -1$ , если  $1 < t \leq 2$ , и  $f(t) = 0$ , если  $t > 2$ . Функция  $f(t)$  кусочно-непрерывна и представляет собой функцию, называемую ступенчатой, или кусочно-постоянной. Существует конечная последовательность  $t_1, t_2, t_3$  ( $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$  и  $t_3 = 2$ ), такая, что  $f$  постоянна на интервалах  $(t_1, t_2)$ ,  $(t_2, t_3)$ , а также на множествах  $\{t : t < t_1\}$  и  $\{t : t > t_3\}$  (рис. 3.22). О ступенчатой функции мы будем подробнее говорить в § 3.15.

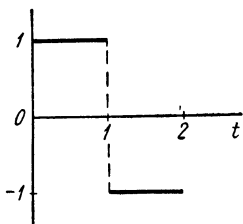


Рис. 3.22. Кусочно-постоянная функция

Отметим, что любая непрерывная функция является и кусочно непрерывной и что  $f$  есть кусочно-непрерывная функция преобразования  $R$  в  $R_n$  в том и только в том случае, когда компоненты  $f, f_1, f_2, \dots, f_n$  [см. уравнение (3.33)] кусочно-непрерывны. Далее, если мы определим понятия суммы и произведения (на элемент из  $R$ ) для кусочно-непрерывных функций аналогично (3.36) и (3.37), то можно обнаружить, что множество всех кусочно-непрерывных функций преобразования  $R$  в  $R_n$  образует векторное пространство, которое является подпространством  $\mathfrak{F}(R, R_n)$ . Отметим, наконец, что сложная функция, составленная из кусочно-непрерывных функций, не обязательно является кусочно-непрерывной. Однако если  $f$  — непрерывная функция, преобразующая  $R_n$  в  $R$ , и  $g$  — кусочно-непрерывная функция, преобразующая  $R$  в  $R_n$ , то  $f \circ g$  есть кусочно-непрерывная функция, преобразующая  $R$  в  $R$ .

**Пример 3.32.** Пусть  $I$  — закрытый интервал с концами 0 и 1, т. е.  $I = [0, 1]$  [см. второе уравнение из 3.7)], и  $f$  — функция, преобразующая  $I$  в  $R_n$  с компонентами  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Мы говорим, что  $f$  кусочно-непрерывна на  $I$  [сравнить с замечаниями в конце § 3.9], если точки  $I$ , в которых  $f$  терпит разрыв, являются простыми разрывами  $f$  и если они счетные. Например, функция, преобразующая  $I$  в  $R_2$ , заданная как  $f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , для  $t$  в  $[0, \frac{1}{4})$ ,  $f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$  для  $t$  в  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  и  $f(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  для  $t$  в  $[\frac{1}{2}, 1]$ , кусочно-непрерывна. Легко видеть, что множество всех кусочно-непрерывных функций, преобразующих  $I$  в  $R_n$  с суммой и произведением, определенными по выражениям (3.36) и (3.37), образует векторное пространство.

### 3.12. ПРОИЗВОДНЫЕ

В этом параграфе мы рассмотрим исключительно важное понятие производной от функции. Производная функции представляет собой «местную» аппроксимацию с помощью линейной функции. Производную можно понимать как меру скорости изменения функции. Попытаемся уточнить это положение.

Предположим сначала, что  $f$  — функция, преобразующая  $R$  в себя, и  $t_0$  — некоторый элемент из  $R$ . Если  $t$  «близко» к  $t_0$ , то можно попытаться аппроксимировать  $f(t)$  функцией  $f^a(t)$  следующего вида:

$$f(t_0) + \mathfrak{A}(t - t_0) = f^a(t), \quad (3.49)$$

<sup>1</sup> См. подробнее в работе [51].

<sup>2</sup> Имеем  $\lim_{t \rightarrow t^+} g(t) = v$ , откуда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow t^+} f[g(t)] = f(v).$$

Последнее замечание будет нами использовано в § 3.15.

где  $\mathfrak{L}$  — линейное преобразование  $R$  в себя. Выражение (3.49) можно записать в виде

$$f^a(t) = f(t_0) + a(t - t_0), \quad (3.50)$$

где  $a$  — элемент из  $R^1$ .

Нетрудно видеть, что  $f^a(t)$  представляет собой прямую, проходящую через  $f(t_0)$  (рис. 3.23). Нам хотелось бы выбрать  $a$  таким образом, чтобы  $f^a(t)$  была касательна к  $f(t)$  в  $t_0$ , т. е. чтобы предел  $\frac{|f^a(t) - f(t)|}{|t - t_0|}$  при  $t \rightarrow t_0$  был равен 0. Иначе говоря, мы хотим выбрать  $a$  так, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - a \right| = 0. \quad (3.51)$$

Если имеется такое  $a$  в  $R$ , при котором удовлетворяется уравнение (3.51), то говорят, что  $f(t)$  дифференцируема при  $t = t_0$ , а  $a$  есть производная  $f$  при  $t_0$ . Тогда можно записать

$$a = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t_0} = Df(t_0) = \dot{f}(t_0). \quad (3.52)$$

Будем называть функцию  $f$  дифференцируемой, если  $f$  имеет производную при каждом  $t_0$  из  $R$  и обозначать через

$$\frac{df}{dt}, \text{ или } Df(t), \text{ или } \dot{f}(t) \quad (3.53)$$

такое преобразование  $R$  в себя, значение которого при  $t$  есть производная  $f$  в точке  $t$ . Эту функцию будем называть производной функции  $f$ . Можно показать, что если  $f$  имеет производную, то  $f$  непрерывна. Далее, если  $f$  дифференцируема и  $a, b \in R$ , причем  $a < b$ , то существует  $\theta$  в интервале  $(a, b)$  такое, что

$$f(b) - f(a) = \dot{f}(\theta)(b - a) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\theta} (b - a).$$

Последнее соотношение часто называют теоремой о конечном приращении (теоремой Лагранжа).

Если  $f$  есть дифференцируемая функция преобразования  $R$  в себя, то можно рассматривать функцию  $\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}$ , задаваясь вопросом, имеет ли эта функция производную в данной точке  $t_0$  из  $R$ . Если  $\dot{f}(t)$  имеет производную при  $t_0$ , то говорят, что  $f(t)$  дважды дифференцируема в  $t_0$  или что  $f(t)$  имеет вторую производную в  $t_0$ . Последнее можно записать в виде

$$\left. \frac{d(\dot{f}(t))}{dt} \right|_{t_0} = \ddot{f}(t_0) = \left. \frac{d^2f}{dt^2} \right|_{t_0}.$$

Повторяя эти действия, можно получить производные более высоких порядков и написать для них общую формулу

$$\left. \frac{d^n(f(t))}{dt^n} \right|_{t_0} = f^{(n)}(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \left[ \frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}} \right] \right|_{t_0}.$$

Определим понятие производной от векторной функции преобразования  $R$  в  $R_n$ . Пусть  $t_0$  — элемент из  $R$  и  $\mathfrak{L}$  — линейное преобразование  $R$  в  $R_n$ .

<sup>1</sup> Отметим, что  $a$  есть матрица  $\mathfrak{L}$  ( $1 \times 1$  матрица) (см. § 2.8), тогда выражение (3.50) можно записать в виде  $f^a(t) = f(t_0) + \langle a, t - t_0 \rangle$ , где  $\langle \rangle$  обозначает скалярное произведение на  $R$  [см. уравнение (2.86)].

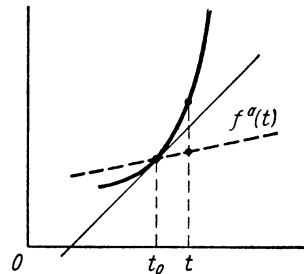


Рис. 3.23. Аппроксимирующая функция  $f^a(t)$

Рассмотрим функции  $f^a(t)$ , заданные как

$$f^a(t) = f(t_0) + \mathfrak{A}(t - t_0) \quad (3.54)$$

или эквивалентную ей

$$f^a(t) = f(t_0) + \mathbf{a}(t - t_0), \quad (3.55)$$

где  $\mathbf{a}$  есть вектор из  $R_n^1$ . Как и в выражении (3.51), мы хотели бы выбрать  $\mathbf{a}$  таким образом, чтобы

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - \mathbf{a} \right\| = 0. \quad (3.56)$$

Если в  $R_n$  имеется  $\mathbf{a}$ , для которого уравнение (3.56) удовлетворяется, будем говорить, что  $f$  дифференцируема в  $t_0$  и что  $\mathbf{a}$  есть производная  $f$  в  $t_0$ . Запишем это в виде

$$\mathbf{a} = Df(t_0) = \dot{f}(t_0); \quad (3.57)$$

$f$  дифференцируема в  $t_0$  в том и только в том случае, если ее компоненты  $f_1, f_2, \dots, f_n$  (см. § 3.9) дифференцируемы в  $t_0$ :

$$\dot{f}(t_0) = \begin{bmatrix} \dot{f}_1(t_0) \\ \dot{f}_2(t_0) \\ \vdots \\ \dot{f}_n(t_0) \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Будем называть  $f$  просто дифференцируемой, если  $f$  имеет производную в каждой точке  $t_0$  из  $R$ , и записывать

$$\frac{df}{dt}, \text{ или } Df(t), \text{ или } \dot{f}(t) \quad (3.59)$$

для обозначения функции преобразования  $R$  в  $R_m$ , величина которой в точке  $t$  равна производной  $f$  в  $t$ . Эту функцию будем называть производной от  $f$  и записывать

$$\dot{f}(t) = \begin{bmatrix} \dot{f}_1(t) \\ \dot{f}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{f}_n(t) \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Если, далее,  $f$  и  $g$  дифференцируемы, то можно заметить, что сумма  $f + g$  и произведение  $r \cdot f$  ( $r \in R$ ) также дифференцируемы, причем

$$\frac{d(f+g)}{dt} = \dot{f}(t) + \dot{g}(t) \quad (3.61)$$

и

$$\frac{d(rf)}{dt} = r \cdot \dot{f}(t). \quad (3.62)$$

Из выражений (3.61) и (3.62) вытекает, что множество всех дифференцируемых функций, преобразующих  $R$  в  $R_n$ , образует векторное пространство, которое является подмножеством множества всех функций преобразования  $R$  в  $R_n$ ,  $\mathfrak{F}(R, R_n)$ . Если  $g$  — дифференцируемая функция,

<sup>1</sup> Здесь  $\mathbf{a}$  — вектор-столбец из  $n$  элементов  $\mathfrak{A}(1)$ , который является матрицей линейного преобразования  $\mathfrak{A}$  [см. формулу (2.31)].

преобразующая  $R$  в  $R$ , и  $f$  — дифференцируемая функция, преобразующая  $R$  в  $R_n$ , то сложная функция  $f \circ g$  дифференцируема и

$$\frac{d(f \circ g)}{dt} = \dot{f}[g(t)] \cdot \dot{g}(t) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{g(t)} \frac{dg}{dt}. \quad (3.63)$$

**Упражнение 3.12.** Покажите, что функция, преобразующая  $R$  в  $R_n$ , дифференцируема в  $t_0$  в том и только в том случае, если все компоненты  $f$  дифференцируемы и

$$\dot{f}(t_0) = \begin{bmatrix} \dot{f}_1(t_0) \\ \dot{f}_2(t_0) \\ \vdots \\ \dot{f}_n(t_0) \end{bmatrix}.$$

Указание: следует использовать уравнение (3.6в).

**Пример 3.33.** Пусть  $I$  — закрытый интервал с концами 0 и 1,  $I = [0, 1]$  [см. уравнение (3.7)] и  $f$  — функция, преобразующая  $I$  в  $R_n$  с компонентами  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Будем считать функцию  $f$  дифференцируемой на  $I$ , если для каждого  $t_0$  из  $I$  существует  $a$  в  $R_n$  (которое может зависеть от  $t_0$ ), такое, что

$$\lim_{t \in I} \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - a \right\| = 0;$$

это выражение означает, что любой последовательности  $t_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  элементов из  $I$ ,  $t_n \neq t_0$  ни при каком  $n$ , которая сходится к  $t_0$ , соответствует последовательность

$$\left\| \frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} - a \right\|,$$

сходящаяся к 0. Легко заметить, что  $f$  дифференцируема на  $I$  тогда и только тогда, когда каждая компонента  $f_i$  дифференцируема на  $I$ . Например, функция  $f$ , преобразующая  $I$  в  $R_2$ , заданная как  $f(t) = \begin{bmatrix} \sin \pi t \\ \cos \pi t \end{bmatrix}$ , дифференцируема на  $I$  и  $\dot{f} = \begin{bmatrix} \pi \cos \pi t \\ -\pi \sin \pi t \end{bmatrix}$ .

Итак, мы рассмотрели функции одной (вещественной) переменной. Предположим теперь, что  $f$  есть функция, преобразующая  $R_m$  в  $R$ . В этом случае имеют смысл несколько различных определений производной. Во-первых, мы можем повторить процедуру, использованную для нахождения производной функции одной переменной, во-вторых, рассматривать  $f$  как функцию от компонент вектора в  $R_m$  и найти производные  $f$  по отношению к этим компонентам (т. е. частные производные); наконец, мы можем рассматривать поведение  $f$  вдоль заданного «направления» в  $R_m$  и получить производную от  $f$  по отношению к этому направлению. Уточним эти различные понятия производной.

Если  $u_0$  — элемент из  $R_m$  и  $u$  «близко» к  $u_0$ , можно попытаться аппроксимировать  $f(u)$  с помощью функции  $f^a(u)$  вида

$$f(u_0) + \mathfrak{A}(u - u_0) = f^a(u), \quad (3.64)$$

где  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $R_m$  в  $R$  (т. е.  $\mathfrak{A}$  — элемент пространства  $R_m^*$ , сопряженного к  $R_m$ ) [см. упражнения 2.11 и 2.12].

Уравнение (3.64) можно записать в виде

$$f^a(u) = f(u_0) + \langle a, u - u_0 \rangle, \quad (3.65)^1$$

где  $a$  — элемент из  $R_m$ . Опять-таки мы хотели бы выбрать  $m$ -мерный вектор  $a$  таким образом, чтобы  $f^a(u)$  была касательной к  $f(u)$  в точке  $u_0$ ,

<sup>1</sup> Здесь знак  $\langle, \rangle$  обозначает скалярное произведение на  $R_m$  [см. уравнение (2.86)].

т. е. таким образом, чтобы предел  $\frac{|f^a(\mathbf{u}) - f(\mathbf{u})|}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|}$  при  $\mathbf{u}$ , стремящемся к  $\mathbf{u}_0$ , был равен 0. Иначе говоря, мы хотим получить

$$\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \left| \frac{f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{u}_0)}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|} - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \rangle}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|} \right| = 0. \quad (3.66)$$

Если существует  $\mathbf{a}$  из  $R_m$ , для которого выполняется соотношение (3.66), то говорят, что  $f$  дифференцируема в точке  $\mathbf{u}_0$ , и называют  $\mathbf{a}$  градиентом (или производной  $f$ ) в точке  $\mathbf{u}_0$ . В этом случае пишут

$$\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{u}_0) = \text{grad } f(\mathbf{u}_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_0}. \quad (3.67)$$

Функцию  $f$  называют дифференцируемой, если градиент существует в каждой точке  $\mathbf{u}_0$  из  $R_m$ . Обозначают градиент следующим образом:

$$(\nabla f)(\mathbf{u}) \text{ или } \text{grad } f(\mathbf{u}) \text{ или } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}. \quad (3.68)$$

Заметим, что  $\text{grad } f$  есть векторная функция; будем обозначать ее компоненты в виде

$$(D_i f)(\mathbf{u}) \text{ или } \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad (3.69)$$

т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} (D_1 f)(\mathbf{u}) \\ (D_2 f)(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ (D_m f)(\mathbf{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f}{\partial u_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial u_m} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Например, если  $f$  — функция преобразования  $R_2$  в  $R$ , заданная как

$$f\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = u_1^2 + \sin u_2,$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 2u_1 \\ \cos u_2 \end{bmatrix} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial u_1} = 2u_1, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2} = \cos u_2.$$

Если  $f$  дифференцируема и  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  — точки из  $R_m$ , то можно показать, что существует точка  $\mathbf{u}^*$  на отрезке, соединяющем  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  (см. определение 3.16), такая, что

$$f(\mathbf{u}_1) - f(\mathbf{u}_2) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^*), \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \right\rangle; \quad (3.70a)$$

это соотношение, часто называемое теоремой о конечных приращениях, мы используем в § 3.18.

Будем теперь рассматривать  $f$  как функцию компонент векторов в  $R_m$ . Если

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{e}_i^1,$$

<sup>1</sup>  $\mathbf{e}_i$  — элементы натуральной базы в  $R_m$  [см. уравнения (2.27)].

то можно написать

$$f(\mathbf{u}) = f\left(\sum_{i=1}^m u_i \mathbf{e}_i\right) = f(u_1, u_2, \dots, u_m). \quad (3.71)$$

Пусть  $\mathbf{u}_0$  — данный элемент из  $R_m$  с компонентами  $u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0m}$ . Исследуем поведение  $f$ , если изменяется только одна из компонент  $\mathbf{u}_0$ , предположим первая. Рассмотрим функцию  $g_1$ , преобразующую  $R$  в себя, заданную как

$$g_1(u) = f(u, u_{02}, \dots, u_{0m}). \quad (3.72)$$

Если  $g_1$  имеет производную в точке  $u_{01}$ , то говорят, что  $\frac{\partial f}{\partial u_1}$  — частная производная в точке  $\mathbf{u}_0$ . Частную производную будем обозначать  $(D_1 f)(\mathbf{u}_0)$  или  $\left.\frac{\partial f}{\partial u_1}\right|_{\mathbf{u}_0}$ , т. е.

$$(Dg_1)(u_{01}) = (D_1 f)(\mathbf{u}_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial u_1}\right|_{\mathbf{u}_0}. \quad (3.73)$$

Отметим, что

$$(D_1 f)(\mathbf{u}_0) = \lim_{u \rightarrow u_{01}} \frac{f(u, u_{02}, \dots, u_{0m}) - f(u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0m})}{u - u_{01}}. \quad (3.74)$$

Частные производные  $f$  по другим компонентам можно определить совершенно аналогично, т. е. считать, что  $f$  имеет частную производную по  $u_i$  в точке  $\mathbf{u}_0$ , если существует  $a_i$  такое, что

$$\lim_{u \rightarrow u_{0i}} \left| \frac{f(u_{01}, \dots, u_{0i-1}, u, u_{0i+1}, \dots, u_{0m}) - f(u_{01}, \dots, u_{0m})}{u - u_{0i}} - a_i \right| = 0. \quad (3.75)$$

В этом случае можно написать

$$a_i = (D_i f)(\mathbf{u}_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{u}_0}. \quad (3.76)$$

Если  $f$  имеет частную производную по  $u_i$  в каждой точке  $\mathbf{u}_0$ , то говорят, что  $f$  имеет частную производную по  $u_i$ , и обозначают функцию преобразования  $R_m$  в  $R$ , значение которой в точке  $\mathbf{u}_0$  равно  $(D_i f)(\mathbf{u}_0)$ , как

$$(D_i f)(\mathbf{u}) \text{ или } \left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|. \quad (3.77)$$

Но мы уже использовали эти обозначения раньше для компонент градиента  $f$  [см. уравнение (3.70)]. Предоставим читателю самому убедиться в обоснованности использования этих обозначений. Рассмотрим теперь понятие производной функции  $f$ , преобразующей  $R_m$  в  $R$ , вдоль заданного «направления» в  $R_m$ . Предположим, что  $\mathbf{u}_0$  — элемент  $R_m$  и  $\mathbf{e}$  — заданный единичный вектор в  $R_m$ , т. е.

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 1. \quad (3.78)$$

Будем считать единичный вектор  $\mathbf{e}$  направлением и говорить, что  $f$  имеет производную по направлению  $\mathbf{e}$  в точке  $\mathbf{u}_0$ , если функция  $g_e$ , преобразующая  $R$  в себя, определенная как

$$g_e(t) = f(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}), \quad (3.79)$$



имеет производную при  $t = 0$ . Производную от  $g_e$  при 0,  $\dot{g}_e(0)$  будем называть производной от  $f$  в точке  $u_0$  по направлению  $e$  (рис. 3.24). Укажем, что

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} \Big|_{u_0} = \dot{g}_{e_i}(0), \quad (3.80)$$

где  $e_1, e_2, \dots, e_m$  — нормальный базис в  $R_m$ , т. е., что частные производные от  $f$  являются производными от  $f$  по направлениям  $e_i$ , являющимися векторами нормального базиса в  $R_m$  (см. § 2.6). Действительно, если

$e = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$ , то можно показать, что

$$\dot{g}_e(0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \Big|_{u_0} = \quad (3.81)$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (D_1 f)(u_0) \\ (D_2 f)(u_0) \\ \vdots \\ (D_m f)(u_0) \end{bmatrix} \right\rangle = \quad (3.82)$$

$$= \langle e, \text{grad } f(u_0) \rangle. \quad (3.83)$$

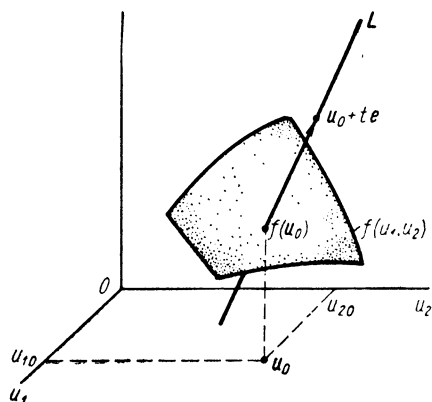


Рис. 3.24. Для получения производной функции  $f$  в точке  $u_0$  по направлению  $e$  пределы берутся вдоль прямой  $L$

Например, если  $f$  — функция преобразования  $R_2$  в  $R$ , заданная как  $f\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = u_1^2 + u_2$ , и если

$$e = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

то производная  $f$  по направлению  $e$  в точке  $0$  равна  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , так как

$$\left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 = (D_1 f)(0) \\ 1 = (D_2 f)(0) \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В заключение рассмотрим преобразование  $f$  пространства  $R_m$  в  $R_n$  с компонентами  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Пусть  $u_0$  — элемент из  $R_m$ . Если  $u$  «близко» к  $u_0$ , функцию  $f(u)$  можно аппроксимировать функцией  $f^a(u)$  вида

$$f^a(u) = f(u_0) + \mathfrak{A}(u - u_0), \quad (3.84)$$

где  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $R_m$  в  $R_n$ . Мы хотели бы выбрать  $\mathfrak{A}$  таким образом, чтобы  $f^a(u)$  была касательной к  $f(u)$  в точке  $u_0$ , т. е. таким образом, чтобы

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\|f^a(u) - f(u)\|}{\|u - u_0\|} = 0. \quad (3.85)$$

Если  $A = (a_{ij})$  — матрица преобразования  $\mathfrak{A}$  (см. § 2.7), то мы хотим выбрать  $a_{ij}$  таким образом, чтобы

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\|f(u) - f(u_0) - A \cdot (u - u_0)\|}{\|u - u_0\|} = 0. \quad (3.86)$$

Если в  $R$  имеются такие  $a_{ij}$ , для которых условие (3.86) удовлетворяется, говорят, что  $f$  дифференцируема в точке  $u_0$  и что матрица  $A$  есть

производная  $\mathbf{f}$  в точке  $\mathbf{u}_0$ .  $\mathbf{A}$  часто называют матрицей Якоби функции  $\mathbf{f}$  в точке  $\mathbf{u}_0$ . Можно показать, что  $n \times m$  матрица  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (D_1 f_1)(\mathbf{u}_0) & (D_2 f_1)(\mathbf{u}_0) & \dots & (D_m f_1)(\mathbf{u}_0) \\ (D_1 f_2)(\mathbf{u}_0) & (D_2 f_2)(\mathbf{u}_0) & \dots & (D_m f_2)(\mathbf{u}_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (D_1 f_n)(\mathbf{u}_0) & (D_2 f_n)(\mathbf{u}_0) & \dots & (D_m f_n)(\mathbf{u}_0) \end{bmatrix}, \quad (3.87)$$

где  $f_1, f_2, \dots, f_n$  — компоненты  $\mathbf{f}$  и  $D_i$  означают частные производные. Элемент, стоящий в  $i$ -м ряду и  $j$ -м столбце матрицы  $\mathbf{A}$ , равен

$$D_j f_i(\mathbf{u}_0). \quad (3.88)$$

Матрицу  $\mathbf{A}$  мы часто будем обозначать  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}_0}$ . В случае, если  $\mathbf{f}$  есть преобразование  $R_n$  в себя, детерминант матрицы  $\mathbf{A}$  называют якобианом  $\mathbf{f}$  в точке  $\mathbf{u}_0$  и пишут

$$\det \mathbf{A} = \det [D_i f_j(\mathbf{u}_0)] = \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (u_1, u_2, \dots, u_n)} \Big|_{\mathbf{u}_0} = \det \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}_0}. \quad (3.89)$$

Будем говорить, что  $\mathbf{f}$  дифференцируема, если  $\mathbf{f}$  имеет производную в любой точке  $\mathbf{u}_0$  из  $R_m$ , и писать

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \text{ или } [D_j f_i(\mathbf{u})] \quad (3.90)$$

для обозначения функции, преобразующей  $R_m$  в множество  $n \times m$  матриц  $\mathfrak{M}(n, m)$  (см. § 2.8), величина которой в точке  $\mathbf{u}$  равна матрице Якоби функции  $\mathbf{f}$  в точке  $\mathbf{u}$ . Эту функцию будем называть производной  $\mathbf{f}$ .

Если

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(u_1, u_2, \dots, u_m) \\ f_2(u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \dots \\ f_n(u_1, u_2, \dots, u_m) \end{bmatrix}, \quad (3.91)$$

то производная от  $\mathbf{f}$ , т. е.  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}$ , будет равна

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

Например, если  $\mathbf{f}$  есть преобразование  $R_3$  в  $R_2$ , заданное как

$$\mathbf{f} \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_1^2 + u_2 \\ u_3^2 - u_2 \end{bmatrix},$$

то

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 2u_1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2u_3 \end{bmatrix}.$$

**Пример 3.34.** Пусть  $\mathfrak{L}$  — линейное преобразование  $R_m$  в  $R_n$  с матрицей  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ . Мы знаем, что  $\mathfrak{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$  для  $\mathbf{u}$  из  $R_m$ , и можем убедиться, что  $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{A}$ .

В частности, если  $\mathfrak{M}$  — линейное преобразование  $R_3$  в  $R_2$  с матрицей  $A =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ то}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathbf{u}} = A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Пример 3.35.** Предположим, что  $f$  — преобразование  $R_2$  в  $R_3$ :

$$f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1^2 + u_2^2 \\ -u_1 u_2 \\ u_1 \sin u_2 \end{bmatrix},$$

тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 2u_1 & 2u_2 \\ -u_2 & -u_1 \\ \sin u_2 & u_1 \cos u_2 \end{bmatrix}$$

и

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что  $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \pi^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  и поэтому  $f$  не однозначно.

### 3.13. «ГЛАДКИЕ» МНОЖЕСТВА ИЗ $R_n$

Используем понятия производной и градиента для изучения понятия «гладкости» подмножеств из  $R_n$ . Грубо говоря, подмножество из  $R_n$  «гладко», если оно в каждой точке имеет касательную плоскость. Уточним это положение. Начнем с ряда определений.

**Определение 3.26.** Пусть  $f(\mathbf{x})$  — непрерывная действительная функция на  $R_n$ . Обозначим через  $S(f)$  подмножество из  $R_n$ , определенное как

$$S(f) = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (3.93)$$

$S(f)$  есть множество точек  $\mathbf{x}$  из  $R_n$ , в которых  $f$  равна нулю.  $S(f)$  называется (непрерывной) гиперповерхностью в  $R_n$ , заданной  $f$ .

**Определение 3.27.** Пусть  $S(f)$  — гиперповерхность в  $R_n$  и  $\mathbf{x}_0$  — элемент  $S(f)$  (т. е.  $f(\mathbf{x}_0) = 0$ ). Будем называть  $\mathbf{x}_0$  регулярной точкой  $S(f)$ , если градиент  $f$  по  $\mathbf{x}$  при  $\mathbf{x}_0$  существует и не равен нулевому вектору. Иначе говоря,  $\mathbf{x}_0$  есть регулярная точка  $S(f)$ , если

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}. \quad (3.94)$$

Заметим, что если  $\mathbf{x}_0$  — регулярная точка  $S(f)$ , то множество

$$L(\mathbf{x}_0) = \left\{ \mathbf{x} : \left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right\rangle = 0 \right\} \quad (3.95)$$

представляет собой вполне определенную гиперплоскость (см. определение 3.15), проходящую через точку  $\mathbf{x}_0$ . Это обстоятельство подводит нас к следующему определению:

**Определение 3.28.** Если  $\mathbf{x}_0$  — регулярная точка гиперповерхности  $S(f)$ , то  $L(\mathbf{x}_0)$  называют гиперплоскостью, касательной к  $S(f)$  в точке  $\mathbf{x}_0$ . Говорят, что вектор  $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$  есть нормаль к  $S(f)$  в точке  $\mathbf{x}_0$ , если

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}_0) = c \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0), \quad c \neq 0. \quad (3.96)$$

Иначе говоря,  $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$  — ненулевой вектор, коллинеарный градиенту  $f$  в точке  $\mathbf{x}_0$ . Отметим, что если  $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$  — нормаль к  $S(f)$  в регулярной точке  $\mathbf{x}_0$ , то касательная гиперплоскость  $L(\mathbf{x}_0)$  определяется уравнением

$$L(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} : \langle \mathbf{n}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0\}. \quad (3.97)$$

Пусть  $f$  — действительная функция, заданная на  $R_n$ . Будем называть  $f$  гладкой, если:

- 1)  $f$  дифференцируема [т. е.  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$  существует, см. выражение (3.68)];
- 2) градиент  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$  есть непрерывная функция, преобразующая  $R_n$  в себя.

**Определение 3.29.** Если  $f$  — гладкая функция и если каждая точка  $\mathbf{x}_0$  из  $S(f)$  регулярна, то говорят, что  $S(f)$  есть гладкая гиперповерхность. Заметим, что гладкая гиперповерхность имеет вполне определенную касательную гиперплоскость в каждой точке.

**Пример 3.36.** Пусть  $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$ , где  $\mathbf{a}$  — некоторый ненулевой вектор из  $R_n$ ;  $f$  есть гладкая функция, множество  $S(f)$  — гиперплоскость  $L$ , проходящая через начало координат и заданная соотношением  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0$ ; касательная гиперплоскость  $L(\mathbf{x}_0)$  в любой точке  $\mathbf{x}_0$  из  $S(f)$  есть само множество  $S(f)$  ( $=L$ ).

**Пример 3.37.** Пусть  $f$  — действительная функция на  $R_2$ , заданная как  $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ , является гладкой; множество  $S(f)$  есть окружность единичного радиуса (рис. 3.25) и касательная гиперплоскость  $L$

к  $S(f)$  в точке  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  есть

прямая  $x_1 + x_2 - \sqrt{2} = 0$  (как показано на рис. 3.25). Читателю следует рассмотреть этот пример, имея в виду определение 3.22.

Мы можем теперь сформулировать определение «гладкого» множества в  $R_n$ . Пусть  $f_1, f_2, \dots, f_{n-k}$  —  $n-k$  различных гладких функций на  $R_n$ , где  $1 \leq k \leq n-1$ , а  $S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$  обозначает пересечение [см. уравнение (2.10)] гиперповерхностей  $S(f_1), S(f_2), \dots, S(f_{n-k})$ , т. е.

$$S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k}) = S(f_1) \cap S(f_2) \cap \dots \cap S(f_{n-k}). \quad (3.98)$$

Иными словами,  $S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$  есть множество точек  $\mathbf{x}$  из  $R_n$ , в которых все  $f_i, i = 1, 2, \dots, n-k$  равны 0, т. е.

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k}) &= \\ &= \{\mathbf{x} : f_1(\mathbf{x}) = 0 \text{ и } f_2(\mathbf{x}) = 0 \text{ и } \dots \text{ и } f_{n-k}(\mathbf{x}) = 0\}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

**Определение 3.30.** Будем говорить, что  $S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$  есть гладкое  $k$ -мерное многообразие в  $R_n$ , если для каждой точки  $\mathbf{x}_0$  из  $S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$   $n-k$  векторов  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}\right)(\mathbf{x}_0), \left(\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}\right)(\mathbf{x}_0), \dots, \left(\frac{\partial f_{n-k}}{\partial \mathbf{x}}\right)(\mathbf{x}_0)$  линейно независимы [см. уравнение (2.26)].

Если  $S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$  — гладкое  $k$ -мерное многообразие, то каждая из гиперповерхностей  $S(f_i)$  гладкая. Следовательно, если  $\mathbf{x}_0$  — элемент  $S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$ , то касательная гиперплоскость  $L_i(\mathbf{x}_0)$  к  $S(f_i)$

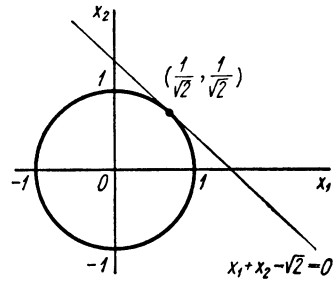


Рис. 3.25. Множество  $S(f)$  из примера 3.37

в точке  $\mathbf{x}_0$  определена для  $i = 1, 2, \dots, n - k$ . Пусть  $M(\mathbf{x}_0)$  обозначает пересечение гиперплоскостей  $L_i(\mathbf{x}_0)$ :

$$M(\mathbf{x}_0) = L_1(\mathbf{x}_0) \cap L_2(\mathbf{x}_0) \cap \dots \cap L_{n-k}(\mathbf{x}_0) = \quad (3.100)$$

$$= \left\{ \mathbf{x} : \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right\rangle = 0 \text{ и } \left\langle \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right\rangle = 0 \text{ и } \dots \right. \\ \left. \dots \text{ и } \left\langle \frac{\partial f_{n-k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right\rangle = 0 \right\}. \quad (3.101)$$

Будем называть  $M(\mathbf{x}_0)$  касательной плоскостью к  $S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$  в точке  $\mathbf{x}_0$ . Таким образом, гладкое  $k$ -мерное многообразие имеет касательную плоскость в каждой точке.

**Пример 3.38.** Пусть  $f_1(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}^1, \mathbf{x} \rangle$  и  $f_2(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}^2, \mathbf{x} \rangle$ , где  $\mathbf{a}^1$  и  $\mathbf{a}^2$  — линейно независимые векторы в  $R_n$ . Функции  $f_1$  и  $f_2$  — гладкие; множество  $S(f_1, f_2)$  есть  $n - 2$ -мерное многообразие и касательная плоскость  $M(\mathbf{x}_0)$  к  $S(f_1, f_2)$  в любой точке  $\mathbf{x}_0$  из  $S(f_1, f_2)$  есть само множество  $S(f_1, f_2)$ .

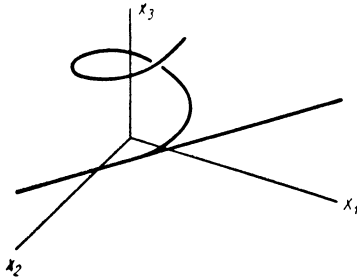


Рис. 3.26. Множество  $S(f_1, f_2)$  из примера 3.39.

**Пример 3.39.** Пусть  $f_1$  — действительная функция на  $R_3$ , заданная как  $f_1 \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = x_1 - \sin x_3$ ,

и  $f_2$  — действительная функция;  $f_2 \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = x_2 - \cos x_3$ .  $f_1$  и  $f_2$  — гладкие; одномерное многообразие  $S(f_1, f_2)$  в  $R_3$  представляет собой винтовую линию (рис. 3.26), и, например, касательная

$$M \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \text{ к } S(f_1, f_2) \text{ в точке } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

есть пересечение плоскостей  $x_1 - x_3 = 0$  и  $x_2 - 1 = 0$ .

**Определение 3.31.** Пусть  $S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$  есть гладкое  $k$ -мерное многообразие в  $R_n$  и пусть  $\mathbf{x}_0$  — элемент из  $S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$ . Будем считать, что вектор  $\mathbf{p}$  трансверсален к  $S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$  в точке  $\mathbf{x}_0$ , если

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0 \text{ для всех } \mathbf{x} \text{ из } M(\mathbf{x}_0). \quad (3.102)$$

Заметим, что  $\mathbf{p}$  трансверсален к  $S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$  в точке  $\mathbf{x}_0$  в том и только в том случае, когда  $\mathbf{p}$  есть линейная комбинация (см. § 2.6)  $n - k$  векторов  $\left( \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{x}_0)$ ,  $\left( \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{x}_0)$ ,  $\dots$ ,  $\left( \frac{\partial f_{n-k}}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{x}_0)$ . Это понятие трансверсальности очень важно для изучения материала гл. 5. Вектор  $\mathbf{p}$  трансверсален к  $S(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$  в точке  $\mathbf{x}_0$ , кроме того, в том случае, если  $\mathbf{p}$  удовлетворяет  $k$  соотношениям

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}^j - \mathbf{x}_0 \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (3.103)$$

где  $\mathbf{x}^j$  — элементы из  $M(\mathbf{x}_0)$  такие, что векторы  $\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_0$  линейно независимы.

### 3.14. ИНТЕГРАЛЫ

Интеграл от функции  $f$  есть функция  $g$ , производная от которой равна  $f$ . Уточним это понятие.

Предположим, что  $f$  — действительная функция, определенная на замкнутом интервале  $[a, b]$  из  $R$ , и пусть  $g$  — непрерывная функция, преобразующая  $[a, b]$  в  $R$ . Будем говорить, что  $g$  есть первообразная функция для  $f$ , если существует счетное подмножество  $A$  из  $[a, b]$  такое, что если  $t$  принадлежит  $[a, b] - A$  [см. уравнения (2.4)], то  $g$  имеет производную при  $t$ , т. е.  $g'(t) = f(t)$ . Заметим, что если  $g$  и  $h$  — две первообраз-

ные к  $f$ , то разность  $g - h$  есть константа на  $[a, b]$ <sup>1</sup>. Если  $f$  есть кусочно-непрерывная функция на  $[a, b]$  (см. § 3.11), то можно показать, что существует функция  $g$ , являющаяся первообразной  $f$ . Например, если  $f$  — ступенчатая функция (см. пример 3.31 и § 3.15), т. е., если имеется конечное число элементов  $t_0, t_1, \dots, t_n$  из  $[a, b]$ , причем  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < b$ , таких, что  $f$  равна постоянным величинам  $c_i$  на каждом из (открытых) интервалов  $(t_i, t_{i+1})$ , тогда функция  $g$ , определенная как

$$g(t) = c_i(t - t_i) + \sum_{j=0}^{i-1} c_j(t_{j+1} - t_j) \quad (3.104)$$

для  $t$  из  $[t_i, t_{i+1}]$ , есть первообразная к  $f$ . Функцию типа  $g(t)$  часто называют кусочно-линейной. Это приводит к следующему определению.

**Определение 3.32. Интегралы.** Если  $f$  есть действительная кусочно-непрерывная (т. е. регулярная) функция, определенная на (закрытом) интервале  $[a, b]$ , и если  $g$  — первообразная к  $f$ , то разность  $g(t_2) - g(t_1)$  для  $t_2, t_1$  из  $[a, b]$  называют (определенным) интегралом от  $t_1$  до  $t_2$  (или просто интегралом  $f$ ) и записывают

$$g(t_2) - g(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau. \quad (3.105)$$

Используем символ  $\sup_{\tau \in I} |f(\tau)|$ , где  $I$  — интервал, для обозначения максимального значения  $|f(\tau)|$  на интервале  $I$ , если этот максимум существует, и для обозначения наибольшей нижней границы множества чисел  $M$ , т. е.  $|f(\tau)| \leq M$  для всех  $\tau$  из  $I$ , если этот максимум не существует. Число  $\sup_{\tau \in I} |f(\tau)|$  будем называть верхней границей  $f(\tau)$  на  $I$ . В § 3.15 мы

покажем, что если  $f$  кусочно-непрерывна, то существуют такие числа  $M$ , что  $|f(\tau)| \leq M$  для всех  $\tau$  из  $I$ . Важные свойства интеграла от функции собраны в следующей теореме, которая приводится без доказательства (см. [51]).

**Теорема 3.8.** Если  $f$  и  $h$  — кусочно-непрерывные функции, заданные на  $[a, b]$ , и если  $c$  — элемент из  $R$ , то для  $t_1, t_2$  и  $t$  из  $[a, b]$  справедливо:

а) 
$$\int_{t_1}^{t_2} [f + h](\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} h(\tau) d\tau; \quad (3.106)$$

б) 
$$\int_{t_1}^{t_2} cf(\tau) d\tau = c \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau; \quad (3.107)$$

в) 
$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(\tau)| d\tau \leq (t_2 - t_1) \sup_{\tau \in [a, b]} |f(\tau)|; \quad (3.108)$$

г) если  $f$  непрерывна, то непрерывная функция  $\int_{t_1}^t f(\tau) d\tau$  дифференцируема в любой точке  $t$  из  $[a, b]$  и

д) 
$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{t_1}^t f(\tau) d\tau \right] = f(t);$$

е) 
$$\int_{t_1}^t f(\tau) d\tau + \int_t^{t_2} f(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau; \quad (3.109)$$

е) если  $\int_a^b |f(\tau)| d\tau = 0$ ,

<sup>1</sup> Это следует из теоремы о конечных приращениях (см. [51]).

то существует счетное подмножество  $A$  из  $[a, b]$ , возможно «пустое», такое, что  $f(\tau) = 0$ , если  $\tau \in [a, b] - A$ . В частности,

$$\int_a^b |f(\tau)| d\tau = 0$$

означает, что  $f(\tau) = 0$  для всех  $\tau$  из  $[a, b]$ , в случае, если  $f$  непрерывна и  $f(\tau) = 0$  при всех  $\tau$  из  $[a, b]$ , когда  $f$  непрерывна справа, т. е.  $f(\tau+) = f(\tau)$  для всех  $\tau$  из  $[a, b]$ ;

ж) если имеется счетное подмножество  $A$  из  $[a, b]$ , такое, что  $f(\tau) = h(\tau)$  для всех  $\tau$  из  $[a, b] - A$ , то

$$\int_a^b f(\tau) d\tau = \int_a^b h(\tau) d\tau.$$

Иначе говоря, две кусочно-непрерывные функции  $f$  и  $h$  могут различаться в счетном числе точек и тем не менее иметь одинаковые интегралы. Например, если  $f(\tau)$  — непрерывная функция на  $[a, b]$  и  $h(\tau) = f(\tau)$  для  $\tau = (a, b)$ , т. е.  $f(a) \neq h(a)$  и  $f(b) \neq h(b)$  только в двух точках  $a$  и  $b$ , то

$$\int_a^b f(\tau) d\tau = \int_a^b h(\tau) d\tau.$$

Эти свойства интегралов будут неоднократно использоваться в дальнейшем. Предположим теперь, что  $f$  — функция, преобразующая  $[a, b]$  в  $R_n$  с компонентами  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Интеграл от  $f$  можно определить через его компоненты.

**Определение 3.33.** Если  $f$  — кусочно-непрерывная функция, то интеграл от  $f$  на интервале от  $t_1$  до  $t_2$  (или просто интеграл от  $f$ ) есть элемент из  $R_n$ , компонентами которого являются интегралы от  $f_i$  на интервале от  $t_1$  до  $t_2$  или

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} f_1(\tau) d\tau \\ \int_{t_1}^{t_2} f_2(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_1}^{t_2} f_n(\tau) d\tau \end{bmatrix}. \quad (3.110)$$

Свойства интегралов, перечисленные в теореме 3.8, имеют естественные аналогии для интегралов от векторных функций. Например, свойство в) [уравнение (3.108)] для интеграла от векторной функции выглядит следующим образом:

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau \right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(\tau)\| d\tau \leq (t_2 - t_1) \sup_{\tau \in [a, b]} \|f(\tau)\|. \quad (3.111)^1$$

<sup>1</sup>  $\sup_{\tau \in [a, b]} \|f(\tau)\|$  есть наибольшая нижняя граница множества чисел  $M$ , таких, что  $\|f(\tau)\| \leq M$  для всех  $\tau$  из  $[a, b]$ .

Свойство е) записывается в виде: если  $\int_a^b \|f(\tau) d\tau\| = 0$ , то существует счетное подмножество  $A$  из  $[a, b]$ , такое, что  $f(\tau) = 0$ , если  $\tau \in [a, b] - A$ ; в частности, из равенства

$$\int_a^b \|f(\tau)\| d\tau = 0$$

следует, что  $f(\tau) = 0$  для всех  $\tau$  из  $[a, b]$ , если  $f$  непрерывна, и для всех  $\tau$  из  $[a, b]$ , если  $f$  непрерывна справа. Другое важное свойство интеграла от векторной функции связано с линейными преобразованиями. Если  $\mathfrak{A}$  — линейное преобразование  $R_n$  в  $R_m$ , то

$$\mathfrak{A} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau \right] = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{A}[f(\tau)] d\tau. \quad (3.112)$$

Это соотношение можно записать в виде

$$A \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} f_1(\tau) d\tau \\ \int_{t_1}^{t_2} f_2(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_1}^{t_2} f_n(\tau) d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{1j} f_j(\tau) \right\} d\tau \\ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{2j} f_j(\tau) \right\} d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{mj} f_j(\tau) \right\} d\tau \end{bmatrix}, \quad (3.113)$$

где  $A = (a_{ij})$  есть  $m \times n$  матрица преобразования  $\mathfrak{A}$ .

Наконец, предположим, что  $F$  есть функция преобразования интервала  $[a, b]$  в множество  $\mathfrak{M}(n, m)$  (см. § 2.8) матриц размера  $n \times m$ . Другими словами,  $F(t)$  для  $t$  из  $[a, b]$  есть  $n \times m$  матрица, элементы которой мы обозначим через  $f_{ij}(t)$  для  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $j = 1, 2, \dots, m$ . Имеем

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1m}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_{nm}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.114)$$

Заметим, что  $f_{ij}$  есть функции преобразования  $[a, b]$  в  $R$ . Будем говорить, что матричная функция  $F(t)$  кусочно-непрерывна (или непрерывна), если каждая из функций  $f_{ij}(t)$  кусочно-непрерывна (или непрерывна). Имея это в виду, дадим следующее определение.

**Определение 3.34.** Если  $F$  — кусочно-непрерывная матричная функция, то интеграл от  $F$  в пределах от  $t_1$  до  $t_2$  (или просто интеграл от  $F$ ) есть элемент множества  $\mathfrak{M}(n, m)$ , элементы которого есть интегралы от  $f_{ij}$  на интервале  $t_1 - t_2$ , т. е.

$$\left( \int_{t_1}^{t_2} F(\tau) d\tau \right)_{ij} = \int_{t_1}^{t_2} f_{ij}(\tau) d\tau \quad (3.115)$$



или

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} f_{11}(\tau) d\tau & \int_{t_1}^{t_2} f_{12}(\tau) d\tau & \dots & \int_{t_1}^{t_2} f_{1m}(\tau) d\tau \\ \int_{t_1}^{t_2} f_{21}(\tau) d\tau & \int_{t_1}^{t_2} f_{22}(\tau) d\tau & \dots & \int_{t_1}^{t_2} f_{2m}(\tau) d\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{t_1}^{t_2} f_{n1}(\tau) d\tau & \int_{t_1}^{t_2} f_{n2}(\tau) d\tau & \dots & \int_{t_1}^{t_2} f_{nm}(\tau) d\tau \end{bmatrix}. \quad (3.116)$$

Снова заметим, что свойства интегралов, отмеченные в теореме 3.8, имеют аналогии и для интегралов матричных функций. Существуют и специфические свойства матричных интегралов, которые нам потребуются для дальнейшего изложения. Они сформулированы в следующей теореме.

**Теорема 3.9.** Пусть  $\mathbf{F}(t)$  — кусочно-непрерывная функция преобразования интервала  $[a, b]$  в множество  $n \times m$  матриц;  $\mathbf{P}$  — заданная (постоянная) матрица размера  $p \times n$ ;  $\mathbf{Q}$  — (постоянная) матрица размера  $m \times q$  и  $\mathbf{v}$  — заданный (постоянный) вектор в  $R_m$ . Тогда

а)  $\mathbf{PF}(t)\mathbf{Q}$  — кусочно-непрерывная функция преобразования интервала  $[a, b]$  в множество  $p \times q$  матриц и

$$\int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{PF}(\tau)\mathbf{Q}] d\tau = \mathbf{P} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\tau) d\tau \right\} \mathbf{Q}; \quad (3.117)$$

б)  $\mathbf{F}(t)\mathbf{v}$  — кусочно-непрерывная функция преобразования интервала  $[a, b]$  в  $R_m$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\mathbf{F}(\tau)\mathbf{v}\} d\tau = \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\tau) d\tau \right\} \mathbf{v}. \quad (3.118)$$

Обратимся к примерам, иллюстрирующим понятие интеграла и некоторые из его следствий.

**Пример 3.40.** Пусть  $f$  — функция, преобразующая  $[0, T]$  в  $R$ , заданная как  $f(t) = e^t$ . Имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} e^\tau d\tau = e^{t_2} - e^{t_1}$$

и

$$\int_0^T e^\tau d\tau = e^T - 1.$$

Если  $g$  — функция, преобразующая  $[0, T]$  в  $R$ , заданная как  $g(t) = t + 1$ , то

$$\int_{t_1}^{t_2} g(\tau) d\tau = \frac{t_2^2 - t_1^2}{2} + t_2 - t_1$$

и

$$\int_0^T g(\tau) d\tau = \frac{T^2}{2} + T.$$

Очевидно, что

$$\int_0^T \{e^\tau + (\tau + 1)\} d\tau = e^T - 1 + \frac{T^2}{2} + T = \int_0^T e^\tau d\tau + \int_0^T (\tau + 1) d\tau.$$

**Пример 3.41.** Пусть  $f$  преобразует  $[0, T]$  в  $R_3$  и задана как  $f(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ \sin t \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} e^\tau d\tau \\ \int_{t_1}^{t_2} \sin \tau d\tau \\ \int_{t_1}^{t_2} 1 \cdot d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t_2} - e^{t_1} \\ -\cos t_2 + \cos t_1 \\ t_2 - t_1 \end{bmatrix}.$$

**Пример 3.42.** Пусть функция  $F$  преобразует  $[0, T]$  в множество матриц размера  $2 \times 2$  и задана как  $F(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ -1 & t \end{bmatrix}$ .

Тогда

$$\int_0^T F(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} e^T - 1 & 0 \\ -T & \frac{T^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Если  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  и  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , то  $PF(t)Q = \begin{bmatrix} t - 1 & 0 \\ e^t & 0 \end{bmatrix}$

и

$$\int_0^T PF(\tau)Q d\tau = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} - T & 0 \\ 1 - e^T & 0 \end{bmatrix} = P \left\{ \int_0^T F(\tau) d\tau \right\} Q.$$

Если  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , то  $F(t)v = \begin{bmatrix} e^t \\ t - 1 \end{bmatrix}$

и

$$\int_0^T F(\tau)v d\tau = \begin{bmatrix} e^T - 1 \\ \frac{T^2}{2} - T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^T - 1 & 0 \\ -T & \frac{T^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left\{ \int_0^T F(\tau) d\tau \right\} v.$$

### 3.15. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Выше уже рассматривался вопрос о множестве функций, имеющих общие свойства для случая множества кусочно-непрерывных функций. Обычно множества функций являлись векторными пространствами. Теперь мы хотели бы ввести для такого рода множества функций понятие расстояния, совместимое с понятиями суммы и произведения. По сути дела, векторное пространство функций с соответствующей функцией расстояния можно назвать функциональным пространством. Уточним это понятие и рассмотрим его на нескольких важных примерах.

**Определение 3.35. Функциональное пространство**<sup>1</sup>. Пусть  $\mathfrak{F}$  — подпространство векторного пространства  $\mathfrak{F}(R_m, R_n)$  всех функций преобра-

<sup>1</sup> См. литературу [196] и [205]. Это определение — частный случай понятия, известного как топологическое векторное пространство. Последнее понятие является весьма общим.

зования  $R_m$  в  $R_n$  или подпространство векторного пространства  $\mathfrak{F}([a, b], R_n)$  всех функций преобразования интервала  $[a, b]$  в  $R_n$  и  $d$  — расстояние на  $\mathfrak{F}$  (см. определение 3.1). Будем называть  $\mathfrak{F}$  функциональным пространством, если оно обладает свойствами:

1) пусть  $f$  и  $g$  — заданные элементы  $\mathfrak{F}$ , а  $\{f_k\}$  и  $\{g_k\}$  — последовательности из  $\mathfrak{F}$ , сходящиеся к  $f$  и  $g$  соответственно [т. е.  $d(f_k, f) \rightarrow 0$  и  $d(g_k, g) \rightarrow 0$ ]. Последовательность  $f_k + g_k$  сходится к  $f + g$ , т. е.

$$d(f_k + g_k, f + g) \rightarrow 0. \quad (3.119)$$

2) пусть  $f$  — заданный элемент из  $\mathfrak{F}$  и  $r$  — элемент из  $R$ , а  $\{f_k\}$  из  $\mathfrak{F}$  и  $\{r_k\}$  из  $R$  — последовательности, сходящиеся к  $f$  и  $r$  соответственно. Последовательность  $r_k f_k$  сходится к  $rf$ , т. е.

$$d(r_k f_k, rf) \rightarrow 0. \quad (3.120)$$

Обратимся к некоторым важным определениям функциональных пространств. Начнем с рассмотрения множества всех ограниченных функций преобразования интервала  $[a, b]$  в  $R_n$ .

**Определение 3.36. Ограниченная функция.** Функцию  $f$  преобразования  $[a, b]$  в  $R_n$  называют ограниченной, если существует число  $M$  из  $R$ ,  $M > 0$ , такое, что

$$\|f(t)\| \leq M \text{ для любого } t \text{ из } [a, b]. \quad (3.121)$$

Пусть  $\mathfrak{B}([a, b], R)$  обозначает следующее множество:

$$\mathfrak{B}([a, b], R_n) = \{f : f \text{ — ограниченная функция из } [a, b] \text{ в } R_n\}. \quad (3.122)$$

Нетрудно заметить, что  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$  есть векторное пространство, являющееся подпространством множества  $\mathfrak{F}([a, b], R_n)$  всех функций, преобразующих  $[a, b]$  в  $R_n$ . Введем понятие расстояния на  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$ , которое превратит последнее в функциональное пространство.

**Определение 3.37. Норма функции.** Пусть  $f$  — элемент из  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$ , т. е.  $f$  — ограниченная функция из  $[a, b]$  в  $R_n$ . Нормой  $f$ ,  $\|f\|$ , по определению является наибольшая нижняя граница множества чисел  $M$  такая, что  $\|f(t)\| \leq M$  для любого  $t$  из  $[a, b]$ <sup>1</sup>. В частности, если  $f$  непрерывна, то

$$\|f\| = \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\| = \max_{t \in [a, b]} \|f(t)\|, \quad (3.123)$$

поскольку  $\|f(t)\|$  действительно достигает максимума на  $[a, b]$  (см. теорему 3.7). Если  $f$  и  $g$  — элементы из  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$ , т. е. если обе функции  $f$  и  $g$  ограничены, то расстояние между  $f$  и  $g$ ,  $d(f, g)$ , есть просто норма  $f - g$ , иначе говоря,

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sup \|f(t) - g(t)\|. \quad (3.124)^2$$

Покажем, что  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$  вместе с понятием расстояния есть функциональное пространство.

**Теорема 3.10.** Функция  $d$ , определяемая уравнением (3.124), действительно является расстоянием на  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$ . Множество  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$  есть функциональное пространство по отношению к этому определению расстояния.

<sup>1</sup>  $\|f\|$  часто называют наибольшим значением  $\|f(t)\|$  на интервале  $[a, b]$ .

<sup>2</sup>  $\sup_{t \in [a, b]} \|f(t) - g(t)\|$  следует понимать как наибольшую нижнюю границу множества чисел  $M$ , таких, что  $\|f(t) - g(t)\| \leq M$  для любого  $t$  из  $[a, b]$ , т. е.  $\sup_{t \in [a, b]} \|f(t) - g(t)\|$  есть наибольшее значение  $\|f(t) - g(t)\|$ .

**Доказательство.** Убедимся прежде всего в том, что функция  $d$ , определяемая уравнением (3.124), обладает свойствами 1) и 3) определения 3.1. Очевидно, что свойством 2) она обладает, так как  $\|f(t) - g(t)\| = \|g(t) - f(t)\|$  для любого  $t$  из  $[a, b]$ . Что касается неравенства треугольника [свойство 3) определения 3.1], то для  $f, g$  и  $h$  из  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$  справедливо

$$\|f(t) - h(t)\| \leq \|f(t) - g(t)\| + \|g(t) - h(t)\| \quad (3.125)$$

для всех  $t$  из  $[a, b]$ . Это означает

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [a, b]} \|f(t) - h(t)\| &\leq \sup_{t \in [a, b]} (\|f(t) - g(t)\| + \|g(t) - h(t)\|) \leq \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} \|f(t) - g(t)\| + \sup_{t \in [a, b]} \|g(t) - h(t)\|. \end{aligned} \quad (3.126)^1$$

Очевидно, что  $d(f, g) \geq 0$  и  $d(f, f) = 0$ . Далее, если  $d(f, g) = 0$ , то для любого заданного  $t_0$  из  $[a, b]$  должно быть  $\|f(t_0) - g(t_0)\| = 0$ , так что  $f(t_0) = g(t_0)$ . Мы показали, что  $d$  есть функция расстояния на  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$ .

Проверим, удовлетворяется ли условие 1) определения 3.35. Пусть  $f$  и  $g$  — элементы из  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$ , тогда

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad (3.127)$$

Отсюда следует, что

$$\|f_k + g_k - (f + g)\| \leq \|f_k - f\| + \|g_k - g\|, \quad (3.128)$$

т. е.

$$d(f_k + g_k, f + g) \leq d(f_k, f) + d(g_k, g). \quad (3.129)$$

Из последнего выражения видно, что условие 1) удовлетворяется.

Для уравнения (3.127) имеем

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup_{t \in [a, b]} \|(f + g)(t)\| = \sup_{t \in [a, b]} \|f(t) + g(t)\| \leq \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\| + \sup_{t \in [a, b]} \|g(t)\| = \|f\| + \|g\|. \end{aligned} \quad (3.130)^2$$

Предлагаем читателю самому убедиться в том, что условие 2) определения 3.35 удовлетворяется.

$\mathfrak{B}([a, b], R_n)$  является полным (см. § 3.5) по отношению к расстоянию  $d$ , определяемому по уравнению (3.124). Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что если  $f_j$  есть равномерно сходящаяся последовательность (см. определение 3.11), то любая  $f_j(t)$  — равномерно сходящаяся последовательность в  $R_n$ , которая должна сходиться к элементу из  $R_n$ . Обозначим этот элемент через  $f(t)$ . Если задано  $\varepsilon > 0$ , то существует  $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ , при котором  $\|f_j - f_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$ , если  $j, k > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ . Если  $j > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ , то  $\|f_j - f\| < \varepsilon$ . Это следует из соотношения  $\|f_j(t) - f(t)\| \leq \|f_j(t) - f_k(t)\| + \|f_k(t) - f(t)\|$ , которое справедливо для любого  $t$  из  $[a, b]$  (т. е. при  $t \in [a, b]$  можно выбрать  $k(t) > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  так, чтобы  $\|f_{k(t)}(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ).

<sup>1</sup> Уравнение (3.126) обосновывается следующим образом. Если  $M$  и  $N$  — числа такие, что  $\|f(t) - g(t)\| \leq M$  и  $\|g(t) - h(t)\| \leq N$  для любого  $t$  из  $[a, b]$ , то  $\|f(t) - h(t)\| + \|g(t) - h(t)\| \leq M + N$  для любого  $t$  из  $[a, b]$  и, следовательно,  $\|f(t) - h(t)\| \leq M + N$  для любого  $t$  из  $[a, b]$ . Читатель должен иметь это в виду применительно к утверждениям, аналогичным уравнению (3.126).

<sup>2</sup> Сравнить с уравнением (3.126).

Обозначим через  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  множество всех непрерывных функций, преобразующих  $[a, b]$  в  $R_n$ :  
 $\mathfrak{C}([a, b], R_n) = \{f: f \text{ есть непрерывное преобразование } [a, b] \text{ в } R_n\}$ . (3.131)

По теореме 3.7 множество  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  содержится в множестве  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$ ; более того, оно является его подпространством (см. § 3.10). Иначе говоря, непрерывные функции, определенные на компактном интервале, ограничены. Расстояние  $d$ , определенное уравнением (3.124) по отношению к  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$ , есть расстояние между непрерывными функциями. С помощью теоремы 3.11 мы покажем, что если  $f_k$  — последовательность непрерывных функций, сходящаяся к  $f$ , то  $f$  должна быть непрерывна. Это доказывает, что  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  есть функциональное пространство. Действительно,  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  — полное функциональное пространство по отношению к этому расстоянию.

**Теорема 3.11.** Если  $f_k$  — последовательность непрерывных функций, сходящаяся к  $f$ , то  $f$  непрерывна.

**Доказательство.** Пусть  $t_0$  — некоторая точка из  $[a, b]$  и  $\{t_m\}$  — последовательность из  $[a, b]$ , которая сходится к  $t_0$ . Покажем, что  $f(t_m)$  сходится к  $f(t_0)$ . Предположим, задано  $\varepsilon > 0$ ; существует  $K$  такое, что при

$$k > K \text{ имеем } \sup_{t \in [a, b]} \|f_k(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

При этом справедливо соотношение

$$\|f(t_m) - f(t_0)\| \leq \|f(t_m) - f_k(t_m)\| + \|f_k(t_m) - f_k(t)\| + \|f_k(t) - f(t_0)\|. \quad (3.132)$$

Так как  $f_k$  непрерывна, то существует  $M$ , начиная с которого (т. е. при  $m > M$ )

$$\|f_k(t_m) - f_k(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.133)$$

Из уравнения (3.121) следует, что при  $m > M$

$$\|f(t_m) - f(t_0)\| < \varepsilon \quad (3.134)$$

и, следовательно,  $f(t_m)$  сходится к  $f(t_0)$ . Последнее и доказывает непрерывность  $f$ .

**Упражнение 3.13.** На основании теоремы 3.11 необходимо показать, что множество непрерывных функций  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  есть векторное пространство. У к а з а н и е: используйте теоремы 3.7, 3.11 и 3.10.

Теорему 3.11 часто формулируют так: предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция.

Заметим, что теорема остается справедливой и в том случае, когда слова «непрерывная» повсюду заменяются на «кусочно-непрерывную» функцию.

**Теорема 3.11а.** Если  $f_k$  — последовательность кусочно-непрерывных функций, которая сходится к  $f$  [по отношению к расстоянию  $d$  из уравнения (3.124)], то и  $f$  кусочно-непрерывна. Это опять-таки означает, что множество всех кусочно-непрерывных функций, преобразующих  $[a, b]$  в  $R_n$ , является функциональным пространством, если можно показать, что каждая непрерывная функция преобразования  $[a, b]$  в  $R_n$  ограничена. Покажем, что если функция  $f$  кусочно-непрерывна, то существует последовательность  $s_m$  ступенчатых функций (см. § 3.14)<sup>1</sup>, для которых  $\|s_m - f\|$  сходится к 0.

<sup>1</sup> Напомним, что ступенчатая функция  $s$  определяется следующим образом: если  $t_0, t_1, \dots, t_n$  — элементы из  $[a, b]$ , причем  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  и  $s = \text{const} = c_i$  на каждом из открытых интервалов  $(t_i, t_{i+1})$ , то такая функция  $s$  называется ступенчатой.

**Теорема 3.12.** Если  $f$  — кусочно-непрерывная функция, преобразующая  $[a, b]$  в  $R_n$ , то существует последовательность  $s_m$  ступенчатых функций, такая, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $M(\varepsilon)$  такое, что при  $m > M(\varepsilon)$  для любого  $t$  из  $[a, b]$  справедливо неравенство  $\|s_m(t) - f(t)\| < \varepsilon$ .

**Доказательство.** Для доказательства воспользуемся рис. 3.27. Пусть  $N$  — некоторое целое число. Предположим, что  $t \in [a, b]$  и  $t \neq a$  или  $b$ . Существуют элементы  $i(t)$  и  $r(t)$  в  $[a, b]$ , такие, что если  $\sigma, \tau$  принадлежат к  $(i(t), t)$  или к  $(t, r(t))$ , то  $\|f(\sigma) - f(\tau)\| \leq \frac{1}{N}$ . Это справедливо, потому что  $f(t+)$  и  $f(t-)$  существуют<sup>1</sup>. Аналогично существуют элементы  $r(a)$  и  $i(b)$  такие, что если, например,  $\sigma, \tau$  принадлежат  $(a, r(a))$ , то  $\|f(\sigma) -$

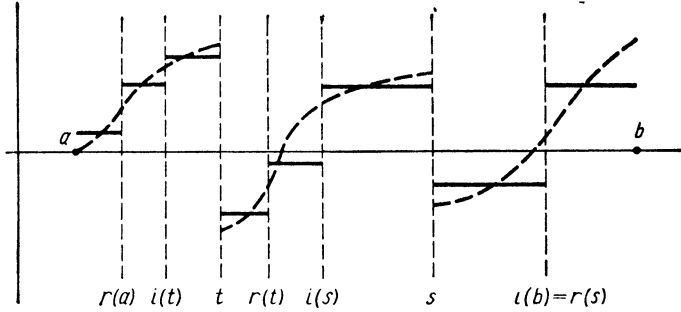


Рис 3.27. К доказательству теоремы 3.12. Кривая, показанная прерывистой линией, — кусочно-непрерывная функция  $f(t)$ ; сплошная кривая — аппроксимирующая ступенчатая функция  $s_N(t)$

$\|f(\tau)\| \leq \frac{1}{N}$ . Выберем теперь элементы  $s_1, s_2, \dots, s_p$  на  $[a, b]$  таким образом, чтобы каждое  $t$  из  $[a, b]$  находилось хотя бы в одном из интервалов  $[a, r(a)], (i(s_1), r(s_1)), \dots, (i(s_p), r(s_p)), (i(b), b]$ . Мы можем это сделать в силу свойства компактных множеств Гейне—Бореля (см. § 3.6, свойство 2). Рассмотрим множество  $\{a, b, s_1, s_2, \dots, s_p, r(a), i(b), i(s_1), r(s_1), \dots, i(s_p), r(s_p)\}$  и определим точки  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  как точки этого множества, расположенные в порядке возрастания. Точка  $t_i$  находится в одном из интервалов  $[a, r(a)], \dots$  и т. д. Точка  $t_{i+1}$  находится в том же интервале, что и  $t_i$ , или является  $r(s_q)$  для некоторого  $q$ . Следовательно, если  $\sigma, \tau$  принадлежат  $(t_i, t_{i+1})$ , то  $\|f(\sigma) - f(\tau)\| \leq \frac{1}{N}$ . Если определить  $s_N$  как

$$\left. \begin{aligned} s_N(t_i) &= f(t_i); \\ s_N(t) &= f\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) \text{ для } t \text{ из } (t_i, t_{i+1}), \end{aligned} \right\} \quad (3.135)$$

то последовательность ступенчатых функций  $s_N$  для  $N = 1, 2, \dots$  и есть искомая последовательность.

<sup>1</sup> Иначе говоря,  $\frac{1}{N} > 0$  означает, что существует интервал, скажем,  $i(t)$  такой, что  $\|f(\tau) - f(t-)\| \leq \frac{1}{N}$  для  $\tau$  из  $(i(t), t)$ . Из неравенства треугольника следует, что  $\|f(\sigma) - f(\tau)\| \leq \|f(\sigma) - f(t-)\| + \|f(t-) - f(\tau)\| \leq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N}$ .

Обозначим функциональное пространство всех кусочно-непрерывных функций преобразования  $[a, b]$  в  $R_n$  через  $\mathfrak{F}([a, b], R_n)$ :

$$\mathfrak{F}([a, b], R_n) = \{f : f \text{ есть кусочно-непрерывная функция, преобразующая } [a, b] \text{ в } R_n\}. \quad (3.136)$$

Важным следствием теорем 3.11, 3.11а и 3.12 является тот факт, что множество непрерывных функций  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  и множество кусочно-непрерывных функций  $\mathfrak{F}([a, b], R_n)$  являются замкнутыми подмножествами множества всех ограниченных функций  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$  (см. определение 3.7) и, следовательно, полны (см. § 3.5), поскольку множество  $\mathfrak{B}([a, b], R_n)$  является полным. Таким образом, каждая непрерывная или кусочно-непрерывная функция преобразования  $[a, b]$  в  $R_n$  ограничена. Этот результат будет использован нами в § 3.18 и 3.19.

Другим важным следствием этих теорем и свойств интегралов [уравнение (3.111)] является то обстоятельство, что если  $f_k$  есть последовательность элементов из  $\mathfrak{F}([a, b], R_n)$ , которая сходится к  $f$  в смысле расстояния по уравнению (3.124), то последовательность  $\int_a^b f_k(\tau) d\tau$  сходит

ся к  $\int_a^b f(\tau) d\tau$ . Это, естественно, приводит к известному результату, относящемуся к почленному интегрированию рядов. Иначе говоря, интеграл есть непрерывная линейная функция на  $\mathfrak{F}([a, b], R_n)$ .

Рассмотрим множество непрерывных функций  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  и введем иное понятие расстояния на этом множестве.

**Определение 3.38.** Пусть  $f$  — элемент из  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$ . Норма  $f$ , которую будем обозначать как  $\|f\|_1$ <sup>1</sup>, есть просто интеграл эвклидовой нормы для  $f(t)$  на интервале  $[a, b]$ :

$$\|f\|_1 = \int_a^b \|f(\tau)\| d\tau. \quad (3.137)$$

Если  $f$  и  $g$  — элементы из  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$ , то расстояние  $d_1(f, g)$  между  $f$  и  $g$  есть просто норма  $f - g$ , т. е.

$$d_1(f, g) = \|f - g\|_1 = \int_a^b \|f(\tau) - g(\tau)\| d\tau. \quad (3.138)$$

Легко показать, что уравнение (3.138) действительно определяет расстояние на  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  и что  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  оказывается функциональным пространством по отношению к этому понятию расстояния.

**Упражнение 3.14.** Требуется доказать, что уравнение (3.138) определяет расстояние на  $\mathfrak{C}[0, 1], R$  и что  $\mathfrak{C}([0, 1], R)$  есть функциональное пространство по отношению к этому расстоянию. У к а з а н и е: использовать теорему 3.8; в частности, полезны свойства в) и е) [уравнение (3.108)].

Уравнение (3.137) имеет смысл и для функции  $f$ , кусочно-непрерывной на  $[a, b]$ , т. е.  $\int_a^b \|f(\tau)\| d\tau$  существует. Имеются, однако, такие кусочно-непрерывные функции  $g$ , не равные нулю, для которых  $\int_a^b \|g(\tau)\| d\tau = 0$ . Это обстоятельство не позволяет определить расстоя-

<sup>1</sup> Индекс 1 вводится, чтобы отличать это понятие нормы (один) от понятия, сформулированного в определении 3.37.

ние на  $\mathfrak{F}([a, b], R_n)$  с помощью уравнения (3.138), так как нарушается свойство 1) определения 3.1. Для того чтобы обойти это затруднение, будем называть две кусочно-непрерывные функции  $f$  и  $g$  «подобными», или эквивалентными (или почти везде совпадающими), если множество  $A$  точек  $t$  из  $[a, b]$ , в которых  $f(t) \neq g(t)$ <sup>1</sup> является счетным. Нетрудно заметить, что  $f$  и  $g$  эквивалентны в том и только в том случае, если

$$\int_a^b \|f(\tau) - g(\tau)\| d\tau = 0.$$

Обозначим через  $[f]$  множество всех  $h$  из  $\mathfrak{F}([a, b], R_n)$ , «подобных»  $f$ :

$$[f] = \{h : f \text{ подобна } h\}. \quad (3.139)$$

Если теперь определить функцию  $d_1$ , положив

$$d_1([f], [g]) = \int_a^b \|h(\tau) - k(\tau)\| d\tau, \quad (3.140)$$

где  $h$  — любой элемент множества  $[f]$  и  $k$  — любой элемент из  $[g]$ , то легко видеть, что  $d_1$  есть расстояние на множестве всех  $[f]$ . Хотя, строго говоря, для определения  $d_1$  следует использовать уравнение (3.140) и рассматривать множество  $[f]$ , в дальнейшем мы обойдем это обстоятельство и будем рассматривать в качестве определения расстояния  $d_1$  на  $\mathfrak{F}([a, b], R_n)$  уравнение (3.138). Имея это в виду, будем рассматривать  $\mathfrak{F}([a, b], R_n)$  как функциональное пространство по отношению к  $d_1$ . Отметим, что  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  и  $\mathfrak{F}([a, b], R_n)$  не являются полными (см. § 3.5) по отношению к расстоянию  $d_1$ .

Вернемся к множеству непрерывных функций  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  и введем еще одно определение расстояния на этом множестве.

**Определение 3.39.** Пусть  $f$  и  $g$  — элементы из  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$ . Скалярное (или внутреннее) произведение  $f$  и  $g$ , обозначенное через  $[f, g]$ , определяется уравнением

$$[f, g] = \int_a^b \langle f(\tau), g(\tau) \rangle d\tau, \quad (3.141)$$

где  $\langle f(\tau), g(\tau) \rangle$  есть обычное скалярное произведение на  $R_n$  [см. уравнение (2.86)]. Покажем, что это определение имеет смысл и что внутреннее произведение  $[f, g]$  действительно является положительно определенным внутренним произведением на векторном пространстве  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$ .

**Теорема 3.13.**  $[f, g]$  есть положительно определенное внутреннее произведение на  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$ .

**Доказательство** (см. § 2.11). Свойства 1, 2 и 3 произведения  $[f, g]$  непосредственно следуют из соответствующих свойств скалярного произведения  $\langle f, g \rangle$ . Проверим, обладает ли  $[f, g]$ , например, свойством 2). Если  $r \in R$  и  $f, g \in \mathfrak{C}([a, b], R_n)$ , то

$$\begin{aligned} [rf, g] &= \int_a^b \langle rf(\tau), g(\tau) \rangle d\tau = \int_a^b r \langle f(\tau), g(\tau) \rangle d\tau = \\ &= r \int_a^b \langle f(\tau), g(\tau) \rangle d\tau = r[f, g]. \end{aligned} \quad (3.142)$$

<sup>1</sup> См. § 2.2.



Рассмотрим теперь  $[f, f]$  [см. уравнение (2.84)] и покажем, что оно неотрицательно:

$$[f, f] = \int_a^b \langle f(\tau), f(\tau) \rangle d\tau. \quad (3.143)$$

Но  $\langle f(\tau), f(\tau) \rangle \geq 0$  для любого  $\tau$  из  $[a, b]$ . По теореме 3.8в имеем

$$\begin{aligned} [f, f] &= \int_a^b \langle f(\tau), f(\tau) \rangle d\tau = \int_a^b |\langle f(\tau), f(\tau) \rangle| d\tau \geq \\ &\geq \left| \int_a^b \langle f(\tau), f(\tau) \rangle d\tau \right| \geq 0. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Наконец, пусть  $f_0$  — элемент из  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  такой, что  $[f, f_0] = 0$  для каждого элемента  $f$  из  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$ . В частности,  $[f_0, f_0] = 0$ . Но

$$[f_0, f_0] = \int_a^b \langle f_0(\tau), f_0(\tau) \rangle d\tau = \int_a^b \|f_0(\tau)\|^2 d\tau = 0, \quad (3.145)$$

и на основании теоремы 3.8е  $\|f_0(\tau)\|^2 = 0$  для любого  $\tau$  из  $[a, b]$ . Очевидно, что  $f_0 = 0$ , и теорема доказана.

На основании этой теоремы можно определить понятие нормы аналогично § 2.13 [см. уравнение (2.94)] для элементов из  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$ . Будем называть ее нормой (два) и обозначать  $\|f\|_2$ :

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \sqrt{[f, f]} = \left[ \int_a^b \langle f(\tau), f(\tau) \rangle d\tau \right]^{1/2} = \\ &= \left[ \int_a^b \|f(\tau)\|^2 d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Неравенство Шварца (2.87) справедливо для внутреннего произведения  $[f, g]$ ; поэтому

$$\|f, g\| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad (3.147)$$

или эквивалентно

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \langle f(\tau), g(\tau) \rangle d\tau \right| &\leq \\ &\leq \left[ \int_a^b \langle f(\tau), f(\tau) \rangle d\tau \right]^{1/2} \left[ \int_a^b \langle g(\tau), g(\tau) \rangle d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Уравнение (3.148) будет использовано в гл. 10.

Такое понятие нормы позволяет определить расстояние  $d_2$  в  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  [сравнить с уравнением (3.1)]:

$$\begin{aligned} d_2(f, g) &= \|f - g\|_2 = \sqrt{[f - g, f - g]} = \\ &= \left[ \int_a^b \langle f(\tau) - g(\tau), f(\tau) - g(\tau) \rangle d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Предлагаем читателю убедиться в том, что  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  есть функциональное пространство по отношению к этому понятию расстояния. Заметим лишь, что  $\mathfrak{C}([a, b], R_n)$  не является полным по отношению

к расстоянию  $d_2$ . Заметим также, что это понятие расстояния применимо и к множеству кусочно-непрерывных функций, если согласиться рассматривать «подобные» функции одинаковыми [сравнить с уравнениями (3.139) и (3.140)].

**Пример 3.43.** Пусть  $f(t) = \sin t$  для  $t$  из  $[0, \pi]$ . Тогда  $f(t)$  есть элемент из  $\mathfrak{C}([0, \pi], R)$  и мы имеем

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{t \in [0, \pi]} |\sin t| = 1; \\ \|f\|_1 &= \int_0^\pi |\sin t| dt = 2; \\ \|f\|_2 &= \sqrt{\int_0^\pi \sin^2 t dt} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Отметим, что  $\|f\| < \|f\|_2 < \|f\|_1$ .

**Пример 3.44.** Пусть  $f(t) = 1$  для  $t$  из  $[0, 1]$  и  $g(t)$  — «пик», заданный как

$$g(t) = \begin{cases} 8t & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}; \\ 4-8t & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ 0 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (\text{рис. 3.28})$$

$f(t)$  и  $g(t)$  — элементы из  $\mathfrak{C}([a, b], R)$  и

$$\|f\| = 1; \quad \|g\| = 2; \quad \|f - g\| = 1;$$

$$\|f\|_1 = 1; \quad \|g\|_1 = \frac{1}{2}; \quad \|f - g\|_1 = \frac{3}{4};$$

$$\|f\|_2 = 1; \quad \|g\|_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \|f - g\|_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

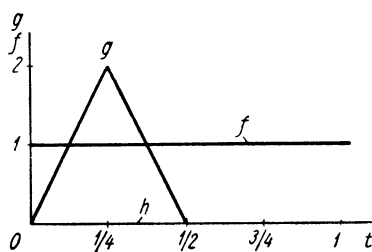


Рис. 3.28. Функции  $f$ ,  $g$  и  $h$  из примера 3.44;  $h(t) = 0$  при любом  $t \in [0, 1]$

Отметим, что  $\|f - g\|_2 < \|f - g\|_1 < \|f - g\|$  и  $\|f\| < \|g\|$ , но  $\|g\|_1 < \|f\|_1$ .

Выберем,  $h(t) = 0$  для всех  $t$  из  $[0, 1]$  и используем понятие расстояния между элементами функционального пространства для определения, какая из двух функций  $f$  или  $g$  ближе к  $h$ . Если использовать расстояние  $d$ , то

$$d(f, h) = \|f\| = 1 \quad \text{и} \quad d(g, h) = \|g\| = 2.$$

Следовательно,  $f$  ближе к  $h$ , чем  $g$ . С другой стороны, если использовать расстояния  $d_1$ , то

$$d_1(f, h) = \|f\|_1 = 1 \quad \text{и} \quad d_1(g, h) = \|g\|_1 = \frac{1}{2}$$

и по отношению к этому расстоянию  $g$  ближе к  $h$ , чем  $f$ . Аналогично  $g$  ближе к  $h$ , чем  $f$  относительно  $d_2$ . Таким образом, мы видим, что «близость» функций зависит от того, какое понятие расстояния используется.

### 3.16. ФУНКЦИОНАЛЫ

Функционал — это вещественная функция векторного пространства (обычно функционального пространства). После предварительного обсуждения мы определим это понятие более строго и четко.

Пусть  $L$  — действительная функция на  $R_N$ . Если  $y$  — элемент из  $R_N$  с компонентами  $y_1, y_2, \dots, y_N$ , то

$$L(y) = L(y_1, y_2, \dots, y_N). \quad (3.149)$$

Если  $f(t)$  — функция преобразования  $R$  в  $R_N$  с компонентами  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$ , то  $L[f(t)]$  есть функция преобразования  $R$  в  $R$  (т. е. функция времени) и

$$L[f(t)] = L[f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)]. \quad (3.150)$$

Если предположить, что  $L$  дифференцируема по  $y_i$ , то  $\frac{\partial L}{\partial y_i}$  будет функцией, преобразующей  $R_N$  в  $R$ , и поэтому  $\frac{\partial L}{\partial y_i} [\mathbf{f}(t)]$  — функция преобразования из  $R$  в  $R$ , которую будем обозначать  $\frac{\partial L}{\partial f_i(t)}$ . Итак,

$$\frac{\partial L}{\partial f_i(t)} [\mathbf{f}(t)] = \frac{\partial L}{\partial y_i} [\mathbf{f}(t)] = \frac{\partial L}{\partial y_i} [f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)] = (D_i L) [\mathbf{f}(t)]. \quad (3.151)$$

Часто будет представлять интерес отыскание минимума (или максимума) функции типа

$$J(\mathbf{f}) = \int_a^b L[\mathbf{f}(t)] dt = \int_a^b L[f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)] dt, \quad (3.152)$$

где  $L$  — непрерывная функция преобразования  $R_N$  в  $R$ ;  $\mathbf{f}$  — непрерывно или кусочно-непрерывно преобразует  $[a, b]$  в  $R_N$  и  $f_1, f_2, \dots, f_N$  — компоненты  $\mathbf{f}$ . Функция  $J$  есть функция преобразования из  $\mathfrak{F}([a, b], R_N)$  [см. уравнение (3.136)] в  $R$ . Если  $T \in [a, b]$ , то можно задать вещественную функцию  $J(T, \mathbf{f})$ , положив

$$J(T, \mathbf{f}) = \int_a^T L[\mathbf{f}(t)] dt = \int_a^T L[f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)] dt. \quad (3.153)$$

Функцию  $J(T, \mathbf{f})$  будем называть функционалом. Пусть  $L$  — дифференцируема по  $g_i$  и производная от  $L$  по  $y_i$ ,  $\frac{\partial L}{\partial y_i}$  [см. (3.77)] есть непрерывная функция из  $R_N$  в  $R$ . Мы можем определить новый функционал  $\frac{\partial J(T, \mathbf{f})}{\partial f_i(t)}$ , положив

$$\frac{\partial J(T, \mathbf{f})}{\partial f_i(t)} = \int_a^T \frac{\partial L}{\partial f_i(t)} [\mathbf{f}(t)] dt = \int_a^T \frac{\partial L}{\partial y_i} [f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)] dt. \quad (3.154)$$

$\frac{\partial J(T, \mathbf{f})}{\partial f_i(t)}$  будем называть частной производной от  $J(T, \mathbf{f})$  по  $f_i(t)$ . Уравнение (3.154) будет использоваться в дальнейшем довольно часто.

Заметим, наконец, что для каждой фиксированной функции  $\mathbf{f}$  функция  $J(T, \mathbf{f})$  от  $T$  имеет производную во всех точках за исключением счетного множества точек  $A$  из  $[a, b]$ . Если  $T$  не принадлежит к  $A$ , то производная от  $J(T, \mathbf{f})$  по  $T$ ,  $\frac{\partial J(T, \mathbf{f})}{\partial T}$  равна

$$\frac{\partial J(T, \mathbf{f})}{\partial T} = L[\mathbf{f}(T)] = L[f_1(T), f_2(T), \dots, f_N(T)]. \quad (3.155)$$

В частности, если  $\mathbf{f}$  непрерывна, то

$$\frac{\partial J(T, \mathbf{f})}{\partial T} = L[\mathbf{f}(T)] \text{ для всех } T \text{ из } [a, b]. \quad (3.156)$$

**Пример 3.45.** Пусть  $L(\mathbf{y}) = 1$  для всех  $\mathbf{y}$  из  $R_N$ ;  $L$  непрерывна и  $\frac{\partial L}{\partial y_i}(\mathbf{y}) = 0$  для  $i = 1, 2, \dots, N$  и  $\mathbf{y}$  из  $R_N$ . Если  $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}([a, b], R_N)$ , то

$$J(T, \mathbf{f}) = \int_a^T 1 dt = T - a$$

и

$$\frac{\partial J(T, f)}{\partial T} = 1.$$

**Пример 3.46.** Пусть

$$L(y) = \sum_{i=1}^N c_i |y_i|,$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_N$  — положительные константы. В этом случае  $L$  непрерывна и

$$L[f(t)] = \sum_{i=1}^N c_i |y_i|$$

для  $f$  из  $\mathfrak{F}([a, b], R_N)$ . Следовательно,

$$J(T, f) = \int_a^T \sum_{i=1}^N c_i |f_i(t)| dt = \sum_{i=1}^N c_i \int_a^T |f_i(t)| dt$$

и

$$\frac{\partial J(T, f)}{\partial T} = \sum_{i=1}^N c_i |f_i(T)|.$$

Заметим, что  $\frac{\partial J(T, f)}{\partial f_i(t)}$  в общем случае неопределенна.

**Пример 3.47.** Пусть

$$L(y) = \frac{1}{2} \langle y, y \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N y_i^2.$$

$L$  непрерывна и

$$L[f(t)] = \frac{1}{2} \langle f(t), f(t) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i^2(t)$$

для  $f$  из  $\mathfrak{F}([a, b], R_n)$ . Следовательно,

$$J(T, f) = \frac{1}{2} \int_a^T \sum_{i=1}^N f_i^2(t) dt; \quad \frac{\partial J(T, f)}{\partial T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i^2(T)$$

и

$$\frac{\partial J(T, f)}{\partial f_i(t)} = f_i(T).$$

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### 3.17. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Поведение всех физических систем, которые мы будем рассматривать, описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом параграфе дадим определение понятия системы обыкновенных дифференциальных уравнений, объясним, что понимают под решением системы, и рассмотрим начальные и граничные условия, а также изучим влияние параметров системы. В последующих параграфах дадим доказательство теоремы существования и единственности решения и детально изучим линейные системы.

Дифференциальным уравнением называют уравнение, в которое входят производные неизвестной функции. Например, уравнения

$$\dot{x}(t) = -x(t) \tag{3.157}$$

и

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = 1 + \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \tag{3.158}$$

являются дифференциальными уравнениями. В уравнении (3.157) неизвестная функция  $x$  есть функция одной действительной переменной. Это уравнение называют обыкновенным дифференциальным уравнением. В уравнении (3.158) неизвестная функция  $F$  есть функция нескольких переменных. Такие дифференциальные уравнения называют дифференциальными уравнениями в частных производных. На протяжении всей книги вместо термина «обыкновенное дифференциальное уравнение» мы будем использовать термин «дифференциальное уравнение». Уточним понятие дифференциального уравнения.

**Определение 3.40.** Пусть  $F$  — непрерывная<sup>1</sup> функция преобразования открытого подмножества  $A$  размерности  $R_{n+2}$  (см. определение 3.5) в  $R$ . В этом случае уравнение

$$F [x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t), t] = 0 \quad (3.159)$$

называют дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка<sup>2</sup>. Действительная функция  $\psi(t)$ , определенная на открытом интервале  $(t_1, t_2)$ , называется решением дифференциального уравнения (3.159), если

- а)  $\psi(t)$  непрерывна на  $(t_1, t_2)$ ;
- б) точка

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \vdots \\ \psi^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

принадлежит множеству  $A$  для  $t$  из  $(t_1, t_2)$ ;

$$в) F [\psi(t), \dot{\psi}(t), \dots, \psi^{(n)}(t), t] \equiv 0 \text{ для } t \text{ из } (t_1, t_2). \quad (3.160)$$

Если уравнение (3.159) можно записать в виде

$$x^{(n)}(t) - G [x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t), t] = 0 \quad (3.161a)$$

или

$$x^{(n)}(t) = G [x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t), t], \quad (3.161б)$$

будем говорить, что уравнение разрешено относительно высшей производной.

Порядок дифференциального уравнения соответствует порядку высшей производной, встречающейся в уравнении. Решение уравнения связано с интервалом определения. Например, функция  $ce^{-t}$  есть решение уравнения (3.157) на любом интервале  $(t_1, t_2)$ .

**Пример 3.48.** Пусть  $F$  — функция из  $R_3$  в  $R$ , заданная как  $F(y_1, y_2, y_3) = y_2 - \frac{1}{y_3}$ . Функция  $F$  непрерывна на открытых множествах:

$$A^+ = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} : y_3 > 0 \right\}$$

и

$$A^- = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} : y_3 < 0 \right\}.$$

<sup>1</sup> Хотя относительно  $F$  могут быть сделаны и более «слабые» предположения, непрерывность вполне достаточна для наших целей.

<sup>2</sup>  $x^{(n)}(t)$  обозначает  $n$ -ю производную  $\frac{dx^n}{dt^n}$  от  $x(t)$  по  $t$ .

Пусть  $A = A^+ \cup A^-$ , тогда  $F$  непрерывна на  $A$  и мы можем рассматривать дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - \frac{1}{t} = 0.$$

Для  $t > 0$  решением уравнения будет  $x(t) = \log t + c$  ( $c$  — произвольная постоянная); для  $t < 0$  решением будет  $x(t) = \log(-t) + c$ .

Дадим определение системы дифференциальных уравнений первого порядка <sup>1</sup>.

**Определение 3.41.** Пусть  $f_1, f_2, \dots, f_n$  — непрерывные функции от произведения открытого множества  $A_n$  из  $R_n$  и открытого интервала  $(T_1, T_2)$  (который может представлять собой все  $R$ , быть задан как множество  $\{t : t < T_2\}$  и т. д.), т. е. из  $A_n \times (T_1, T_2)$  [см. уравнение (2.5)] <sup>2</sup> в  $R$ . Предположим, что частные производные

$$\frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.162)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — координаты  $R_n$ , являются непрерывными функциями преобразования  $A_n \times (T_1, T_2)$  в  $R$ . Система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t]; \\ \dot{x}_2(t) &= f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t]; \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t] \end{aligned} \right\} \quad (3.163)$$

называется системой из  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка;  $x_i$  часто называют зависимыми переменными, а  $t$  — независимой переменной. Уравнения (3.163) записывают в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t], \quad (3.164)$$

где

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] = \begin{bmatrix} f_1[x_1(t), \dots, x_n(t), t] \\ f_2[x_1(t), \dots, x_n(t), t] \\ \vdots \\ f_n[x_1(t), \dots, x_n(t), t] \end{bmatrix}. \quad (3.165)$$

$n$ -мерную функцию  $\psi(t)$ , определенную на подынтервале  $(t_1, t_2)$  из  $(T_1, T_2)$ , называют решением системы, если

а)  $\psi(t)$  непрерывна на  $(t_1, t_2)$ ;

$$\text{б) } \psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{bmatrix}$$

есть элемент из  $A_n$  для всех  $t$  из  $(t_1, t_2)$ ;

<sup>1</sup> Данное определение может быть более общим, но этого не требуется для настоящей книги.

<sup>2</sup>  $A \times (T_1, T_2)$  можно рассматривать как подмножество (открытое) из  $R_{n+1}$ .

в)  $\dot{\psi}(t) = f[\psi(t), t]$  для всех  $t$  из  $(t_1, t_2)$ , за исключением, возможно, счетного подмножества  $A$  элементов из  $(t_1, t_2)$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= f_1[\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t), t]; \\ \dot{\psi}_2(t) &= f_2[\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t), t]; \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{\psi}_n(t) &= f_n[\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t), t]. \end{aligned} \right\} \quad (3.166)$$

Системы  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка будут все время встречаться в основных разделах книги. Они описывают широкий класс физических систем. Решения таких систем соответствуют функциям преобразования  $R$  (или интервала из  $R$ ) в  $R_n$  и могут пониматься как траектории в пространстве  $R_n$ . Часто мы будем исключать  $t$  из описания этих траекторий, т. е. записывать уравнения траекторий только через переменные  $x_i$ .

**Пример 3.49.** Пусть  $f_1(x_1, x_2, t) = x_2$  и  $f_2(x_1, x_2, t) = -x_1$ ,  $f_1$  и  $f_2$  непрерывны на  $R_n \times R (=R_{n+1})$  так же, как и производные от них:  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$ ;  $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$ ;  $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -1$  и  $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$ . Итак, мы имеем систему двух дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -x_1^1.$$

Функция  $\psi(t)$  с компонентами

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t; \\ \psi_2(t) &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t; \end{aligned}$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные интегрирования, как нетрудно заметить, является решением системы. Если  $\psi(t)$  есть  $2 \times 2$  матрица:

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

то  $\mathbf{x}(t) = \Psi(t) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$  — решение системы. Заметим, что  $\Psi(t)$  есть ортогональная матрица (см. пример 2.30) для любого  $t$ . Траекториями системы являются окружности на плоскости  $x_1, x_2$ , уравнения которых можно записать в виде  $x_1^2 + x_2^2 = c_1^2 + c_2^2$ .

При изучении дифференциальных уравнений, описывающих поведение физических систем, мы обычно отыскиваем решения, удовлетворяющие дополнительным «граничным условиям». Например, уравнение (3.157) можно рассматривать как уравнение, описывающее процесс радиоактивного распада, где  $x(t)$  — количество вещества, оставшееся после  $t$  сек. Если  $x(0) = c$  — количество вещества в начале процесса, то отыскивается такое решение уравнения (3.157), для которого  $\psi(0) = c$ . Иначе говоря, решение должно удовлетворять начальному условию  $\psi(0) = c$ .

**Определение 3.42.** Пусть  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$  — система  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка [см. определение (3.41)], где  $\mathbf{f}$  определена на множестве  $A_n \times (T_1, T_2)$ , а  $(\mathbf{x}, t_0)$  — точка из  $A_n \times (T_1, T_2)$ . Эту точку назовем начальной точкой, а числа  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ , являющиеся компонентами  $\mathbf{x}_0$ , — начальными значениями. Будем называть соотношения

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.167)$$

начальными условиями.

<sup>1</sup> При записи систем уравнений часто будем опускать время  $t$ .

О решении системы  $\psi(t)$  говорят, что оно удовлетворяет начальным условиям или является решением задачи с начальными значениями, если

$$\psi(t_0) = x_0, \quad (3.168)$$

т. е.

$$\psi_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.169)$$

В следующем параграфе мы покажем, что при сделанных нами предположениях решение задачи с заданными начальными условиями существует.

**Пример 3.50.** Рассмотрим систему из примера 3.49:  $\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = -x_1$ . Пусть  $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\right)$  — начальные условия, т. е. 1 и 0 — начальные значения, тогда

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

есть решение задачи с заданными начальными значениями.

Укажем, что имеется  $n$  начальных условий и все эти условия должны удовлетворяться в один и тот же «момент времени»  $t_0$ . В общем случае для того, чтобы полностью определить решение системы  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка, требуется  $n$  условий. Будем называть эти условия граничными. Пусть, например, имеем систему  $\dot{x}(t) = f[x(t), t]$  с  $f$ , определенной на  $R_{n+1}$ , и требуется найти решение  $\psi(t)$  такое, чтобы  $\psi_1(t_1) = x_{10}, \psi_2(t_2) = x_{20}, \dots, \psi_n(t_n) = x_{n0}$ , где  $t_1, t_2, \dots, t_n$  — точки из  $R$  и  $x_i$  заданы. В этом случае соотношения  $x_i(t_i) = x_{i0}$  образуют множество граничных условий.

**Пример 3.51.** Вновь рассмотрим систему  $\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = -x_1$  из примеров 3.49 и 3.50. Пусть  $x_1(0) = 1, x_2(\pi) = 0$  — граничные условия. Тогда  $\psi_1(t) = \cos t, \psi_2(t) = -\sin t$  — решение системы, удовлетворяющее этим условиям.

В дальнейшем будем рассматривать системы, зависящие от параметров:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u, t] \quad (3.170)$$

или, в записи через компоненты,

$$x_i(t) = f_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1, u_2, \dots, u_m, t] \quad (3.171)$$

где  $f$  — непрерывная функция на множестве  $A_n \times B_m \times (T_1, T_2)$  [ $A_n$  и  $B_m$  — открытые подмножества из  $R_n$  и  $R_m$  соответственно], а частные производные  $f$  по компонентам  $x$  и  $u$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \text{ и } \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \quad (3.172)$$

также непрерывны на множестве  $A_n \times B_m \times (T_1, T_2)$ , которое рассматривается как подмножество из  $R_{n+m}$ . Систему вида (3.170) будем называть системой  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка, зависящих от параметров  $u_1, u_2, \dots, u_m$ . Решение такой системы, зависящее от параметра  $u$ , удовлетворяет уравнению

$$\dot{\psi}(t, u) = f[\psi(t), u, t]. \quad (3.173)$$

Более подробно такие системы рассмотрим в следующем параграфе, а их значение для управления — в гл. 4.

**Пример 3.52.** Рассмотрим систему:  $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u$ , где  $u$  — некоторый параметр. Иначе говоря,  $f_1[x_1, x_2, u, t] = x_2$  и  $f_2[x_1, x_2, u, t] = -x_1 + u$ .



Очевидно, что  $f_1$  и  $f_2$  непрерывны и имеют необходимые непрерывные частные производные. Векторная функция  $\psi(t, u)$ , заданная уравнением

$$\psi(u, t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 + \int_0^t -(\sin \tau) u \, d\tau \\ c_2 + \int_0^t (\cos \tau) u \, d\tau \end{bmatrix},$$

является решением системы.

### 3.18. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Ниже будет показано, что решение задачи с начальными значениями для системы  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка существует и единственно. Сначала докажем, что система может быть заменена системой интегральных уравнений, а затем покажем, как с помощью теоремы 3.2 можно получить желаемый результат. Доказательство теоремы достаточно сложно. Необходимо, чтобы читатель хорошо понял формулировку теоремы, и не очень существенно, если он не усвоит так же хорошо ее доказательство.

**Теорема 3.14.**<sup>1</sup> Пусть  $A_n$  — открытое множество из  $R_n$  и  $(T_1, T_2)$  — открытый интервал (который может быть всем  $R$  или множеством  $\{t : t < T_2\}$  и т. д.). Предположим, что

1.1)  $f_1(x, u, t), f_2(x, u, t), \dots, f_n(x, u, t)$  — непрерывные функции, преобразующие  $A_n \times R_m \times (T_1, T_2)$  в  $R$  [см. уравнение (2.5)];

1.2) частные производные  $\partial f_i(x, u, t)/\partial x_j$  — непрерывные функции, преобразующие  $A_n \times R_m \times (T_1, T_2)$  в  $R$ ;

1.3)  $x_0$  — элемент из  $A_n$ ,  $t_0$  — элемент из  $(T_1, T_2)$ ;

1.4)  $u(\tau)$  — кусочно-непрерывная функция, преобразующая  $(T_1, T_2)$  в  $R_m$ .

Существует функция  $\psi(t)$ , преобразующая интервал  $(t_1, t_2)$ , содержащий  $t_0$ , в пространство  $R_n$ , с компонентами  $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ , такая, что

2.1)  $\psi(t)$  непрерывна на  $(t_1, t_2)$  и  $\psi(t) \in A_n$  для  $t$  из  $(t_1, t_2)$ ;

2.2)  $\psi(t_0) = x_0$ ; (3.174)

2.3)  $\psi(t)$  есть решение системы  $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$ , т. е.

$$\dot{\psi}_i(t) = f_i[\psi(t), u(t), t] \quad (3.175)$$

для  $i = 1, 2, \dots, n$  и всех точек  $t$  из  $(t_1, t_2)$ , за исключением, возможно, счетного множества  $A$  точек  $t$  из  $(t_1, t_2)$ . Далее, если  $\varphi(t)$  — другая функция, удовлетворяющая условиям 2.1, 2.2 и 2.3 на интервале  $(s_1, s_2)$ , содержащем  $t_0$  (по условию 2.3), то

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (3.176)$$

для всех  $t$  из  $(s_1, s_2) \cap (t_1, t_2)$  [см. уравнение (2.3)]; иначе говоря, решение единственно.

**Доказательство.** Допустим, мы нашли решение  $\psi(t)$ , такое, что  $\psi(t_0) = x_0$ . Можно утверждать, что

$$\psi(t) = x_0 + \int_0^t f[\psi(\tau), u(\tau), \tau] d\tau. \quad (3.177)$$

<sup>1</sup> См. литературу [46], [51], [180] и [196].

Так как  $\psi(\tau) = f[\psi(\tau), u(\tau), \tau]$  везде, за исключением счетного множества точек  $A$  из  $(t_1, t_2)$ ;  $f$  непрерывна, а  $\psi$  и  $u$  кусочно-непрерывны<sup>1</sup>, то их можно интегрировать для получения соотношения (3.177). С другой стороны, предположим, что  $\psi(t)$  удовлетворяет уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f[x(\tau), u(\tau), \tau] d\tau, \quad (3.178)$$

т. е., что  $\psi(t)$  удовлетворяет уравнению (3.177). Тогда  $\psi(t_0) = x_0$  и  $\psi(t) = f[\psi(t), u(t), t]$  везде, за исключением счетного множества точек  $A$  из  $(t_1, t_2)$ . Попытаемся найти решение интегрального уравнения (3.178).

Пусть  $x_0 \in A_n$  и  $t_0 \in (T_1, T_2)$ . Так как  $A_n$  — открытое множество, существует сфера  $S(x_0, \hat{\lambda})$  с центром в  $x_0$ , целиком содержащаяся в  $A_n$  (см. определение 3.4), и, следовательно, если  $\lambda < \hat{\lambda}$ , замкнутая сфера  $\bar{S}(x_0, \lambda)$  целиком содержится в  $A_n$ . Аналогично мы можем найти  $\mu > 0$ , такое, что замкнутый интервал  $[t_0 - \mu, t_0 + \mu]$  целиком содержится в  $(T_1, T_2)$ . Другими словами, если

$$\|x - x_0\| \leq \lambda \quad \text{и} \quad |t - t_0| \leq \mu, \quad (3.179)$$

то  $x \in A_n$  и  $t \in (T_1, T_2)$ . Далее,  $u(\tau)$  — кусочно-непрерывная функция на  $[t_0 - \mu, t_0 + \mu]$  и, следовательно, существует замкнутая сфера  $S(0, \nu)$  с центром в начале координат пространства  $R_m$ , такая, что  $u(\tau)$  принадлежит  $\bar{S}(0, \nu)$  для всех  $\tau$  из  $[t_0 - \mu, t_0 + \mu]$ . Заметим, теперь, что множество  $\bar{S}(x_0, \lambda) \times \bar{S}(0, \nu) \times [t_0 - \mu, t_0 + \mu]$  замкнуто и ограничено, если его рассматривать как подмножество из  $R_{n+1+m}$ , и, следовательно, компактно (см. § 3.6). Тогда существуют числа  $M$  и  $N$  такие, что если  $x$  и  $t$  удовлетворяют неравенствам (3.179), то

$$\|f[x, u(t), t]\| \leq M \quad (3.180a)$$

и

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} [x, u(t), t] \right| \leq N \quad (3.180b)$$

для  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Выберем  $\rho \leq \mu$ , такое, что для некоторого заданного  $k$ ,  $0 < k < 1$ , удовлетворяется соотношение

$$\rho \leq \min \left\{ \frac{\lambda}{M}, \frac{k}{n^2 N} \right\}. \quad (3.181)$$

Рассмотрим интервал  $[t_0 - \rho, t_0 + \rho]$  и функциональное пространство  $\mathfrak{C}([t_0 - \rho, t_0 + \rho], R_n)$  всех непрерывных функций, преобразующих этот интервал в  $R_n$  с нормой [см. уравнения (3.124) и (3.131)]. Как было показано в § 3.15,  $\mathfrak{C}([t_0 - \rho, t_0 + \rho], R_n)$  является полным. Если  $X$  — подмножество из  $\mathfrak{C}([t_0 - \rho, t_0 + \rho], R_n)$ , определенное, как

$$X = \{\phi : \|\phi(\tau) - x_0\| \leq \lambda \text{ для любого } \tau \text{ из } [t_0 - \rho, t_0 + \rho]\}, \quad (3.182)$$

то нетрудно убедиться, что  $X$  есть замкнутое<sup>2</sup> подмножество из  $\mathfrak{C}([t_0 - \rho, t_0 + \rho], R_n)$  и, следовательно, является полным.

Пусть теперь  $T$  — преобразование  $X$  в себя, заданное соотношением

$$T(\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f[\phi(\tau), u(\tau), \tau] d\tau. \quad (3.183)$$

<sup>1</sup> См. замечания в конце § 3.11.

<sup>2</sup>  $f_m \rightarrow f$  и  $\|f_m - x_0\| \leq \lambda$ , откуда  $\|f - x_0\| \leq \|f - f_m + f_m - x_0\| \leq \|f_m - x_0\| + \|f - f_m\| \leq \lambda + \|f - f_m\|$ , и наше утверждение доказано.

Иначе говоря, если  $\mathfrak{g}(\tau)$  — непрерывная функция на  $[t_0 - \rho, t_0 + \rho]$ , изменяющаяся вблизи  $x_0$ , то  $T(\mathfrak{g})$  — непрерывная функция на  $[t_0 - \rho, t_0 + \rho]$ , величина которой в каждой точке  $t$  задается уравнением (3.183). Теперь убедимся, что  $T$  действительно преобразует  $X$  в себя. При этом заметим

$$\|T(\mathfrak{g})(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f[\mathfrak{g}(\tau), u(\tau), \tau] d\tau \right\| \leq \quad (3.184)$$

$$\leq |t - t_0| \max \|f[\mathfrak{g}(\tau), u(\tau), \tau]\| \leq \quad (3.185)^1$$

$$\leq \rho M \leq \text{по уравнению (3.180a);} \quad (3.186)$$

$$\leq M \frac{\lambda}{M} = \lambda \text{ по уравнению (3.181).} \quad (3.187)$$

Докажем, что  $T$  есть сжатие на  $X$  [см. § 3.5 и уравнение (3.12)]. Покажем, что если  $\mathfrak{g}_1$  и  $\mathfrak{g}_2$  — элементы из  $X$ , то

$$\|T(\mathfrak{g}_1) - T(\mathfrak{g}_2)\| \leq k \|\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_2\|, \quad (3.188)$$

где  $k$  — заданное число между 0 и 1 [см. уравнение (3.181)].

Пусть  $t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$ , тогда

$$T(\mathfrak{g}_1)(t) - T(\mathfrak{g}_2)(t) = \left\| \int_{t_0}^t \{f[\mathfrak{g}_1(\tau), u(\tau), \tau] - f[\mathfrak{g}_2(\tau), u(\tau), \tau]\} d\tau \right\| \leq \quad (3.189)$$

$$\leq \int_{t_0}^t \|f[\mathfrak{g}_1(\tau), u(\tau), \tau] - f[\mathfrak{g}_2(\tau), u(\tau), \tau]\| d\tau \leq \quad (3.190)$$

$$\leq |t - t_0| \max \|f[\mathfrak{g}_1(\tau), u(\tau), \tau] - f[\mathfrak{g}_2(\tau), u(\tau), \tau]\| \leq \quad (3.191)$$

$$\leq \rho n^2 N \|\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_2\| \leq \quad (3.192)$$

по уравнению (3.181).

Переход от неравенства (3.191) к выражению (3.192) требует доказательства. Это можно сделать, воспользовавшись уравнениями (3.70а), неравенством Шварца (2.87) и уравнением (3.180б) (см. упражнение 3.15). Так как  $T$  есть сжатие, то, согласно теореме 3.12, существует единственная функция  $\psi(t)$  из  $X$ , такая, что

$$T(\psi)(t) = \psi(t), \quad (3.193)$$

т. е. 
$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f[\psi(\tau), u(\tau), \tau] d\tau. \quad (3.194)$$

В силу уравнения (3.178) и рассуждений, приведших к нему, мы видим, что  $\psi(t)$  — искомое решение на интервале  $(t_0 - \rho, t_0 + \rho)$ .

Предположим теперь, что  $\hat{\psi}$  и  $\hat{\mathfrak{g}}$  — два решения, определенные на интервалах  $(t_1, t_2)$  и  $(s_1, s_2)$  соответственно. Рассмотрим множество  $(t_1, t_2) \cap (s_1, s_2)$ , которое не может быть пустым, поскольку  $t_0$  принадлежит к нему. Отметим, что

$$(t_1, t_2) \cap (s_1, s_2) = (\max\{t_1, s_1\}, \min\{t_2, s_2\}), \quad (3.195)$$

т. е.  $(t_1, t_2) \cap (s_1, s_2)$  является интервалом  $(m_1, m_2)$ , где  $m_1 = \max\{t_1, s_1\}$  и  $m_2 = \min\{t_2, s_2\}$ . Предположим, что  $\tau$  — точка из  $(m_1, m_2)$ , такая, что

$$\hat{\psi}(\tau) \neq \hat{\mathfrak{g}}(\tau). \quad (3.196)$$

<sup>1</sup> Из уравнения (3.111).

Положим, для определенности, что  $t_0 < \tau < m_2$ . Если  $E$  — множество точек из  $[t_0, \tau)$ , в которых  $\hat{\psi} = \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{B}}$ , то  $E$  имеет верхнюю границу, а следовательно, и наименьшую верхнюю границу, которую мы обозначим через  $\sigma$ <sup>1</sup>. Определим, принадлежит ли  $\sigma$  к  $E$ ? Если  $\sigma \in E$ , то тогда существовал бы открытый интервал при  $\sigma$ ,  $(\sigma - \varepsilon, \sigma + \varepsilon)$ , содержащийся в  $E$ , поскольку мы можем применить наше доказательство условий 2.1, 2.2 и 2.3 теоремы 3.14 к задаче с  $\hat{t}_0 = \sigma$  и  $\hat{x}_0 = \hat{\psi}(\sigma) = \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{B}}(\sigma)$ . Но последнее приведет к тому, что в  $E$  будет содержаться элемент, больший, чем  $\sigma$ . Это невозможно. Следовательно,  $\sigma$  не принадлежит к  $E$ . Однако в  $E$  существует последовательность элементов  $\hat{t}_m$ , которая сходится к  $\sigma$ , так как  $\sigma$  — наименьшая верхняя граница  $E$ . Поскольку  $\mathcal{G}\mathcal{B}$  непрерывна,  $\lim \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{B}}(\hat{t}_m) = \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{B}}(\sigma)$  и  $\psi(t)$  непрерывна,  $\lim \hat{\psi}(\hat{t}_m) = \hat{\psi}(\sigma)$ . Но  $\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{B}}(t_m) = \hat{\psi}(t_m)$  для всех  $m$ , что означает  $\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{B}}(\sigma) = \hat{\psi}(\sigma)$ , т. е.  $\sigma$  принадлежит к  $E$ . Это противоречие доказывает, что неравенство (3.196) выполняться не может, и завершает доказательство теоремы.

**Упражнение 3.15.** Докажите справедливость перехода от уравнения (3.191) к уравнению (3.192). У к а з а н и е: рассмотрите, скажем,  $f_1[\mathcal{G}_1(\tau), u(\tau), \tau] - f_1[\mathcal{G}_2(\tau), u(\tau), \tau]$ . В силу уравнения (3.70а) существует точка  $r\mathcal{G}_1(\tau) + s\mathcal{G}_2(\tau)$ ,  $r + s = 1$ ,  $r, s \geq 0$  в  $A_n$  такая, что  $|f_1[\mathcal{G}_1(s), u(\tau), \tau] - f_1[\mathcal{G}_2(\tau), u(\tau), \tau]| = \left| \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial x} [r\mathcal{G}_1(\tau) + s\mathcal{G}_2(\tau), u(\tau), \tau], \mathcal{G}_1(\tau) - \mathcal{G}_2(\tau) \right\rangle \right|$ . Используйте неравенство Шварца (2.87) и уравнения (3.180б) и (3.45).

Проиллюстрируем доказательство теоремы, проделав все эти выкладки на простом примере.

**Пример 3.53.** Пусть  $A_2$  — все пространство  $R_2$  и  $(T_1, T_2)$  — открытый интервал  $(0, 1)$ . Выберем  $f_1(x_1, x_2, u, t) = x_2 + u$  и  $f_2(x_1, x_2, u, t) = -x_1$ . Если  $u(t) = \frac{1}{t(t-1)}$ , то  $f_1$  и  $f_2$  удовлетворяют условиям 1.1 и 1.2 теоремы 3.14. Пусть  $x_0 = 0$  и  $t_0 = \frac{1}{2}$  — начальные условия. Мы хотим решить систему уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \frac{1}{t(t-1)}; \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.197)$$

Если  $\psi(t)$  — решение системы с  $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= \psi_2(t) + \frac{1}{t(t-1)}; \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.198)$$

Интегрируя, получим

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(t) &= 0 + \int_{t_0}^t \left\{ \psi_2(\tau) + \frac{1}{\tau(\tau-1)} \right\} d\tau; \\ \psi_2(t) &= 0 - \int_{t_0}^t \psi_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3.199)$$

<sup>1</sup>  $\sigma$  удовлетворяет условиям: 1)  $\sigma \geq t$  для всех  $t$  из  $E$  и 2) если  $\sigma' \geq t$  для всех  $t$  из  $E$ , то  $\sigma' \geq \sigma$ .

Таким образом, мы хотим решить систему интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \int_{t_0}^t \left\{ x_2(\tau) + \frac{1}{\tau(\tau-1)} \right\} d\tau; \\ x_2(t) &= - \int_{t_0}^t x_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3.200)$$

Поскольку  $R_2$  открыто и сфера  $S(0, 2)$  содержится в  $R_2$ , то для удобства можно принять  $\lambda = 1$ . Возьмем  $\mu = \frac{1}{4}$  и отметим, что если  $\tau \in \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right]$ , то  $u(\tau) = \frac{1}{\tau(\tau-1)}$  принадлежит сфере  $S\left(0, \frac{16}{3}\right) = \left[ -\frac{16}{3}, \frac{16}{3} \right]$ . Таким образом, мы рассматриваем компактное множество  $S(0, 1) \times \left[ -\frac{16}{3}, \frac{16}{3} \right] \times \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] = \bar{Y}$ . На этом множестве  $\bar{Y}$

$$\|f(x, u(t), t)\| \leq \sqrt{1 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{16}{3}\right) + 1} < 7$$

и

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} [x, u(t), t] \right| \leq 1.$$

Выбрав  $k = \frac{1}{2}$ , будем пытаться найти  $\rho \leq \frac{1}{4}$ , такое, что

$$\rho \leq \min \left\{ \frac{1}{7}, \frac{1}{8} \right\} = \frac{1}{8}.$$

Мы можем принять  $\rho = \frac{1}{8}$  и рассматривать пространство  $\mathcal{C}\left(\left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right], R_2\right)$  и замкнутое подпространство  $X$  этого пространства, определенное как

$$X = \left\{ \phi : \max_{t \in \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right]} \sqrt{\varphi_1^2(t) + \varphi_2(t)^2} \leq 1 \right\}. \quad (3.201)$$

Преобразование  $T$  пространства  $X$  в себя представляется соотношениями

$$T(\phi)(t) = \begin{bmatrix} \int_{1/2}^t \left\{ \varphi_2(\tau) + \frac{1}{\tau(\tau-1)} \right\} d\tau \\ - \int_{1/2}^t \varphi_1(\tau) d\tau \end{bmatrix}. \quad (3.202)$$

Замечаем, что

$$\|T(\phi)(t) - 0\| \leq \left| t - \frac{1}{2} \right| \max_{t \in \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right]} \|f[\phi(\tau), u(\tau), \tau]\| \leq \frac{1}{8} \times 7 \leq 1, \quad (3.203)$$

где  $\rho = \frac{1}{8}$ ,  $M = 7$ ,  $\lambda = 1$ .

Проверим, является ли  $T$  сжатием, т. е. убедимся, что

$$\|T(\phi_1)(t) - T(\phi_2)(t)\| \leq \frac{1}{2} \|\phi_1 - \phi_2\|$$

для любого  $t$  из  $\left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right]$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \|T(\varphi_1)(t) - T(\varphi_2)(t)\| &\leq \int_{1/2}^t \|f[\varphi_1(\tau), u(\tau), \tau] - f[\varphi_2(\tau), u(\tau), \tau]\| d\tau \leq \\ &\leq \left|t - \frac{1}{2}\right| \max_{t \in \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right]} \|f[\varphi_1(\tau), u(\tau), \tau] - f[\varphi_2(\tau), u(\tau), \tau]\| \leq \\ &\leq \frac{1}{8} \times 4 \times 1 \times \|\varphi_1 - \varphi_2\| = \frac{1}{2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \end{aligned} \quad (3.204)$$

где  $\rho = \frac{1}{8}$ ,  $n^2 = 4$ ,  $N = 1$ .

Читателю следует самостоятельно проверить все вычисления. Главным выводом этих рассуждений является то, что существует единственное решение  $\Psi(t)$  системы (3.200), определенное на интервале  $\left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right]$  с  $\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ . Можно показать, что

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(t - \frac{1}{2}\right) & \sin\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ -\sin\left(t - \frac{1}{2}\right) & \cos\left(t - \frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{1/2}^t \frac{\cos\left(\tau - \frac{1}{2}\right)}{\tau(\tau-1)} d\tau \\ \int_{1/2}^t \frac{\sin\left(\tau - \frac{1}{2}\right)}{\tau(\tau-1)} d\tau \end{bmatrix}. \quad (3.205)$$

Прокомментируем теорему 3.14 и ее доказательство.

**Замечание 1.** Мы не делали никаких предположений относительно существования или непрерывности частных производных от  $f_i$  по компонентам  $u_i$  вектора  $u$ . Это будет очень существенно для гл. 5.

**Замечание 2.** Пространство  $R_m$  можно заменить любым его подпространством, содержащим замыкание (см. определение 3.9) области изменения  $u(\tau)$ . Теорема останется справедливой, если мы несколько ослабим сделанные предположения, заменив повсюду пространство  $R_m$  на замыкание области изменения  $u(\tau)$ . Это замечание имеет исключительно большое значение при рассмотрении задачи управления и ограничений в гл. 4.

**Замечание 3.** Теорема является частным результатом, так как существование и единственность решения обосновываются только для некоторого интервала [а именно,  $(t_1, t_2)$ ] около начального времени  $t_0$ . Если читатель вновь рассмотрит пример 3.48, он оценит значение этого замечания. В следующем параграфе мы покажем, что общий результат может быть получен для линейных систем (см. теорему 3.15).

**Замечание 4.** Мы сформулировали и доказали теорему в том виде, в каком она нам потребуется в дальнейшем. Однако условие 1.2 является более строгим, чем это необходимо. Действительно, теорему обычно формулируют и доказывают, заменив условие 1.2 так называемым условием Липшица:

Существует постоянная  $K > 0$ , обладающая тем свойством, что

$$\|f(x_1, u, t) - f(x_2, u, t)\| \leq K \|x_1 - x_2\|$$

для всех  $x_1, x_2$  из  $A_n$ ,  $u$  из  $R_m$  и  $t$  из  $(T_1, T_2)$ . Незначительное изменение доказательства дает тот же результат, если заменить этим условием условие 1.2 (см., например, [25] или [46]).

**Замечание 5.** При формулировке теоремы мы полагали, что  $A_n$  — открытое множество и  $(T_1, T_2)$  — открытый интервал. Эти предположения были сделаны для того, чтобы исключить точки в пространстве и

во времени, в которых решение не может быть определено, т. е. исключить из рассмотрения так называемые «особые» точки. Если, например, рассмотреть систему

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x-2},$$

то не существует решения, проходящего через точку  $x = 2$ . Хотя существуют единственные решения, проходящие через точки, неограниченно близкие к  $x = 2$ . Аналогично отсутствует решение уравнения примера (3.48) в точке  $t = 0$ , т. е. для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}.$$

Теорему 3.14 мы будем очень часто использовать в дальнейшем.

### 3.19. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим специальный класс систем дифференциальных уравнений — так называемые линейные системы. Эти системы имеют большое значение, поскольку они очень часто используются для представления динамического поведения физических систем, встречающихся в инженерной практике. Для систем такого типа можно получить точное аналитическое решение, что в высшей степени способствует успеху общего подхода к практическим задачам. Определим понятие термина «линейная система».

**Определение 3.43.** Пусть  $A_n$  — открытое множество из  $R_n$  и  $(T_1, T_2)$  — открытый интервал (который может быть всем  $R$  или множеством  $\{t : t > T_1\}$  и т. д.) Пусть  $\mathbf{v}(t)$  — кусочно-непрерывная функция из  $(T_1, T_2)$  в  $R_n$  и  $\mathbf{A}(t)$  — непрерывная функция из  $(T_1, T_2)$  в множество  $\mathfrak{M}(n, n)$  всех  $n \times n$  матриц (сравнить с окончанием § 3.14). Тогда система уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (3.206)$$

или эквивалентная ей система уравнений

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + v_i(t), \quad (3.207)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]$  ( $a_{ij}(t)$  — элементы матрицы  $\mathbf{A}(t)$ ) и  $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$  — компоненты  $\mathbf{v}(t)$ , называется линейной системой с вынуждающей функцией  $\mathbf{v}(t)$ . Систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) \quad (3.208)$$

или эквивалентную ей

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (3.209)$$

часто называют однородной (гомогенной, свободной, без входного воздействия) частью линейной системы. Если  $\mathbf{A}(t)$  — матрица, состоящая из постоянных элементов, т. е.

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A} = (a_{ij}) \text{ для любого } t \text{ из } (T_1, T_2), \quad (3.210)$$

то говорят, что такая система является системой с постоянными параметрами (инвариантная по времени или система с постоянными коэффициентами). В противном случае система называется системой с переменными параметрами.

**Пример 3.54.** Пусть  $A(t) = \Lambda$  — диагональная матрица с различными элементами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  вдоль диагонали. Тогда система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (3.211)$$

есть однородная линейная система с постоянными параметрами. Эту систему можно записать в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \Lambda \mathbf{x}(t) \quad (3.212)$$

или в виде

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.213)$$

Из этого последнего уравнения легко заключить, что векторная функция  $\Psi(t)$  с компонентами  $\psi_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$  есть решение этого уравнения:

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}; \quad (3.214)$$

$\Psi(0) = \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{c}$  — вектор с компонентами  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

Обратимся к формулировке и доказательству теоремы существования и единственности (теорема 3.14) для линейной системы. Наиболее существенным является то, что решение линейной системы оказывается определенным везде, где определена система [т. е. решение  $\Psi(t)$  теоремы 3.14 определено на всем интервале  $(T_1, T_2)$ ].

**Теорема 3.15.** Пусть  $(T_1, T_2)$  — открытый интервал и  $A(t)$  — непрерывная функция, преобразующая интервал  $(T_1, T_2)$  в множество  $n \times n$  матриц  $\mathfrak{M}(n, n)$ . Предположим, что  $\mathbf{v}(t)$  — кусочно-непрерывная функция, преобразующая  $(T_1, T_2)$  в  $R_n$ , и что  $\mathbf{x}_0 \in R_n$ ,  $t_0 \in (T_1, T_2)$ . Существует функция  $\Psi(t)$ , преобразующая весь интервал<sup>1</sup>  $(T_1, T_2)$  в  $R_n$  с компонентами  $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$  со свойствами:

- 1)  $\Psi(t)$  непрерывна;
- 2)  $\Psi(t_0) = \mathbf{x}_0$ ;
- 3)  $\Psi(t)$  — решение линейной системы  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$ , т. е.

$$\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t) + \mathbf{v}(t); \quad (3.215)$$

- 4)  $\Psi(t)$  — единственное решение: любая функция, удовлетворяющая условиям 1, 2 и 3, совпадает с  $\Psi(t)$ .

**Доказательство.** Если положить  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{v}$ , то очевидно, что  $\mathbf{f}$  удовлетворяет предположениям теоремы 3.14. Таким образом, можно найти единственное решение уравнения (3.215) на некотором подынтервале  $(t_1, t_2)$ , содержащем  $t_0$ , из  $(T_1, T_2)$ . Мы хотим показать, что  $(t_1, t_2)$  может быть принят равным всему интервалу  $(T_1, T_2)$ . Условие 4 тогда окажется следствием теоремы 3.14.

Примем, что

$$\mathcal{G}^0(t) = \mathbf{x}_0 \text{ для } t \text{ из } [s_1, s_2]; \quad (3.216)$$

Функция  $\mathcal{G}^0(t)$  — непрерывная, т. е.  $\mathcal{G}^0(t) \in \mathfrak{C}([s_1, s_2], R_n)$ . Определим последовательность элементов  $\mathcal{G}^j(t)$  множества  $\mathfrak{C}([s_1, s_2], R_n)$ , положив

$$\mathcal{G}^j(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \{A(\tau)\mathcal{G}^{j-1}(\tau) + \mathbf{v}(\tau)\} d\tau, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.217)$$

<sup>1</sup> Это главное отличие от результата теоремы 3.14, справедливого лишь на участке интервала  $(T_1, T_2)$ .



Последовательность  $\varphi^j$  сходится равномерно (см. определение 3.11) в этом пространстве по отношению к норме, определенной соотношением (3.124). Положив это утверждение справедливым, обнаруживаем, что в пространстве  $\mathfrak{C}([s_1, s_2], R_n)$  должен существовать элемент  $\varphi$ , к которому сходится последовательность  $\varphi^j$  [поскольку  $\mathfrak{C}([s_1, s_2], R_n)$  является полным, см. § 3.15]. Но тогда  $\varphi(t_0) = x_0$ , и последовательность

$$x_0 + \int_{t_0}^t \{A(\tau)\varphi^j(\tau) + v(\tau)\} d\tau = \varphi^{j+1}(t)$$

сходится к

$$x_0 + \int_{t_0}^t \{A(\tau)\varphi(\tau) + v(\tau)\} d\tau$$

(см. упражнение 3.16). Следовательно, для  $t$  из  $[s_1, s_2]$

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \{A(\tau)\varphi(\tau) + v(\tau)\} d\tau \quad (3.218)$$

и  $\varphi$  есть решение уравнения (3.215) на этом интервале. Таким образом, остается доказать, что  $\varphi^j$  — равномерно сходящаяся последовательность.

Для  $t$  из  $[s_1, s_2]$  имеем

$$\|\varphi^1(t) - \varphi^0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t \{A(\tau)x_0 + v(\tau)\} d\tau \right\| \leq |t - t_0| M, \quad (3.219)$$

где  $M$  — постоянное число.

Далее

$$\begin{aligned} \|\varphi^2(t) - \varphi^1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \{A(\tau)[\varphi^1(\tau) - \varphi^0(\tau)]\} d\tau \right\| \leq \\ &\leq N n^2 \int_{t_0}^t M |\tau - t_0| d\tau \leq \end{aligned} \quad (3.220)$$

$$\leq N M n^2 \frac{|t - t_0|^2}{2!}, \quad (3.221)$$

где  $N$  — число, такое, что  $|a_{ij}(t)| \leq N$  для  $t$  из  $[s_1, s_2]$ . По индукции можно показать, что

$$\|\varphi^{j+1} - \varphi^j\| \leq M \frac{[n^2 N (s_2 - s_1)]^j}{j!}. \quad (3.222)$$

Напомним, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M [n^2 N (s_2 - s_1)]^j}{j!} = M e^{n^2 N (s_2 - s_1)}, \quad (3.223)$$

и, следовательно, последовательность  $\varphi^j$  сходится равномерно, так как

$$\|\varphi^{k+v} - \varphi^k\| \leq \sum_{j=1}^{v-1} \frac{M [n^2 N (s_2 - s_1)]^{k+j}}{k} + j! \quad (3.224)$$

Таким образом, теорема доказана.

**Упражнение 3.16.** Покажите, что последовательность  $\varphi^{j+1}(t)$  сходится к

$$x_0 + \int_{t_0}^t \{A(\tau)\varphi(\tau) + v(\tau)\} d\tau.$$

У к а з а н и е:

$$\left\| \phi^{j+1}(t) - \left[ x_0 + \int_{t_0}^t \{ A(\tau) \phi(\tau) + v(\tau) \} d\tau \right] \right\| = \left\| \int_{t_0}^t \{ A(\tau) [\phi^j(\tau) - \phi(\tau)] \} d\tau \right\| \leq \\ \leq |t - t_0| N n^2 \|\phi^j - \phi\|,$$

где  $N$  — то же число, что и в уравнении (3.221).

В § 3.17—3.19 мы обозначали решение системы дифференциальных уравнений символом  $\psi(t)$ . В дальнейшем часто не будем делать различия между решением системы и ее переменными. Иначе говоря, будем писать  $x(t)$  вместо  $\psi(t)$  для обозначения решения системы

$$\dot{x} = f(x, u, t). \quad (3.225)$$

### 3.20. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА

Используем теорему 3.15 для того, чтобы получить «полное» решение задачи с начальными условиями для линейных систем. Начнем с того, что еще раз рассмотрим пример 3.54. Имеем систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad (3.226)$$

где  $\lambda_i$  различны.

Мы видели, что решение этой системы  $x(t)$  при  $x(0) = c$  определяется соотношением

$$x(t) = e^{\Lambda t} c, \quad (3.227)$$

где  $e^{\Lambda t}$  обозначает диагональную матрицу с элементами  $e^{\lambda_i t}$  вдоль диагонали:

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (3.228)$$

Предположим, что мы хотим найти решение уравнения (3.226), удовлетворяющее начальному условию  $x(t_0) = x_0$ . Нетрудно видеть, что оно выражается соотношением

$$x(t) = e^{\Lambda(t-t_0)} x_0 = \quad (3.229)$$

$$= e^{\Lambda t} \cdot e^{-\Lambda t_0} x_0. \quad (3.230)$$

Иначе говоря, как только определена матрица  $e^{\Lambda t}$ ; легко найти полное решение задачи с начальными условиями. Таким образом, матрица  $e^{\Lambda t}$  является поистине фундаментальной для решения задачи с начальными условиями.

Цель настоящего параграфа:

1. Показать, что с каждой линейной системой ассоциируется матрица вполне определенного вида.

2. Изучить свойства этих матриц.

Предположим теперь, что  $(T_1, T_2)$  — открытый интервал,  $A(t)$  — непрерывная функция, преобразующая этот интервал в множество  $n \times n$

матриц  $\mathfrak{M}(n, n)$  и  $\mathbf{v}(t)$  — кусочно-непрерывная функция, преобразующая  $(T_1, T_2)$  в  $R_n$ . Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + v_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.231)$$

где  $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ . Эту систему можно записать в векторной форме в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t). \quad (3.232)$$

Предположим, что  $t_0$  — элемент из  $(T_1, T_2)$ . Сформулируем следующую теорему:

**Теорема 3.16.** Пусть  $\mathcal{S}$  — множество всех решений однородной части уравнения (3.232) [см. определение 3.43 и уравнение (3.209)], т. е. уравнения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t).$$

Иначе говоря,

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x}(t) : \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \text{ для } t \text{ из } (T_1, T_2)\}. \quad (3.233)$$

Тогда  $\mathcal{S}$  есть  $n$ -мерное векторное пространство, базис которого  $\{\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)\}$  можно получить, если принять  $\mathbf{x}^i(t)$  за единственный вектор, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{x}^i(t_0) = \mathbf{e}_i, \quad (3.234)$$

где  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  — натуральный базис<sup>1</sup> в  $R_n$ .

**Доказательство.** Очевидно, что функция  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  для любого  $t$  принадлежит к  $\mathcal{S}$ . Эта функция называется тривиальным решением. Далее, если  $r$  и  $s$  принадлежат к  $R$ , а  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  принадлежат к  $\mathcal{S}$ , то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [r\mathbf{x}(t) + s\mathbf{y}(t)] &= r\dot{\mathbf{x}}(t) + s\dot{\mathbf{y}}(t) = \\ &= r\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + s\mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(t)[r\mathbf{x}(t) + s\mathbf{y}(t)], \end{aligned} \quad (3.235)$$

так что и  $r\mathbf{x}(t) + s\mathbf{y}(t)$  принадлежит к  $\mathcal{S}$ .

Предлагаем читателю самостоятельно проверить аксиомы 1—8 § 2.5 для  $\mathcal{S}$ .

Покажем теперь, что  $\mathbf{x}^i(t)$  образуют базис в  $\mathcal{S}$  (см. § 2.6). Предположим, что для любого  $t$  из  $(T_1, T_2)$

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}^i(t) = \mathbf{0}, \quad (3.236)$$

тогда

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}^i(t_0) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}, \quad (3.237)$$

что возможно только, если все  $c_i = 0$ . Иначе говоря,  $\mathbf{x}^i(t)$  — линейно независимые функции. Если  $\mathbf{x}(t)$  — любой элемент из  $\mathcal{S}$ , то  $\mathbf{x}(t_0)$  можно записать как линейную комбинацию  $\mathbf{e}_i$ , т. е.

$$\mathbf{x}(t_0) = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{e}_i. \quad (3.238)$$

<sup>1</sup> Напомним, что

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Докажем, что

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{x}^i(t) \text{ для } t \text{ из } (T_1, T_2). \quad (3.239)$$

Функция

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{x}^i(t)$$

принадлежит к  $\mathcal{S}$  и совпадает с  $\mathbf{x}(t)$  при  $t = t_0$ , т. е.  $\sum \beta_i \mathbf{x}^i(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ . Из той части теоремы 3.15, в которой доказывается единственность решения, следует, что

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{x}^i(t).$$

Это обосновывает утверждение (3.239).

**Определение 3.44. Фундаментальная матрица.** Пусть  $\Phi(t, t_0)$  есть  $n \times n$  матрица,  $j$ -й столбец которой — вектор  $\mathbf{x}^j(t)$  из  $\mathcal{S}$ , причем  $\mathbf{x}^j(t_0) = \mathbf{e}_j$ . Иначе говоря, столбцы  $\Phi(t, t_0)$  — решения однородной системы уравнений (3.232), удовлетворяющие начальным условиям  $\mathbf{x}^j(t_0) = \mathbf{e}_j$ . Матрицу  $\Phi(t, t_0)$  называют фундаментальной или переходной матрицей системы (3.232):

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{bmatrix}, \quad (3.240)$$

где  $x_i^j(t)$  —  $i$ -я компонента  $j$ -го вектора  $\mathbf{x}^j(t)$ .

Отметим, что

$$\Phi(t_0, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}, \quad (3.241)$$

где  $\mathbf{I}$  есть единичная матрица [см. уравнение (2.55)].

Мы видим, что  $\Phi(t, t_0)$ , по сути дела, является функцией, преобразующей  $(T_1, T_2)$  в множество всех  $n \times n$  матриц.

Эта функция  $\Phi(t, t_0)$  дифференцируема (т. е. каждый коэффициент  $\Phi(t, t_0)$  есть дифференцируемая функция по  $t$ ) и

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0). \quad (3.242)$$

Для доказательства этого заметим, что элемент, стоящий в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце  $\Phi(t, t_0)$ , есть  $x_i^j(t)$ . Так как  $\mathbf{x}^j(t)$  есть решение однородной части нашей системы, имеем

$$\dot{x}_i^j(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k^j(t), \quad (3.243)$$

где  $\mathbf{A}(t) = (a_{ik}(t))$ . Но правая часть уравнения (3.243) в точности равна элементу  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца произведения  $\mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0)$  [см. уравнение (2.33)], и, следовательно, справедливость уравнения (3.242) доказана. Это означает, что фундаментальную матрицу  $\Phi(t, t_0)$  можно рассматривать как (единственное) решение матричного дифференциального уравнения, понимая под переменной  $\mathbf{X}(t)$   $n \times n$  матрицу:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t), \quad (3.244)$$

которая удовлетворяет начальному условию

$$X(t_0) = I. \quad (3.245)$$

Далее, если  $x_0$  — элемент из  $R_n$ , то можно обнаружить, что решение  $x(t)$  однородной части уравнения (3.232), удовлетворяющее начальному условию  $x(t_0) = x_0$ , записывается в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0. \quad (3.246)$$

Покажем теперь, что матрица  $\Phi(t, t_0)$  — невырожденная для любого  $t$  (см. § 2.9). Есть несколько способов сделать это. Например, предположим, что  $\Phi(\hat{t}, t_0)$  — вырожденная матрица для некоторого  $\hat{t}$  из  $(T_1, T_2)$ . Тогда детерминант  $\Phi(\hat{t}, t_0)$ ,  $\det \Phi(\hat{t}, t_0)$ , будет равен 0 и столбцы  $x^j(t)$  матрицы  $\Phi(\hat{t}, t_0)$  окажутся линейно зависимыми, т. е.

$$\sum_{j=1}^n \beta_j x^j(\hat{t}) = 0, \quad (3.247)$$

где не все  $\beta_j = 0$ .

Но функция

$$\sum_{j=1}^n \beta_j x^j(t)$$

есть элемент множества всех решений [см. уравнение (3.233)]. Иначе говоря, мы имеем решение, равное нулю при  $\hat{t}$ . Из единственности решений следует, что это решение должно быть тривиальным, т. е.

$$\sum_{j=1}^n \beta_j x^j(t) = 0 \text{ для любого } t \text{ из } (T_1, T_2). \quad (3.248)$$

Это противоречит тому, что  $x^j(t)$  — линейно независимые функции. Следовательно,

$$\Phi(t, t_0) \text{ — невырожденная для любого } t \text{ из } (T_1, T_2). \quad (3.249)$$

Попытаемся найти матрицу, обратную  $\Phi(t, t_0)$ . Покажем сначала, что

$$\Phi(\hat{t}, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(\hat{t}, t_0) \quad (3.250)$$

для любых  $\hat{t}$ ,  $t_1$  и  $t_0$  из  $(T_1, T_2)$ . Это свойство называется переходным свойством матрицы  $\Phi(t, t_0)$ . Пусть  $x_0$  — элемент из  $R_n$ . Известно, что

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 \quad (3.251)$$

есть единственное решение однородной части уравнения (3.232) с  $x(t_0) = x_0$ . Следовательно,

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x_0 \quad (3.252)$$

и

$$x(\hat{t}) = \Phi(\hat{t}, t_0)x_0. \quad (3.253)$$

Если положить  $x_1 = x_1(t_1)$ , то единственное решение  $x_1(t)$  однородной части уравнения (3.232) с  $x_1(t) = x_1$  определяется формулой

$$x_1(t) = \Phi(t, t_1)x_1. \quad (3.254)$$

Из единственности следует, что

$$x(\hat{t}) = x_1(\hat{t}), \quad (3.255)$$

откуда получим

$$\Phi(\hat{t}, t_0)x_0 = \Phi(\hat{t}, t_1)\Phi(t_1, t_0)x_0 \quad (3.256)$$

(рис. 3.29). Уравнение (3.256) выполняется для любого  $x_0$  из  $R_n$ , что и доказывает справедливость уравнения (3.250). Так как  $\Phi(t_0, t_0) = I$ , то уравнение (3.250) означает, что матрица, обратная к  $\Phi(t, t_0)$ , есть  $\Phi(t_0, t)$  т. е.

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t). \quad (3.257)$$

Имея в виду это свойство, можно написать полное решение задачи с начальными условиями для системы (3.232). Для решения системы уравнений (3.232) напомним формулу

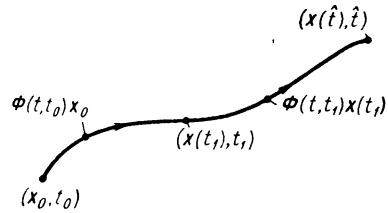


Рис. 3.29. Переходное свойство фундаментальной матрицы

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \left\{ x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) v(\tau) d\tau \right\} = \quad (3.258)$$

$$= \Phi(t, t_0) \left\{ x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) v(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.259)$$

Так как

$$x(t_0) = \Phi(t_0, t_0) \left\{ x_0 + \int_{t_0}^{t_0} \Phi^{-1}(\tau, t_0) v(\tau) d\tau \right\} = \quad (3.260)$$

$$= Ix_0 = x_0, \quad (3.261)$$

то начальное условие удовлетворяется. Проверим теперь, обращается ли в тождество выражение (3.232) при подстановке в него  $x(t)$ . Имеем

$$\dot{x}(t) = \Phi(t, t_0) \left\{ x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) v(\tau) d\tau \right\} +$$

$$+ \Phi(t, t_0) \frac{d}{dt} \left\{ x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) v(\tau) d\tau \right\} =$$

$$= A(t) \Phi(t, t_0) \left\{ x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) v(\tau) d\tau \right\} + \Phi(t, t_0) \Phi^{-1}(t, t_0) v(t) = \quad (3.262)$$

$$= A(t) x(t) + v(t) \text{ [из уравнения (3.242)].} \quad (3.263)^1$$

Итак,  $x(t)$  есть решение уравнения (3.232), которое можно записать в виде суммы двух членов

$$\Phi(t, t_0) x_0 \text{ и } \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) v(\tau) d\tau. \quad (3.264)$$

Первый член представляет собой решение однородного уравнения, а второй зависит от вынуждающей функции. Обратимся теперь к примерам.

**Пример 3.55.** Рассмотрим систему вида

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g(t) \\ -g(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}, \quad (3.265)$$

где  $g(t)$  и  $v_i(t)$  кусочно-непрерывны. Попытаемся найти решение этой системы, удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = \pi, \quad (3.266)$$

<sup>1</sup> Уравнение справедливо для  $t$  из  $(T_1, T_2) - A$ , где  $A$  — счетное множество точек.

где  $\pi$  — заданный элемент из  $R_2$ . Однородная система записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= g(t) x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -g(t) x_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.267)$$

Если принять, что  $x^1(t)$  и  $x^2(t)$  равны:

$$x^1(t) = \begin{bmatrix} \cos \int_0^t g(\tau) d\tau \\ -\sin \int_0^t g(\tau) d\tau \end{bmatrix}; \quad x^2(t) = \begin{bmatrix} \sin \int_0^t g(\tau) d\tau \\ \cos \int_0^t g(\tau) d\tau \end{bmatrix}, \quad (3.268)$$

то легко убедиться, что  $x^1(t)$  и  $x^2(t)$  являются решениями системы (3.267), причем  $x^1(0) = e_1$  и  $x^2(0) = e_2$ . Примем

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} \cos \int_0^t g(\tau) d\tau & \sin \int_0^t g(\tau) d\tau \\ -\sin \int_0^t g(\tau) d\tau & \cos \int_0^t g(\tau) d\tau \end{bmatrix}, \quad (3.269)$$

тогда искомое решение уравнения (3.265) будет выражаться формулой

$$x(t) = \Phi(t, 0) \left\{ \pi + \int_0^t \Phi^{-1}(\tau, 0) v(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.270)$$

**Упражнение 3.17.** Рассматривая систему примера 3.55, необходимо показать, что

а)  $\Phi(0, 0) = I$ ;

б)  $\dot{\Phi}(t, 0) = \begin{bmatrix} 0 & g(t) \\ -g(t) & 0 \end{bmatrix} \Phi(t, 0)$ ;

в)  $\Phi^{-1}(t, 0) = \Phi(0, t)$ ;

г) эвклидова норма  $\Phi(t, 0)\pi$  та же, что и эвклидова норма  $\pi$  (см. § 2.13).

Свойство г) устанавливает, что  $\Phi(t, 0)$  есть ортогональная матрица (см. § 2.14).

**Пример 3.56.** Имеем

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Векторные функции

$$x^1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и } x^2(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

линейно независимы, но  $x^1(0)$  и  $x^2(0)$  — линейно зависимые элементы  $R_2$ . Следовательно,  $\Psi(t)$  не может быть фундаментальной матрицей линейной системы.

**Пример 3.57.** Рассмотрим однородную систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (3.271)$$

Легко видеть, что фундаментальная матрица системы имеет вид

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & \int_{t_0}^t e^{-\frac{t_0^2}{2}} \frac{\tau^2}{e^{\frac{\tau^2}{2}}} d\tau \\ 0 & e^{-\frac{t_0^2}{2}} \frac{t^2}{e^{\frac{t^2}{2}}} \end{bmatrix}. \quad (3.272)$$

Решение  $\mathbf{x}(t)$  системы при  $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix}$  определяется формулой

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 + \pi_2 \int_{t_0}^t e^{-\frac{t_0^2}{2}} e^{\frac{\tau^2}{2}} d\tau \\ \pi_2 e^{-\frac{t_0^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} \end{bmatrix}. \quad (3.273)$$

**Упражнение 3.18.** Проверьте уравнение (3.250) для матрицы  $\Phi(t, t_0)$  (3.272).

Предполагая, что  $t_0 = 0$ , обозначим фундаментальную матрицу системы через  $\Phi(t)$  вместо  $\Phi(t, 0)$ . Это замечание важно, в частности, для последующих параграфов.

## СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 3.21. ЭКСПОНЕНТА ОТ $At$

Обратимся к частному, но очень важному классу систем, а именно: к системам с постоянными параметрами. Рассмотрим системы вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (3.274)$$

где  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  — постоянная матрица, называемая матрицей системы (см. определение 3.43).

Система из примера 3.54 является системой с постоянными параметрами с матрицей  $\mathbf{A}$ . Для начала введем некоторые определения, полезные для обсуждения такого рода систем.

**Определение 3.44а.** Если дана линейная система с уравнением вида (3.274), то будем называть собственные значения матрицы системы  $\mathbf{A}$  (см. § 2.10) собственными значениями системы и говорить, что фундаментальная матрица  $\Phi(t)$  есть экспонента от  $\mathbf{A}t$ . Вместо  $\Phi(t)$  будем записывать  $e^{\mathbf{A}t}$ , т. е.

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (3.275)$$

(сравните с примером 3.54).

Для любой матрицы  $\mathbf{B}$  размера  $n \times n$  экспонента от  $\mathbf{B}t$ ,  $e^{\mathbf{B}t}$  определена, поскольку это есть фундаментальная матрица однородной системы вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{B} \mathbf{x}(t). \quad (3.276)$$

Поясним, почему мы использовали термин «экспонента от  $\mathbf{A}t$ », и тем самым установим свойства  $e^{\mathbf{A}t}$ . Во-первых, из уравнения (3.241) следует, что

$$\Phi(0) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}. \quad (3.277)$$

Во-вторых, из уравнения (3.242) имеем

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t}. \quad (3.278)$$

В-третьих, уравнение (3.250) принимает вид

$$e^{\mathbf{A}(t-t_1)} e^{\mathbf{A}t_1} = e^{\mathbf{A}t}, \quad (3.279)$$

$$\text{и поэтому } e^{\mathbf{A}(r+s)} = e^{\mathbf{A}r} \cdot e^{\mathbf{A}s}. \quad (3.280)$$

Наконец, решение уравнения (3.274), удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}, \quad (3.281)$$



определяется формулой

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{\xi} + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \boldsymbol{\nu}(\tau) d\tau = \quad (3.282a)$$

$$= e^{At}\boldsymbol{\xi} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \boldsymbol{\nu}(\tau) d\tau. \quad (3.282b)$$

Покажем теперь, что  $\mathbf{A}$  и  $e^{At}$  обладают свойством коммутативности и что мы можем рассматривать  $e^{At}$  как сумму бесконечного ряда матриц. Предположим,  $\boldsymbol{\nu}$  — произвольный элемент из  $R_n$ . Покажем, что как  $\mathbf{A}e^{At}\boldsymbol{\nu}$ , так и  $e^{At}\mathbf{A}\boldsymbol{\nu}$  являются решениями системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (3.283)$$

удовлетворяющими начальному условию

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\boldsymbol{\nu}. \quad (3.284)$$

Очевидно,

$$\mathbf{A}e^{A0}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{A}\mathbf{I}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{A}\boldsymbol{\nu} \quad (3.285)$$

и

$$e^{A0}\mathbf{A}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{I}\mathbf{A}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{A}\boldsymbol{\nu}, \quad (3.286)$$

так как и  $\mathbf{A}e^{At}\boldsymbol{\nu}$ , и  $e^{At}\mathbf{A}\boldsymbol{\nu}$  удовлетворяют уравнению (3.284).

С помощью уравнения (3.278) находим

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}e^{At}\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{A} \frac{d}{dt}(e^{At})\boldsymbol{\nu} = \mathbf{A}(\mathbf{A}e^{At}\boldsymbol{\nu}) \quad (3.287)$$

и

$$\frac{d}{dt}(e^{At}\mathbf{A}\boldsymbol{\nu}) = \frac{d}{dt}(e^{At})\mathbf{A}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{A}(e^{At}\mathbf{A}\boldsymbol{\nu}). \quad (3.288)$$

Из единственности решения уравнения (3.283) следует, что для любого  $t$

$$\mathbf{A}e^{At}\boldsymbol{\nu} = e^{At}\mathbf{A}\boldsymbol{\nu}. \quad (3.289)$$

Но поскольку  $\boldsymbol{\nu}$  — просто элемент из  $R_n$ ,  $\mathbf{A}$  и  $e^{At}$  обладают свойством коммутативности, т. е.

$$\mathbf{A}e^{At} = e^{At}\mathbf{A} \text{ для любого } t. \quad (3.290)^1$$

Далее эвристически покажем, что  $e^{At}$  можно рассматривать как бесконечный ряд <sup>2</sup>

$$\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!} + \dots \quad (3.291)$$

или в более компактной форме записи

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!}. \quad (3.292)$$

<sup>1</sup>  $(\mathbf{A}e^{At} - e^{At}\mathbf{A})\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$  для любого  $\boldsymbol{\nu}$  из  $R_n$ , см. также замечание в конце § 2.7.

<sup>2</sup> Если определить норму матрицы  $\mathbf{A}$ , положив  $\|\mathbf{A}\| = \max\{|a_{ij}|; i, j = 1, 2, \dots, n\}$ , то можно показать, что ряд (3.291) сходится при таком нормировании для любого  $t$ , и его можно почленно дифференцировать. Опираясь на это, можно строго доказать справедливость уравнения (3.292). Заметим, что в общем случае элементы  $e^{At}$  не являются функциями  $e^{a_{ij}t}$ .

При  $t = 0$  ряд превращается в

$$I + A0 + A^2 \frac{0^2}{2!} + \dots = I. \quad (3.293)$$

Если почленно продифференцировать ряд (3.292), то получится соотношение

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{dt^k}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{k t^{k-1}}{k!} = \quad (3.294)$$

$$= A \sum_{\nu=0}^{\infty} A^{\nu} \frac{t^{\nu}}{\nu!}. \quad (3.295)$$

Это означает, что ряд удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad (3.296)$$

где  $X(t)$  — переменная матрица размера  $n \times n$ .

Если  $v$  — произвольный элемент из  $R_n$ , то  $e^{At}v$  и  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} v$  являются решениями уравнения (3.283), удовлетворяющими начальному условию  $x(0) = v$ , и, следовательно, уравнение (3.292) справедливо.

Предположим, что  $B$  есть  $n \times n$  матрица, подобная  $A$  [см. уравнение (2.64)], т. е. существует невырожденная матрица  $P$ , удовлетворяющая условию

$$B = P^{-1}AP. \quad (3.297)$$

Покажем, что

$$e^{Bt} = P^{-1}e^{At}P. \quad (3.298)$$

Пусть снова  $v$  — произвольный элемент из  $R_n$ . Рассмотрим функции  $e^{Bt}v$  и  $P^{-1}e^{At}Pv$ . Покажем, что обе эти функции являются решениями системы

$$\dot{x}(t) = Bx(t), \quad (3.299)$$

удовлетворяющими начальному условию  $x(0) = v$ , откуда и будет следовать справедливость уравнения (3.298). Очевидно,  $e^{Bt}v$  удовлетворяет уравнению (3.299) и условию  $x(0) = v$ . Имеем

$$P^{-1}e^{A0}Pv = P^{-1}IPv = P^{-1}Pv = Iv = v \quad (3.300)$$

и

$$\frac{d}{dt} (P^{-1}e^{At}P)v = P^{-1} \frac{d}{dt} (e^{At})Pv = \quad (3.301)$$

$$= P^{-1}Ae^{At}Pv = \quad (3.302)$$

$$= P^{-1}A(PP^{-1})e^{At}Pv = \quad (3.303)$$

$$= P^{-1}APP^{-1}e^{At}Pv = \quad (3.304)$$

$$= B(P^{-1}e^{At}Pv). \quad (3.305)$$

Таким образом,  $P^{-1}e^{At}Pv$  удовлетворяет уравнению (3.299) и условию  $x(0) = v$ . Следовательно, если  $A$  и  $B$  — подобные матрицы, то  $e^{At}$  и  $e^{Bt}$  также являются подобными матрицами.

**Пример 3.58.** Пусть  $A$  есть  $2 \times 2$  матрица  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Легко видеть, что  $A^2 = A$ , и, следовательно,

$$e^{At} = I + A \left( t + \frac{t^2}{2!} + \dots \right) = I + (e^t - 1)A = \begin{bmatrix} e^t & e^t - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что  $e^{At}$  значительно отличается от матрицы

$$\begin{bmatrix} e^t & e^t \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

которая получается, если элементы матрицы  $A$  заменить экспонентами от них.

### 3.22. СВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим задачу с начальными условиями

$$\dot{x}(t) = Ax(t); \quad x(0) = \xi. \quad (3.306)$$

Решение этой задачи может быть представлено в виде функции

$$x(t) = e^{At}\xi \quad (3.307)$$

и связано с собственными значениями системы (или с собственными значениями матрицы  $A$ )<sup>1</sup>. Прежде всего рассмотрим влияние преобразования подобия [см. уравнение (2.62а) и уравнение (2.62б)], а затем рассмотрим случай, когда собственными значениями являются различные действительные числа.

Предположим, что преобразование  $\mathfrak{B}^{-1}$  пространства  $R_n$  в себя задано как

$$\mathfrak{B}^{-1}(v) = P^{-1}v, \quad v \in R_n, \quad (3.308)$$

где  $P$  — невырожденная  $n \times n$  матрица [см. уравнение (2.50)].

Можно определить преобразование  $\mathfrak{B}^{-1}$  векторного пространства всех  $R_n$ -мерных функций на  $R$ , положив

$$\mathfrak{B}^{-1}[x(t)] = P^{-1}x(t). \quad (3.309)$$

Обычно будем писать

$$y(t) = \mathfrak{B}^{-1}[x(t)] = P^{-1}x(t). \quad (3.310)$$

Нетрудно видеть, что

$$\dot{y}(t) = P^{-1}\dot{x}(t), \quad (3.311)$$

и, следовательно, уравнение (3.306) преобразуется в уравнение

$$\dot{y}(t) = P^{-1}Ax(t) = \quad (3.312)$$

$$= P^{-1}APP^{-1}x(t) = P^{-1}APy(t) \quad (3.313)$$

с начальными условиями

$$y(0) = P^{-1}x(0) = P^{-1}\xi. \quad (3.314)$$

Если  $B$  — матрица, заданная как

$$B = P^{-1}AP, \quad (3.315)$$

то  $B$  подобна  $A$ , и мы имеем

$$\dot{y}(t) = By(t); \quad y(0) = P^{-1}\xi. \quad (3.316)$$

Решением задачи с начальными условиями для уравнения (3.316), согласно уравнению (3.262а), является

$$y(t) = e^{Bt}P^{-1}\xi. \quad (3.317)$$

<sup>1</sup> См. определение 3.44 и § 2.10.

Следовательно,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}e^{Bt}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}. \quad (3.318)$$

В силу уравнения (2.74) собственные значения систем (3.306) и (3.316) одинаковы. Предположим, что собственные значения  $\mathbf{A}$  действительны и различны. Обозначим их через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , а через  $\boldsymbol{\Lambda}$  — матрицу собственных значений [см. уравнение (2.78)], т. е.

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (3.319)$$

Из § 2.10 известно, что существует невырожденная матрица  $\mathbf{P}$  такая, что

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}. \quad (3.320)$$

Из уравнения (3.318) следует, что решение уравнения (3.306) дается соотношением

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\xi} = \quad (3.321)$$

$$= \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}. \quad (3.322)$$

Из выражения (3.317) следует, что уравнение (3.316) записывается как

$$\mathbf{y}(t) = e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \eta_1 \\ e^{\lambda_2 t} \eta_2 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \eta_n \end{bmatrix} \quad (3.323), \quad \text{где } \boldsymbol{\eta} = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}. \quad (3.324)$$

Таким образом, мы связали решение нашей задачи с собственными значениями матрицы  $\mathbf{A}$ .

В более общем случае, предполагая, что собственные значения  $\mathbf{A}$  — действительные числа, и обозначив через

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{A}) \quad (3.325)$$

жорданову каноническую форму от  $\mathbf{A}$  [см. уравнение (2.80)], укажем на существование невырожденной матрицы  $\mathbf{P}$ , для которой

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \quad (3.326)$$

откуда, воспользовавшись преобразованием подобия (3.309), можно получить  $\mathbf{x}(t)$  в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{Jt}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}. \quad (3.327)$$

Можно показать, что если

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_p \end{bmatrix}, \quad (3.328)$$

\*

где

$$J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad (3.329)$$

и

$$J_m = \begin{bmatrix} \lambda_{k+m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{k+m} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{k+m} \end{bmatrix}, \quad (3.330)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+p}$  — собственные значения  $A$ , то

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tJ_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{tJ_p} \end{bmatrix}. \quad (3.331)$$

В последней матрице приняты следующие обозначения:

$$e^{tJ_0} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_k} \end{bmatrix} \quad (3.332)$$

и

$$e^{tJ_m} = e^{t\lambda_{k+m}} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{v_m-1}}{(v_m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{v_m-2}}{(v_m-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.333)$$

где  $J_m$  есть матрица размера  $v_m \times v_m$  [46].

Здесь мы снова связали решение рассматриваемой задачи с собственными значениями матрицы  $A$ .

Если ввести в рассмотрение вынуждающую функцию  $\mathbf{v}(t)$ , т. е. рассмотреть задачу

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \xi, \quad (3.334)$$

то легко видеть, что использование преобразования подобия

$$\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t) \quad (3.335)$$

приводит к задаче

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = P^{-1}AP\mathbf{y}(t) + P^{-1}\mathbf{v}(t), \quad \mathbf{y}(0) = P^{-1}\xi. \quad (3.336)$$

Положив  $B = P^{-1}AP$ , получим решение уравнения (3.336)

$$\mathbf{y}(t) = e^{Bt} \left\{ P^{-1}\xi + \int_0^t e^{-B\tau} P^{-1}\mathbf{v}(\tau) d\tau \right\}, \quad (3.337)$$

а решение  $\mathbf{x}(t)$  уравнения (3.334)

$$\mathbf{x}(t) = P e^{Bt} \left\{ P^{-1}\xi + \int_0^t e^{-B\tau} P^{-1}\mathbf{v}(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.338)$$

В частности, если собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — действительные различные числа и  $\Lambda$  — матрица собственных значений [см. уравнения (2.78) и (3.319)], то

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\Lambda t}\mathbf{P}^{-1}\xi + \mathbf{P}\int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{v}(\tau) d\tau. \quad (3.339)$$

В дальнейшем мы будем часто пользоваться этой формулой и преобразованием подобия [см. уравнение (3.335)].

### 3.23. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Покажем, как с помощью преобразования Лапласа можно получить фундаментальную матрицу линейной системы с постоянными параметрами. При этом предполагаем, что читатель знаком с преобразованием Лапласа и его основными свойствами.

Если  $x(t)$  — действительная функция «времени», то обозначим через  $x(s)$  преобразование Лапласа от  $x(t)$  и запишем

$$x(s) = \mathfrak{L}[x(t)]. \quad (3.340)$$

Если задано  $x(s)$ , то для отыскания  $x(t)$  можно воспользоваться обратным преобразованием Лапласа и записать

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[x(s)]. \quad (3.341)$$

Имеются подробные таблицы, позволяющие найти обратное преобразование Лапласа. Основное свойство преобразования Лапласа, необходимое для наших целей, формулируется следующим образом: если задана дифференцируемая функция  $x(t)$  с  $x(0) = \xi$ , то преобразование Лапласа от производной  $\dot{x}(t)$  этой функции  $x(t)$  дается соотношением

$$\mathfrak{L}[\dot{x}(t)] = s\mathfrak{L}[x(t)] - \xi = \quad (3.342)$$

$$= sx(s) - \xi. \quad (3.343)$$

**Пример 3.59.** Если  $x(t) = e^{at}$ , то  $x(s) = \mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$  и  $\mathfrak{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - 1 = \frac{s}{s-a} - 1 = \frac{a}{s-a}$ .

Предположим, что  $\mathbf{x}(t)$  есть  $n$ -мерная функция «времени» (т. е.  $R$ ) с компонентами  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Преобразование Лапласа от  $\mathbf{x}(t)$  можно определить как  $n$ -мерный вектор, компоненты которого являются преобразованиями Лапласа от компонент  $\mathbf{x}(t)$ , и написать

$$\mathbf{x}(s) = \mathfrak{L}[\mathbf{x}(t)], \quad (3.344)$$

считая, что компоненты  $x_i(s)$  вектора  $\mathbf{x}(s)$  равны

$$x_i(s) = \mathfrak{L}[x_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.345)$$

Если  $\mathbf{x}(t)$  дифференцируема и  $\mathbf{x}(0) = \xi$ , то

$$\mathfrak{L}[\dot{\mathbf{x}}(t)] = s\mathfrak{L}[\mathbf{x}(t)] - \xi = \quad (3.346)$$

$$= s\mathbf{x}(s) - \xi. \quad (3.347)$$

Если, наконец,  $\mathbf{C}(t)$  есть  $n \times m$  матрица с элементами  $c_{ij}(t)$ , то преобразование Лапласа  $\mathbf{C}(s)$  от матрицы  $\mathbf{C}(t)$  можно определить как  $n \times m$  матрицу, элементы которой  $c_{ij}(s)$  являются преобразованиями Лапласа от  $c_{ij}(t)$ .

Запишем

$$\mathbf{C}(s) = \mathfrak{L}[\mathbf{C}(t)], \quad (3.348)$$

где

$$c_{ij}(s) = \mathcal{L}[c_{ij}(t)]. \quad (3.349)$$

**Пример 3.60.** Найдем преобразования Лапласа от вектора  $\mathbf{x}(t)$  и матрицы  $\mathbf{C}(t)$ , заданных как

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ \cos \omega t \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} k \sin t \\ t e^{-2t} \end{bmatrix}. \quad (3.350)$$

Имеем

$$\mathbf{x}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix}; \quad (3.351)$$

$$\mathcal{L}[\dot{\mathbf{x}}(t)] = s\mathbf{x}(s) - \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} \\ \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s+1} \\ -\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix}; \quad (3.352)$$

$$\mathbf{C}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{C}(t)] = \begin{bmatrix} \frac{k}{s} & \frac{1}{s^2 + 1} \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}. \quad (3.353)$$

Используем теперь эти понятия для отыскания фундаментальной матрицы системы с постоянными параметрами. Прежде всего рассмотрим задачу с начальными условиями для однородной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}. \quad (3.354)$$

Известно, что ее решение записывается в виде

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\xi}. \quad (3.355)$$

Определим фундаментальную матрицу  $e^{\mathbf{A}t}$ . Беря преобразование Лапласа от уравнения (3.354), находим

$$s\mathbf{x}(s) - \boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\mathbf{x}(s), \quad (3.356)$$

откуда

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{A}\mathbf{x}(s) = \boldsymbol{\xi} \quad (3.357)$$

или эквивалентное выражение

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \boldsymbol{\xi}. \quad (3.358)$$

Если положить, что

$$\mathbf{Q}(s) = s\mathbf{I} - \mathbf{A}, \quad (3.359)$$

то можно убедиться, что

$$\det \mathbf{Q}(s) = 0, \quad (3.360)$$

тогда и только тогда, когда  $s =$  некоторому  $\lambda_i$ , где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ , поскольку

$$\det \mathbf{Q}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (3.361)$$

тождественно с выражением

$$\det(\mathbf{A} - s\mathbf{I}) = 0 \quad (3.362)$$

[см. уравнение (2.70)]. Следовательно,  $\mathbf{Q}(s)$  — невырожденная матрица для всех  $s \neq \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

Получим

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{Q}^{-1}(s)\boldsymbol{\xi} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\xi}. \quad (3.363)$$

Взяв обратное преобразование Лапласа, найдем

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{x}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \xi. \quad (3.364)$$

Поскольку решение системы единственно, заключаем, что

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]. \quad (3.365)$$

Таким образом, чтобы найти фундаментальную матрицу  $e^{\mathbf{A}t}$ , мы должны образовать матрицу  $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ , инвертировать ее и затем найти обратное преобразование Лапласа от  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ .

**Пример 3.61.** Дана система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.366)$$

с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.367)$$

$$\mathbf{Q}(s) = s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -6 & s-1 \end{bmatrix}; \quad (3.368)$$

$$\det \mathbf{Q}(s) = s(s-1) - 6 = (s-3)(s+2); \quad (3.369)$$

$$\mathbf{Q}^{-1}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s-3)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 6 & s \end{bmatrix} = \quad (3.370)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s-3)(s+2)} & \frac{1}{(s-3)(s+2)} \\ \frac{6}{(s-3)(s+2)} & \frac{s}{(s-3)(s+2)} \end{bmatrix} \quad (3.371)$$

и

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{2e^{3t} + 3e^{-2t}}{5} & \frac{e^{3t} - e^{-2t}}{5} \\ \frac{6e^{3t} - 6e^{-2t}}{5} & \frac{3e^{3t} + 2e^{-2t}}{5} \end{bmatrix} \quad (3.372)$$

есть фундаментальная матрица системы (3.366).

**Пример 3.62.** Дана система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.373)$$

с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}. \quad (3.374)$$

Имеем

$$\mathbf{Q}(s) = s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+2 & -3 \\ 3 & s+2 \end{bmatrix} \quad (3.375)$$

и

$$\det \mathbf{Q}(s) = (s+2)^2 + 9; \quad (3.376)$$

$$\mathbf{Q}^{-1}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+2)^2+9} & \frac{3}{(s+2)^2+9} \\ \frac{-3}{(s+2)^2+9} & \frac{s+2}{(s+2)^2+9} \end{bmatrix}. \quad (3.377)$$

Следовательно,

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} e^{-2t} \cos 3t & e^{-2t} \sin 3t \\ -e^{-2t} \sin 3t & e^{-2t} \cos 3t \end{bmatrix}. \quad (3.378)$$



Обратимся теперь к задаче

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \xi, \quad (3.379)$$

где  $\mathbf{v}(t)$  — вынуждающая функция.

Ранее мы показали, что решение этой задачи  $\mathbf{x}(t)$  определяется формулой

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\xi + e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{v}(\tau) d\tau. \quad (3.380)$$

Дадим интерпретацию этой формулы, используя преобразование Лапласа. Вычислим  $\mathbf{x}(t)$ , взяв преобразование Лапласа от обеих частей уравнения (3.379). Сделав это, получим

$$s\mathbf{x}(s) - \xi = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{v}(s), \quad (3.381)$$

откуда

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \xi + \mathbf{v}(s). \quad (3.382)$$

Полагая, как и ранее,  $\mathbf{Q}(s) = s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ , найдем

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{Q}^{-1}(s)\xi + \mathbf{Q}^{-1}(s)\mathbf{v}(s). \quad (3.383)$$

Обратное преобразование Лапласа дает

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Q}^{-1}(s)]\xi + \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Q}^{-1}(s)\mathbf{v}(s)]. \quad (3.384)$$

Нам известно, что

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Q}^{-1}(s)]. \quad (3.385)$$

Определим, что представляет собой  $\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Q}^{-1}(s)\mathbf{v}(s)]$ .

Если  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  — две действительных функции  $t$ , причем

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = f_1(s) \text{ и } \mathcal{L}[f_2(t)] = f_2(s), \quad (3.386)$$

то

$$f_1(s) \cdot f_2(s) = \mathcal{L}[(f_1 * f_2)(t)], \quad (3.387)$$

где  $(f_1 * f_2)(t)$  есть свертка  $f_1$  и  $f_2$ , которая записывается в виде

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (3.388)$$

Очевидно, что

$$\mathcal{L}^{-1}[f_1(s) \cdot f_2(s)] = (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (3.389)$$

Предлагаем читателю убедиться, что

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Q}^{-1}(s)\mathbf{v}(s)] = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{v}(\tau) d\tau. \quad (3.390)$$

Таким образом, под несколько необычным выражением

$$e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{v}(\tau) d\tau$$

в уравнении (3.380) следует понимать не что иное, как свертку фундаментальной матрицы с вынуждающей функцией  $\mathbf{v}(t)$ .

**Упражнение 3.19.** Имея в виду результаты, полученные в данном параграфе, рассмотрите задачу отыскания фундаментальной матрицы  $\Phi(t, t_0)$  для однородной системы с переменными параметрами  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$  с помощью преобразования Лапласа.

Упражнение 3.20. Найдите матрицу  $e^{At}$  для следующих матриц:

$$\begin{aligned} \text{а) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; & \text{б) } A &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}; & \text{в) } A &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}; \\ \text{г) } A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \text{д) } A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.24. СИСТЕМА $n$ -ГО ПОРЯДКА

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами, которое мы запишем в виде

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t). \quad (3.391)$$

Используя обозначение  $D = \frac{d}{dt}$  [см. обозначения (3.53)], можно записать

$$\{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0\} y(t) = f(t). \quad (3.392)$$

Докажем, что такая система эквивалентна линейной системе  $n$  уравнений первого порядка, собственные значения которой в точности равны корням полинома

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0, \quad (3.393)$$

и покажем, как найти матрицу преобразования подобия в случае, когда собственными значениями системы являются различные действительные числа.

Предположим, что  $y(t)$  — решение уравнения (3.391), и определим  $n$ -мерную функцию  $\mathbf{x}(t)$ , положив

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= y(t); \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t); \\ x_3(t) &= \dot{x}_2(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}; \\ &\dots \\ x_n(t) &= \dot{x}_{n-1}(t) = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.394)$$

где  $x_i(t)$  — компоненты  $\mathbf{x}(t)$ .

Отсюда имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t); \\ \dot{x}_n(t) &= -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t) + f(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.395)$$

Эту систему можно записать в векторной форме в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \quad (3.396)$$

или, сокращенно,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (3.397)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.398)$$

и

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}. \quad (3.399)$$

С другой стороны, если  $\mathbf{x}(t)$  — решение уравнения (3.396), то сразу видно, что функция  $y(t) = x_1(t)$  [первая компонента  $\mathbf{x}(t)$ ] есть решение уравнения (3.391). Таким образом, мы получили линейную систему  $n$  уравнений первого порядка, эквивалентную одному уравнению  $n$ -го порядка.

Покажем теперь, что собственные значения матрицы системы  $\mathbf{A}$  (3.398) являются корнями полинома

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0. \quad (3.400)$$

Для того чтобы определить собственные значения  $\mathbf{A}$ , мы должны найти детерминант матрицы  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  и отыскать  $\lambda$ , для которых этот детерминант равен нулю [см. уравнение (2.71)]. Имеем

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.401)$$

Раскрывая по минорам первого столбца, получим

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} +$$

$$+ (-1)^{n+1} (-a_0) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & -\lambda & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.402)$$

По методу индукции, из уравнения (3.402) найдем

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^n \{ \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \}, \quad (3.403)$$

где  $\lambda$  является собственным значением матрицы  $\mathbf{A}$  в том и только в том случае, когда  $\lambda$  есть корень полинома (3.400), т. е.

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (3.404)$$

**Пример 3.63.** Рассмотрим систему

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4y(t) = 1. \quad (3.405)$$

Полагая  $x_1(t) = y(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{y}(t)$ ,  $x_3(t) = \ddot{y}(t)$ , получим систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.406)$$

Матрица системы  $\mathbf{A}$  записывается в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (3.407)$$

Собственными значениями матрицы  $\mathbf{A}$  являются корни уравнения

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0. \quad (3.408)$$

Собственные значения равны:  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = -1$ .

**Упражнение 3.21.** Рассмотрите систему

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 1.$$

Найдите эквивалентную ей систему. Какова матрица системы и чему равны ее собственные значения? Найдите решение  $y(t)$  (см. упражнение 3.20).

Предположим теперь, что собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  (3.398) — действительные и различные числа. Обозначим их через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  и будем считать, что  $\mathbf{\Lambda}$  — матрица собственных значений [см. уравнение (2.78)], т. е.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (3.409)$$

Мы знаем, что существует невырожденная матрица  $P$  такая, что

$$\Lambda = P^{-1}AP. \quad (3.410)$$

Матрица  $P$  есть матрица Вандермонда относительно  $\lambda_i$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.411)^1$$

Для обоснования этого утверждения покажем, что

$$P^{-1}APe_j = \lambda_j e_j = \Lambda e_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.412)$$

где  $e_j$  — элементы натурального базиса из  $R_n$  [см. уравнение (2.27)].  
Например

$$Pe_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \dots \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.413)$$

и

$$APe_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \dots \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix} = \quad (3.414)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \\ -a_0 & -a_1\lambda_1 & \dots & -a_{n-1}\lambda_1^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \\ \lambda_1^n \end{bmatrix}, \quad (3.415)$$

поскольку  $\lambda_1$ , будучи собственным значением  $A$ , есть корень уравнения (3.404). Следовательно,

$$APe_1 = \lambda_1 Pe_1 \quad (3.416)$$

и поэтому

$$P^{-1}APe_1 = P^{-1}\lambda_1 Pe_1 = \lambda_1 P^{-1}Pe_1 = \lambda_1 e_1. \quad (3.417)$$

Совершенно аналогично можно доказать справедливость уравнения (3.412) для  $j = 2, 3, \dots, n$  и, таким образом, обосновать уравнение (3.410).

\* \*  
\*

<sup>1</sup> Укажем, что детерминант матрицы  $P$  равен

$$\det P = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) = (\lambda_2 - \lambda_1) \dots$$

$$\dots, (\lambda_n - \lambda_1) (\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1}),$$

так что  $P$  — невырожденная, если все  $\lambda_i$  различны.

### 3.25. СОПРЯЖЕННАЯ СИСТЕМА

Рассмотрим однородную систему с переменными параметрами

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t). \quad (3.418)$$

В дальнейшем эта система часто будет рассматриваться вместе со связанной с ней системой

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = -\mathbf{A}'(t) \mathbf{z}(t). \quad (3.419)$$

где  $\mathbf{A}'(t)$  — транспонированная матрица  $\mathbf{A}(t)$  [см. уравнение (2.45)].

Система, описываемая уравнением (3.419), называется сопряженной системой к системе (3.418).

Решение уравнения (3.418), удовлетворяющее начальному условию  $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}$ , выражается формулой

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \boldsymbol{\xi}, \quad (3.420)$$

где  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица уравнения (3.418), а решение уравнения (3.419) с начальным условием  $\mathbf{z}(0) = \boldsymbol{\pi}$  имеет вид

$$\mathbf{z}(t) = \Psi(t) \boldsymbol{\pi}, \quad (3.421)$$

где  $\Psi(t)$  — фундаментальная матрица уравнения (3.419).

Рассмотрим теперь, как связаны между собой  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$ . Эта связь выражается соотношением

$$\Psi'(t) \Phi(t) = \mathbf{I} \quad \text{для любого } t. \quad (3.422)$$

Во-первых, укажем, что

$$\Psi'(0) \Phi(0) = \mathbf{I} \mathbf{I} = \mathbf{I}. \quad (3.423)$$

Во-вторых, если выбрать  $\mathbf{v}$  — произвольный элемент из  $R_n$  и принять, что

$$\mathbf{h}(t) = \Psi'(t) \Phi(t) \mathbf{v}, \quad (3.424)$$

то

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \{\dot{\Psi}'(t) \Phi(t) + \Psi'(t) \dot{\Phi}(t)\} \mathbf{v}. \quad (3.425)$$

Но из определения фундаментальной матрицы следует, что

$$\dot{\Psi}'(t) = -\mathbf{A}'(t) \Psi'(t), \quad \dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}(t) \Phi(t). \quad (3.426)$$

На основании уравнения (2.48) заключаем, что

$$\dot{\Psi}'(t) = -\Psi'(t) \mathbf{A}(t) \quad (3.427)$$

и

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \{-\Psi'(t) \mathbf{A}(t) \Phi(t) + \Psi'(t) \mathbf{A}(t) \Phi(t)\} \mathbf{v} = \quad (3.428)$$

$$= \mathbf{0}. \quad (3.429)$$

Так как функция  $\mathbf{h}(t)$  есть решение задачи с начальными условиями

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = 0; \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{v}, \quad (3.430)$$

которая также имеет решением  $\mathbf{g}(t) = \mathbf{I} \mathbf{v}$ , нетрудно обнаружить, что

$$\Psi'(t) \Phi(t) \mathbf{v} = \mathbf{I} \mathbf{v}, \quad (3.431)$$

и, следовательно, уравнение (3.422) справедливо, так как  $\mathbf{v}$  — произвольный элемент из  $R_n$ .

Непосредственным и важным следствием уравнения (3.422) является

$$\langle \mathbf{z}(t), \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \Psi(t) \boldsymbol{\pi}, \Phi(t) \boldsymbol{\xi} \rangle = \quad (3.432)$$

$$= \langle \boldsymbol{\pi}, \Psi'(t) \Phi(t) \boldsymbol{\xi} \rangle = \quad (3.433)$$

$$= \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\xi} \rangle, \text{ [по уравнению (2.98)],} \quad (3.434)$$

где символ  $\langle, \rangle$  обозначает скалярное произведение на  $R_n$  [см. уравнение (2.86)].

Предположим, что рассматриваемая система обладает тем свойством, что ее матрица является кососимметричной [см. уравнение (2.99)]. Такую систему будем называть самосопряженной. Система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) \quad (3.435)$$

является самосопряженной, если

$$\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}'(t) = \mathbf{0}. \quad (3.436)$$

Заметим, что сопряженной системой для самосопряженной системы является сама система. Следовательно, если  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица самосопряженной системы, то

$$\Phi'(t) \Phi(t) = \mathbf{I}, \quad (3.437)$$

так как  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица сопряженной системы. Иначе говоря,  $\Phi(t)$  есть ортогональная матрица [см. уравнение (2.109)]. Следовательно, если положить, что

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \boldsymbol{\xi}$$

есть решение самосопряженной системы для начального условия  $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}$ , то получим

$$\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \Phi(t) \boldsymbol{\xi}, \Phi(t) \boldsymbol{\xi} \rangle = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle \quad (3.438)$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|\boldsymbol{\xi}\|. \quad (3.439)$$

Таким образом, если однородная система является самосопряженной, то евклидова длина решения  $\mathbf{x}(t)$  является постоянной величиной, не зависящей от времени.

**Пример 3.64.** Рассмотрим систему с постоянными параметрами  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$ . Сопряженная система есть  $\dot{\mathbf{z}}(t) = -\mathbf{A}' \mathbf{z}(t)$ . Фундаментальная матрица системы есть  $e^{\mathbf{A}t}$ , фундаментальная матрица сопряженной системы  $e^{-\mathbf{A}'t}$ . Уравнение (3.422) превращается в  $(e^{-\mathbf{A}'t})' e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$ , и, следовательно,  $e^{-\mathbf{A}'t} = (e^{\mathbf{A}t})'$ . Если система самосопряженная, т. е. если  $\mathbf{A} + \mathbf{A}' = \mathbf{0}$ , то  $e^{\mathbf{A}t}$  — ортогональная матрица и  $\|e^{\mathbf{A}t} \boldsymbol{\xi}\| = \|\boldsymbol{\xi}\|$  для любого  $\boldsymbol{\xi}$  из  $R_n$ .

**Упражнение 3.22.**  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Требуется показать, что система  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$  самосопряженная; вычислить фундаментальную матрицу  $e^{\mathbf{A}t}$  и убедиться путем прямых вычислений, что  $e^{\mathbf{A}t}$  — ортогональная матрица.

**Упражнение 3.23.** Дифференцируя  $\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \rangle$  и используя выражение (2.103), покажите, что если система  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$  самосопряженная, то  $\|\mathbf{x}(t)\| = \text{const}$ . Проделайте вычисления для частного случая  $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix}$ .

### 3.26. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными параметрами вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t), \quad (3.440)$$

где  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  — (постоянная)  $n \times n$  матрица.

Система устойчива, если малые отклонения от положения равновесия [т. е. решения  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ ] остаются малыми при сколь угодно большом увеличении времени  $t$ , и система неустойчива, если сколь угодно малые отклонения системы от положения равновесия с ростом времени неограниченно возрастают. Более строго условия устойчивости могут быть сформулированы следующим определением.

**Определение 3.45.** Система (3.440) устойчива, если евклидова норма  $\|\mathbf{x}(t)\|$  остается ограниченной при  $t \rightarrow \infty$  для любого решения  $\mathbf{x}(t)$  системы. Систему называют абсолютно устойчивой в том и только в том случае, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0 \quad (3.441)$$

для любого решения системы  $\mathbf{x}(t)$ . Если система не является устойчивой, т. е. если существует решение  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{x}}(t)\| = \infty, \quad (3.442)$$

то систему называют неустойчивой.

Обозначим собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  через

$$\lambda_i + j\mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.443)$$

где все  $\lambda$  и  $\mu$  — действительные числа и  $j = \sqrt{-1}$ . Следующий критерий связывает устойчивость системы (3.440) с собственными значениями (3.443) матрицы  $\mathbf{A}$  системы.

**Критерий устойчивости**<sup>1</sup>. Система (3.440) устойчива, если

1)  $\lambda_i \leq 0$  для всех  $i$  в случае, когда корни действительные числа (3.444)

2)  $\lambda_k < 0$  для всех  $k$  в случае кратных корней вида

$$\lambda_k + j\mu_k \quad (3.445)$$

Система (3.440) абсолютно устойчива, если

$$\lambda_i < 0 \text{ для любого } i. \quad (3.446)$$

Другими словами, система абсолютно устойчива, если все собственные значения имеют отрицательные действительные части. Система устойчива, когда в числе собственных значений нет ни одного с положительной действительной частью и действительные части всех собственных значений с кратностью больше единицы отрицательны.

**Пример 3.65.** Рассмотрим систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Собственными значениями системы являются корни уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Система абсолютно устойчива только в том случае, если  $a_0$  и  $a_1$  положительны ( $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ ). Если собственные значения имеют кратность больше единицы, т. е. если  $a_1^2 = 4a_0$ , то система будет устойчива лишь тогда, когда она абсолютно устойчива. При  $a_0 = a_1 = 0$  система неустойчива.

Сопряженная система для системы (3.440) имеет вид

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = -\mathbf{A}'\mathbf{z}(t), \quad (3.447)$$

<sup>1</sup> См. литературу [21], [25] и [46].



где  $\mathbf{A}'$  обозначает транспонированную матрицу  $\mathbf{A}$ . Если  $\lambda$  — собственное значение  $\mathbf{A}$ , то

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (3.448)$$

но

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -\det(-\mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}) = -\det[(-\mathbf{A}') + \lambda \mathbf{I}'], \quad (3.449)$$

поскольку детерминанты исходной и транспонированной матриц одинаковы. Следовательно,  $-\lambda$  является собственным значением матрицы  $-\mathbf{A}'$ , если собственным значением матрицы  $\mathbf{A}$  является число  $\lambda$ . Таким образом, с точки зрения критерия устойчивости сопряжения система неустойчива, когда исходная система абсолютно устойчива.

В заключение отметим, что понятие устойчивости рассмотрено нами лишь в том объеме, который необходим для дальнейшего изложения материала.

---

## ГЛАВА 4

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

#### 4.1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 2 и 3 был дан обзор математических понятий, которые необходимы нам для дальнейшего изложения. В этой главе мы используем эти понятия для того, чтобы определить и развить основные положения, на которых будет основываться последующее изложение теории систем оптимального управления. В частности, мы сформулируем определения таких ключевых понятий как «динамическая система» и «задача управления».

В следующих параграфах мы начнем с рассмотрения некоторых простых примеров, которые послужат мотивировкой формального определения динамической системы. Существенными элементами этого определения явятся понятия входа, выхода и состояния системы.

Рассмотрев основные понятия, связанные с динамическими системами, и связав их с более знакомым понятием передаточной функции, мы определим задачу управления и рассмотрим некоторые важные специальные случаи.

В заключение главы мы определим и рассмотрим некоторые качественные свойства систем управления такие, как достижимость, управляемость и наблюдаемость. Эти качественные свойства играют очень важную роль в теории управления.

Большинство определений и их приложений являются ключевыми для дальнейшего изложения. Основные понятия входа, выхода и состояния детально обсуждаются в книге Заде и Дезоера [212]. Понятие динамической системы рассматривается в работах [111], [113] и [210], а общая формулировка задачи управления обсуждается, например, в работах [23], [51], [89] и [106].

#### 4.2. ЦЕПОЧКА $RL$

Рассмотрим очень простую  $RL$ -цепочку (рис. 4.1), чтобы проиллюстрировать основные понятия, которые мы строго определим в дальнейшем.

Условимся называть напряжение  $u(t)$  «входом» и обозначим ток через  $i(t)$ . Предположим, что мы наблюдаем и измеряем напряжение  $y(t)$  на сопротивлении  $R$ , и условимся называть это напряжение «выходом». Известно, что ток  $i(t)$  и напряжение  $u(t)$  связаны дифференциальным уравнением

$$\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t), \quad (4.1)$$

и так как  $y(t) = Ri(t)$ , соотношение (4.1) можно переписать в виде

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{R}{L}y(t) = \frac{R}{L}u(t). \quad (4.2)$$

Каждый инженер знает, что если прикладываемое напряжение конечно, то ток, протекающий через индуктивность  $L$ , не может измениться мгновенно<sup>1</sup>. Имея это в виду, сделаем следующий эксперимент. В течение промежутка времени  $(0, T]$  приложим ко входу непрерывно изменяющееся напряжение  $u(t)$  и предположим, что нам известны  $y(0)$  и  $u(0)$ . Чтобы подчеркнуть, что вход известен на всем полуоткрытом интервале  $(0, T]$ , мы обозначим его через

$$u_{(0, T]}. \quad (4.3)$$

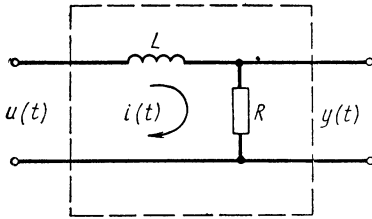


Рис. 4.1. В этой цепочке выходом  $y(t)$  является падение напряжения на сопротивлении  $R$

Иначе говоря,  $u_{(0, T]}$  есть функция, заданная на  $(0, T]$  с помощью соотношения

$$u_{(0, T]}(t) = u(t) \text{ для } t \text{ из } (0, T]. \quad (4.4)$$

Измерим выход  $y(t)$  в течение этого интервала времени и обозначим через  $y_{(0, T]}$  функцию, определенную на  $(0, T]$  с помощью соотношения

$$y_{(0, T]}(t) = y(t) \text{ для } t \text{ из } (0, T]. \quad (4.5)$$

Две величины

$$(u_{(0, T]}, y_{(0, T]}) \quad (4.6)$$

назовем «парой вход—выход» на интервале  $(0, T]$ . Нам хочется предсказать выходное напряжение  $y_{(0, T]}$ . Итак, мы столкнулись со следующей задачей: задано  $u_{(0, T]}$  и дифференциальное уравнение выхода (4.2). Какая дополнительная информация нужна для того, чтобы полностью определить  $y_{(0, T]}$ ?

Если положить  $a = R/L$ , то уравнение (4.2) принимает вид

$$\dot{y}(t) + ay(t) = au(t), \quad (4.7)$$

и его решение можно записать как

$$y(t) = y(0)e^{-at} + e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} au(\tau) d\tau. \quad (4.8)$$

Так как  $u_{(0, T]}$  известно, то член

$$e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} au(\tau) d\tau$$

также известен, и, таким образом, единственная величина, которую мы должны знать, чтобы предсказать  $y_{(0, T]}$ , есть  $y(0)$ , т. е. величина выходного напряжения при  $t = 0$ . Отметим, что знания напряжения на входе  $u(0)$  при  $t = 0$  не требуется. Основой этого вывода может служить следующее рассуждение. Предположим, что  $u(0+) \neq u(0)$ , т. е. что при  $t = 0+$  происходит скачок входного напряжения. Так как ток через индуктивность не может измениться мгновенно, то

$$i(0+) = i(0) \quad (4.9)$$

<sup>1</sup> Будем считать, что не бывает импульсов типа  $\delta(t)$ , и поэтому  $u(t)$  не может быть таким импульсом.

и, следовательно,

$$y(0+) = y(0) \quad (4.10)$$

не зависит от  $u(0)$ . Итак, для цепочки (см. рис. 4.1) знания  $u_{(0, T]}$  и  $y(0)$  достаточно, чтобы полностью определить  $y_{(0, T]}$ .

Если дать тривиальное определение:

$$x(t) = y(t); \quad t \in (0, T], \quad (4.11)$$

то можно обнаружить, что  $x(0)$  — минимальный объем информации, требуемый для того, чтобы определить  $y_{(0, T]}$  по заданному  $u_{(0, T]}$ . Будем называть  $x(0)$  состоянием системы при  $t = 0$  и отметим, что  $x(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) + ax(t) = au(t). \quad (4.12)$$

Заметим, далее, что если  $\hat{t}$  есть элемент из  $(0, T]$ , т. е.  $0 < \hat{t} < T$ , то знания  $x(\hat{t}) [= y(\hat{t})]$  достаточно для того, чтобы найти выход  $y(t)$  на интервале  $(\hat{t}, T]$ , если задан вход  $u(t)$  на этом интервале [см. уравнение (3.250)]. Итак,  $x(t)$  будем называть состоянием (переменным) нашей  $RL$ -цепочки.

Рассмотрим теперь ту же цепочку несколько иначе (рис. 4.2). Предположим, что мы наблюдаем и измеряем напряжение на индуктивности  $L$ , а не на сопротивлении  $R$ . Назовем это напряжение выходом  $y(t)$ . Ток  $i(t)$  по-прежнему удовлетворяет уравнению (4.1), однако выход в этом случае описывается уравнением

$$y(t) + Ri(0) + \frac{R}{L} \int_0^t y(\tau) d\tau = u(t), \quad (4.13)$$

так как

$$y(t) = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (4.14)$$

Предположим, что мы прикладываем непрерывный входной сигнал (или «вход»)  $u(t)$ , дифференцируемый на временном интервале  $(0, T]$ . В этом случае уравнение (4.13) можно продифференцировать и получить

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{R}{L} y(t) = \frac{du(t)}{dt}, \quad t \in (0, T] \quad (4.15)$$

или, положив  $a = R/L$ , записать

$$\dot{y}(t) + ay(t) = \dot{u}(t), \quad t \in (0, T]. \quad (4.16)$$

Зная  $y(0)$ ,  $u(0)$  и  $u_{(0, T]}$ , мы хотели бы предсказать выход  $y_{(0, T]}$ . Здесь необходимо решить следующую задачу. Пусть известны  $u_{(0, T]}$  и дифференциальное уравнение выхода (4.16). Какая дополнительная информация необходима, чтобы полностью определить  $y_{(0, T]}$ ?

Рассматривая цепочку на рис. 4.2 с физической точки зрения, мы видим, что если имеет место скачок на входе при  $t = 0$ , т. е. если

$$u(0+) \neq u(0), \quad (4.17)$$

то напряжение  $y(t)$  на индуктивности  $L$  также должно скачкообразно измениться при  $t = 0+$  от  $y(0)$  до  $y(0+)$ , поскольку ток через  $L$  и, следовательно, напряжение на сопротивлении  $R$  не изменяются. Другими словами, тот факт, что ток через  $L$  не может измениться мгновенно, означает, что

$$Ri(0) = Ri(0+) \quad (4.18)$$

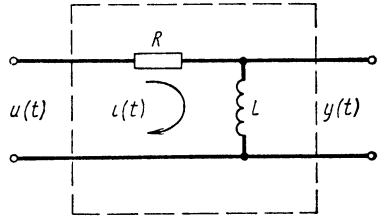


Рис. 4.2. В этой цепочке выходом  $y(t)$  является напряжение на индуктивности  $L$

и, следовательно,

$$y(0) - u(0) = y(0+) - u(0+) \quad (4.19)$$

или

$$y(0+) = y(0) + u(0+) - u(0). \quad (4.20)$$

Решение уравнения (4.16) на интервале  $(0, T]$  записывается в виде

$$y(t) = e^{-at}y(0+) + e^{-at} \int_{0+}^t e^{a\tau} \dot{u}(\tau) d\tau. \quad (4.21)$$

и, таким образом, чтобы определить  $y_{(0, T]}$ , мы должны знать  $y(0+)$  или, эквивалентно, обе величины  $y(0)$  и  $u(0)$ .

Если теперь определить новую переменную  $x(t)$ , положив

$$x(t) = y(t) - u(t) \quad (4.22)$$

для  $t$  из  $(0, T]$ , т. е. приняв за  $x(t)$  разность между выходом  $y(t)$  и входом  $u(t)$ , то

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t) - \dot{u}(t), \quad t \in (0, T]. \quad (4.23)$$

Из уравнений (4.16), (4.22) и (4.23) получаем

$$\dot{x}(t) + ax(t) = -au(t) \quad (4.24)$$

для  $t$  из  $(0, T]$ . Так как уравнение (4.22) справедливо для любого  $t$  из  $(0, T]$ , имеем

$$x(0) = y(0) - u(0); \quad (4.25)$$

$$x(0+) = y(0+) - u(0+) \quad (4.26)$$

и

$$x(0+) - x(0) = y(0+) - y(0) - u(0+) + u(0) = \quad (4.27)$$

$$= 0 \text{ по уравнению (4.20)} \quad (4.28)$$

Итак, решение уравнения (4.24) можно записать в виде

$$x(t) = e^{-at}x(0) - ae^{-at} \int_0^t e^{a\tau} u(\tau) d\tau. \quad (4.29)$$

Следовательно, зная  $x(0) = y(0) - u(0)$  и  $u_{(0, T]}$ , можно полностью определить  $x_{(0, T]}$  и, таким образом, в силу уравнения (4.22) полностью определить  $y_{(0, T]}$ . Назовем  $x(0)$  состоянием при  $t = 0$  и заметим, что если  $\hat{t}$  есть элемент из  $(0, T)$ , т. е.  $0 < \hat{t} < T$ , то зная  $x(\hat{t}) = y(\hat{t}) - u(\hat{t})$ , можно определить выход  $y(t)$  на интервале  $(\hat{t}, T]$  при заданном входе  $u(t)$  на том же интервале. Итак,  $x(t)$  назовем переменным состоянием системы. Отметим, что уравнения (4.22) и (4.29) описывают поведение цепочки, приведенной на рис. 4.2.

Для системы (см. рис. 4.1), в которой выходом  $y(t)$  было напряжение на сопротивлении  $R$ , мы получили уравнения:

$$\dot{x}(t) + ax(t) = au(t) - \text{уравнение состояния, } a = R/L; \quad (4.30)$$

$$y(t) = x(t) - \text{уравнение выхода,} \quad (4.31)$$

описывающие поведение цепочки, такие, что знание  $x(0)$  и  $u_{(0, T]}$  позволяет определить  $y_{(0, T]}$ .

Для системы рис. 4.2, где выходом  $y(t)$  было напряжение на индуктивности  $L$ , мы получили уравнения:

$$\dot{x}(t) + ax(t) = -au(t) - \text{уравнение состояния, } a = R/L; \quad (4.32)$$

$$y(t) = x(t) + u(t) - \text{уравнение выхода,} \quad (4.33)$$

описывающие поведение этой цепочки.

**Пример 4.1.** Примем

$$\left. \begin{aligned} L = R = 1; \quad a = 1; \quad T = 2 \text{ сек}; \quad y(0) = -0,5 \\ u(0) = -1; \quad u(t) = e^{-t}; \quad 0 < t \leq 2 \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Для цепочки (см. рис. 4.1) уравнение (4.30) запишется в виде

$$\dot{x}(t) + x(t) = e^{-t}. \quad (4.35)$$

На основании уравнения (4.31) и того, что  $x(0) = y(0)$ , имеем

$$x(0) = -0,5; \quad (4.36)$$

тогда

$$x(t) = -0,5e^{-t} + te^{-t}, \quad (4.37)$$

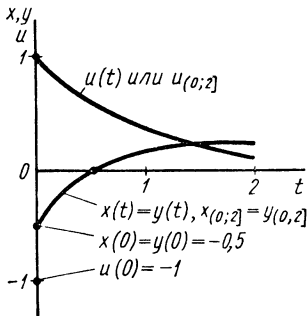


Рис. 4.3. Выход  $y(t)$ , состояние  $x(t)$  и вход  $u(t)$  для цепочки, показанной на рис. 4.1

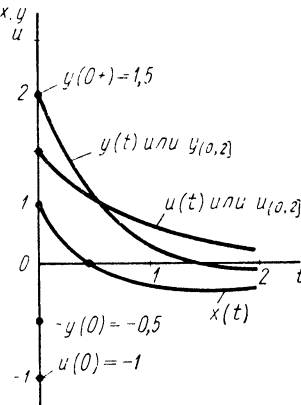


Рис. 4.4. Выход  $y(t)$ , состояние  $x(t)$  и вход  $u(t)$  для цепочки показанной на рис. 4.2

и с помощью уравнения (4.31) найдем

$$y(t) = -0,5e^{-t} + te^{-t}. \quad (4.38)$$

Состояние  $x(t)$ , выход  $y(t)$  и вход  $u(t)$  показаны на рис. 4.3.

Для цепочки (см. рис. 4.2) уравнение (4.32) записывается так:

$$\dot{x}(t) + x(t) = -e^{-t}. \quad (4.39)$$

Так как  $x(0) = y(0) - u(0)$  [по уравнению (4.33)], имеем

$$x(0) = -0,5 + 1 = +0,5. \quad (4.40)$$

Решением уравнения (4.39) является:

$$x(t) = 0,5e^{-t} - te^{-t}. \quad (4.41)$$

Выход, по уравнению (4.33) равный  $y(t) = x(t) + u(t)$ , запишем в виде

$$y(t) = 0,5e^{-t} - te^{-t} + e^{-t} = 1,5e^{-t} - te^{-t}. \quad (4.42)$$

Состояние  $x(t)$ , выход  $y(t)$  и вход  $u(t)$  показаны на рис. 4.4.

**Упражнение 4.1.** Рассмотрите  $RLC$ -цепочку, показанную на рис. 4.5. Пусть  $u(t)$  обозначает входное напряжение, а  $y_R(t)$ ,  $y_L(t)$  и  $y_C(t)$  обозначают напряжения на сопротивлении  $R$ , индуктивности  $L$  и конденсаторе  $C$  соответственно. Предполагаем, что  $u_{(0, T]}$  дифференцируема. Найти соотношения, связывающие вход  $u(t)$  с выходами  $y_R(t)$ ,  $y_L(t)$  и  $y_C(t)$ . В каждом случае с физической точки зрения определите сигналы, которые надо знать при  $t = 0$  для того, чтобы полностью определить выходы  $y_R(0, T]$ ,  $y_L(0, T]$  и  $y_C(0, T]$  если задано  $u_{(0, T]}$ .

**Упражнение 4.2.** Дана система (дифференцирующее звено) с входом  $u(t)$  и выходом  $y(t)$ , связанными соотношением

$$y(t) = \dot{u}(t).$$

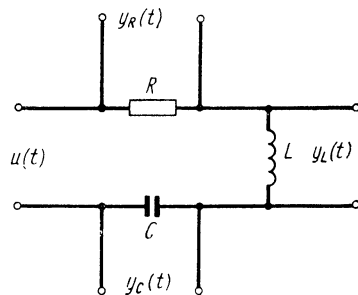


Рис. 4.5.  $RLC$ -цепочка

Покажите, что если  $u_{(0, T]}$  дифференцируема, то  $y_{(0, T]}$  полностью определен, если известно  $u(0)$ . У к а з а н и е: Систему можно представлять в виде единичной индуктивности; вход  $u(t)$  — ток через нее; выход  $y(t)$  — напряжение на индуктивности.

### 4.3. СИСТЕМА СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Обратимся теперь к системе, показанной на рис. 4.6, которая получена путем соединения друг с другом нескольких подсистем (обозначенных на рис. 4.6 символами  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_4$ ). Система имеет два входа  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  и два наблюдаемых выхода  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ . Вход  $u_1(t)$  прикладывается к подсистемам  $S_1$  и  $S_2$ , выходы которых равны  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  соответственно. Вход  $u_2(t)$  прикладывается к подсистемам  $S_3$  и  $S_4$ , с выходами  $x_3(t)$  и  $x_4(t)$  соответственно. Пусть выходные сигналы  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , которые мы измеряем, даются соотношениями

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) + x_3(t); \\ y_2(t) &= x_2(t) + x_4(t), \end{aligned} \quad (4.43)$$

а выходы  $x_i(t)$  мы наблюдать не можем.

Предположим, что каждую из подсистем  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) можно описать простым линейным уравнением первого порядка. Имеем

$$S_1: \dot{x}_1(t) = a_1 x_1(t) + u_1(t); \quad (4.44)$$

$$S_2: \dot{x}_2(t) = a_2 x_2(t) + u_1(t); \quad (4.45)$$

$$S_3: \dot{x}_3(t) = a_3 x_3(t) + u_2(t); \quad (4.46)$$

$$S_4: \dot{x}_4(t) = a_4 x_4(t) + u_2(t). \quad (4.47)$$

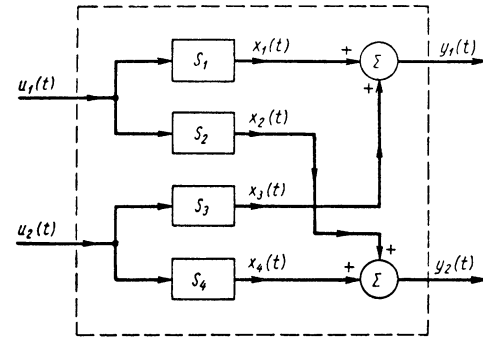


Рис. 4.6. Система со многими переменными

Исходя из этого предположения и соотношений (4.43) можно заключить, что выходные сигналы  $(y_1) t$  и  $y_2(t)$  связаны с входными сигналами  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  следующими двумя соотношениями:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) - (a_1 + a_3) \dot{y}_1(t) + (a_1 a_3) y_1(t) &= \\ = \dot{u}_1(t) + \dot{u}_2(t) - a_3 u_1(t) - a_1 u_2(t); \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2(t) - (a_2 + a_4) \dot{y}_2(t) + (a_2 a_4) y_2(t) &= \\ = \dot{u}_1(t) + \dot{u}_2(t) - a_4 u_1(t) - a_2 u_2(t). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Определим для удобства входной вектор  $u(t)$  и выходной вектор  $y(t)$ , положив

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}; \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Желая предсказать выход (вектор)  $y_{(0, T]}$ , мы сталкиваемся со следующей задачей: известны  $u_{(0, T]}$  и дифференциальные уравнения выхода (4.48), (4.49). Какая нужна дополнительная информация для того, чтобы полностью определить  $y_{(0, T]}$ ?

Из рассмотрения дифференциальных уравнений (4.48) и (4.49) следует, что для полного определения  $y_{(0, T]}$  достаточно знать следующие начальные условия:

$$y_1(0), \dot{y}_1(0), y_2(0), \dot{y}_2(0), u_1(0), u_2(0) \quad (4.51)$$

или, что эквивалентно,

$$y(0), \dot{y}(0), u(0).$$

С другой стороны, из блок-схемы рис. 4.6 видно, что зная

$$x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0), \quad (4.52)$$

можно полностью определить  $x_1(0, T]$ ,  $x_2(0, T]$ ,  $x_3(0, T]$  и  $x_4(0, T]$  при заданном  $u(0, T]$  (см. § 4.2). В силу уравнений (4.44)—(4.47), т. е. исходя из того, что система представляет собой соединение подсистем  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ , заключаем: для определения  $y_1(0, T]$  и  $y_2(0, T]$  при заданном  $u(0, T]$  требуется знать вектор  $x(t)$ , где

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Вектор  $x(0)$  будем называть состоянием системы при  $t = 0$  и вектор  $x(t)$  — состоянием системы в момент времени  $t$ . Если  $x(t)$  может быть измерен, то выход  $y(0, T]$  можно предсказать. Мы предположили, что  $x(t)$  измерить нельзя, и поэтому постараемся установить, можно ли рассчитать  $x(t)$  на основании наблюдаемых сигналов  $u(t)$  и  $y(t)$ . Из уравнений (4.43) следует, что

$$\left. \begin{aligned} y_1(0) &= x_1(0) + x_3(0); \\ y_2(0) &= x_2(0) + x_4(0). \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

Продифференцировав (4.43), получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1(0) &= \dot{x}_1(0) + \dot{x}_3(0) = a_1x_1(0) + a_3x_3(0) + u_1(0) + u_2(0); \\ \dot{y}_2(0) &= \dot{x}_2(0) + \dot{x}_4(0) = a_2x_2(0) + a_4x_4(0) + u_1(0) + u_2(0). \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

Итак, если мы знаем  $y(0)$ ,  $\dot{y}(0)$  и  $u(0)$ , т. е. те же самые величины, что и в (4.51), то можем найти  $x(0)$  из (4.54) и (4.55). Если  $a_i$  различны, то  $x(0)$  определяется единственным образом; с другой стороны, если, например,  $a_1 = a_3$ , то  $x(0)$  не является единственным (см. упражнение 4.3). Во всяком случае, даже не имея возможности непосредственно измерить  $x(t)$ , его можно рассчитать по входным и выходным сигналам системы.

**Упражнение 4.3.** Предположим, что все подсистемы  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$  идентичны, т. е. в уравнениях с (4.44) по (4.47) имеем  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ . Требуется показать, что знания  $y_1(0)$  и  $y_2(0)$  достаточно, чтобы при заданных входах определить выходы  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ .

## ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

### 4.4. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Познание физического мира основано на эксперименте и абстракции. Инженер изучает физические системы, имея в виду вполне определенные конкретные цели, тогда как теоретик пытается обнаружить общие законы, управляющие поведением физических систем или описывающие их поведение, в самом общем виде.

Попробуем сначала представить поведение инженера-проектировщика. Нам дана физическая система  $\mathfrak{F}$  («черный ящик»), и мы можем прикладывать некоторые входные «сигналы» к  $\mathfrak{F}$  так, чтобы наблюдать и измерять получившиеся в результате выходные «сигналы». Возможной целью изучения системы является определение входа, такого, чтобы выход обладал некоторыми желаемыми характеристиками, а «стоимость» управ-



ления была минимальна. Попытаемся достичь этой цели методом «проб и ошибок», испытывая последовательно различные входы. Такая процедура может дать искомый ответ. В общем же случае это невозможно. Будем рассматривать наши попытки как эксперименты, которые могут привести к описанию поведения  $\mathfrak{F}$  и определению, какой «выход» будет наблюдаться при приложении любого «входа». Итак, мы столкнулись с задачей описания  $\mathfrak{F}$  и отыскания подходящей модели поведения  $\mathfrak{F}$ . Обычно эту задачу пытаются решить путем разработки математических моделей, которые в форме уравнений связывают выход и вход системы. Вид выбранной модели основывается на результатах экспериментов и на предположениях относительно основных законов, управляющих поведением всех физических систем. Эти предположения обычно принимаются за аксиомы, которые дают точное определение теоретических понятий, привлекаемых для построения математической модели поведения физической системы  $\mathfrak{F}$ . Как только принята некоторая модель, на ее основе делаются определенные выводы, которые проверяются в ходе дальнейших экспериментов над системой  $\mathfrak{F}$ .

В данной книге мы будем иметь дело с физическими системами  $\mathfrak{F}$ , поведение которых может быть адекватно описано с помощью математических моделей или динамических систем.

В § 4.5 дано аксиоматическое определение динамической системы. Здесь же, имея в виду примеры § 4.2 и 4.3, попробуем эвристически рассмотреть некоторые идеи, которые позволят подойти к этой задаче более строго.

Для начала проделаем мысленно следующий эксперимент. В некоторый «начальный момент времени» мы прикладываем входной сигнал к физической системе  $\mathfrak{F}$  вплоть до некоторого будущего момента времени. В течение этого интервала времени, который назовем интервалом наблюдения, будем наблюдать выход системы  $\mathfrak{F}$ . Известно, что полученный выход зависит не только от приложенного входного сигнала, но и от внутреннего состояния системы  $\mathfrak{F}$  в начальный момент времени. Если считать, что  $\mathfrak{F}_1$  есть точное изображение  $\mathfrak{F}$ , т. е. системы  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}_1$  идентичны, то можно сформулировать следующую задачу:

если к системам  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}_1$ , начиная с одного и того же момента, приложить одинаковые входные сигналы, то будут ли одинаковыми выходные сигналы систем  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}_1$ ?

Например, если  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}_1$  — идентичные  $RLC$ -цепочки, к которым мы прикладываем один и тот же сигнал (напряжение), начиная с момента  $t_0$  до некоторого будущего момента времени  $t_1$ , то задача, которую мы пытаемся решить, может быть поставлена так: будут ли выходные сигналы (напряжения) одинаковы на всем интервале наблюдения  $(t_0, t_1]$ ? При этом выходное напряжение будет зависеть как от заряда конденсатора и тока, протекающего через индуктивность при  $t = t_0$ , так и от входного напряжения. Итак, если заряды конденсаторов и токи в индуктивностях систем  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}_1$  при  $t = t_0$  различны, то прикладывая один и тот же входной сигнал (напряжение) к  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}_1$  в интервале  $(t_0, t_1]$ , надо ожидать, что будут наблюдаться различные выходные сигналы (напряжения) в системах  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}_1$ . Таким образом, чтобы предсказывать сигнал на выходе, необходимо знать как входной сигнал, так и условия в системе  $\mathfrak{F}$ . Эти условия представляют собой дополнительную информацию, которой мы можем располагать для начального момента времени  $t_0$ , и называются (начальным) состоянием системы  $\mathfrak{F}$  при  $t = t_0$ .

Теперь попробуем выступить в роли теоретика и попытаемся развить формальный способ описания системы  $\mathfrak{F}$ . Начнем с того, что введем некоторые обозначения. Символом  $u$  обозначим типичную входную функцию

времени, а  $\mathbf{y}$  — соответствующую выходную функцию времени. Если  $t$  — некоторый момент времени, то

$$\mathbf{u}(t) \text{ — значение входа } \mathbf{u} \text{ в момент времени } t; \quad (4.56)$$

$$\mathbf{y}(t) \text{ — значение выхода } \mathbf{y} \text{ в момент времени } t. \quad (4.57)$$

Величины  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  могут быть скалярами или элементами из  $R_m$  и  $R_n$  соответственно (т. е.  $\mathbf{u}(t)$  — набор  $m$  действительных чисел и  $\mathbf{y}(t)$  — набор  $n$  действительных чисел) или значительно более общие параметры. Например, если  $\mathfrak{F}$  — устройство для распознавания образов, то вход  $\mathbf{u}(t)$  в момент времени  $t$  может представлять собой двумерное изображение, а выход  $\mathbf{y}(t)$  — решение, является ли  $\mathbf{u}(t)$  картинкой, изображающей птицу, самолет или робот. Понятия и определения, приведенные в § 4.5, являются весьма общими, но в дальнейшем будем рассматривать лишь те случаи, когда входные величины представляют собой элементы из  $R_m$ , а выходные  $\mathbf{y}(t)$  — элементы из  $R_n$ .

Начнем наш эксперимент в момент времени  $t_0$  и до некоторого будущего момента времени  $t_1$  приложим к системе вход  $\mathbf{u}$ . Так как мы наблюдаем и измеряем выход  $\mathbf{y}$  в течение интервала  $(t_0, t_1]$ , то будем называть полузакрытый интервал  $(t_0, t_1]$  интервалом наблюдения. Для удобства обозначим величины  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{y}$  на этом интервале через  $\mathbf{u}_{(t_0, t_1]}$  и  $\mathbf{y}_{(t_0, t_1]}$ , положив

$$\mathbf{u}_{(t_0, t_1]}(t) = \mathbf{u}(t) \text{ для } t \text{ из } (t_0, t_1]; \quad (4.58)$$

$$\mathbf{y}_{(t_0, t_1]}(t) = \mathbf{y}(t) \text{ для } t \text{ из } (t_0, t_1]. \quad (4.59)$$

Две функции  $(\mathbf{u}_{(t_0, t_1]}, \mathbf{y}_{(t_0, t_1]})$  назовем парой вход—выход на интервале наблюдения. Попросту говоря, систему  $\mathfrak{F}$  можно описать как множество всех таких пар, взятых на всех интервалах наблюдения для всех условий (или состояний)  $\mathfrak{F}$ . Такой подход соответствует проведению всех возможных экспериментов над  $\mathfrak{F}$ , и он нецелесообразен. Мы можем также считать, что  $\mathfrak{F}$  устанавливает некоторые соотношения между входом, выходом и состоянием.

Поскольку в настоящей книге все внимание сконцентрировано на макроскопических объектах, будем считать все системы полностью детерминированными и полагать, что они подчиняются классическим причинно-следственным законам физики. Иначе говоря, будем полагать:

1. Все величины и функции строго детерминированны. Случайные элементы из рассмотрения исключены.

2. Системы без предсказания, т. е. такие системы, когда текущие значения входа, выхода и состояния не зависят от их будущих значений.

Пусть  $\mathcal{S}$  — абстрактная математическая модель физической системы  $\mathfrak{F}$ . Для системы  $\mathcal{S}$  мы должны иметь определенный набор входных временных функций  $\mathbf{u}$ , соответствующий набор выходных временных функций  $\mathbf{y}$  и набор временных функций состояния  $\mathbf{x}$ . Мы должны иметь два уравнения: выхода и состояния, связывающие вход, выход и состояние системы  $\mathcal{S}$ . Запишем эти уравнения в виде:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}_{(t_0, t_1]}; (t_0, t_1)] \text{ — уравнение выхода} \quad (4.60)$$

и

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}_{(t_0, t_1]}; (t_0, t_1)] \text{ — уравнение состояния.} \quad (4.61)$$

Известно, что выход  $\mathbf{y}(t)$  в момент времени  $t$  зависит от состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  в момент времени  $t_0$ ; входа, прикладываемого на интервале наблюдения  $(t_0, t_1]$ , и самого интервала наблюдения  $(t_0, t_1]$ . Мы знаем также, что воздействие на входе  $\mathbf{u}_{(t_0, t_1]}$  не только влияет на выход  $\mathbf{y}_{(t_0, t_1]}$ , но и изменяет состояние системы. Результат этого изменения  $\mathbf{x}(t)$  в момент вре-

мени  $t$  зависит от начального состояния  $x(t_0)$  в момент времени  $t_0$ , прикладываемого на интервале наблюдения, и самого интервала наблюдения  $(t_0, t_1]$ .

Если для нашей модели справедливы сделанные выше предположения и если  $\mathcal{S}$  является адекватным отображением физической системы  $\mathfrak{F}$ , то уравнения выхода и состояния системы  $\mathcal{S}$  должны обладать некоторыми естественными и желательными свойствами. Например, обе функции  $f$  и  $g$  должны быть детерминированными (т. е. ни одна входящая в них величина не может быть случайной или содержать случайные элементы) и не должны зависеть от будущих значений входа, выхода или состояния. Функции  $f$  и  $g$  должны быть выбраны так, чтобы модель  $\mathcal{S}$  аппроксимировала результаты наших экспериментов над физической системой  $\mathfrak{F}$ . Иначе говоря, функции  $f$  и  $g$  надо выбрать так, чтобы они соответствовали экспериментальным данным.

В следующем параграфе мы дадим аксиоматическое определение довольно общего класса моделей систем, а именно: класса динамических систем. Аксиомы предъявляют определенные требования к входным и выходным сигналам, к множеству состояний системы и к функциям  $f$  и  $g$ . В § 4.6 мы наложим дополнительные ограничения, чтобы выделить тот класс систем, который и будет рассматриваться в основной части книги. Однако прежде чем перейти к формальному определению, в заключительной части настоящего параграфа мы укажем на некоторые интуитивные аспекты общих аксиом и класса систем, представляющего наибольший интерес.

Первая аксиома предполагает, что если известно начальное состояние в момент времени  $t_0$  и к системе на интервале  $(t_0, t_1]$  прикладывается известный вход  $u_{(t_0, t_1]}$ , то выход определяется единственным образом. Вторая аксиома утверждает, что существует «достаточно много» состояний системы, так что любая пара вход—выход может быть использована для расчетов. Вторая аксиома, по сути дела, утверждает, что знания начального состояния и входа, прикладываемого на интервале наблюдения, достаточно не только для определения выхода на интервале наблюдения, но и состояния системы в пределах интервала наблюдения. Это очень важно, так как состояние в любой момент времени в некотором смысле суммирует всю прошлую информацию, требующуюся для предсказания будущих выходных сигналов и будущих состояний. Третья аксиома является условием «гладкости», которое гарантирует, что малые изменения входа или начального состояния вызовут соответственно малые изменения выхода и будущего состояния системы. Четвертая (и последняя) аксиома содержит условия, которым должна удовлетворять функция, описывающая изменение состояния системы.

Системы, которые мы будем изучать в основной части книги, должны удовлетворять не только четырем аксиомам, но и некоторым дополнительным условиям. Предположим, в частности, что состояния системы — элементы некоторого евклидова пространства  $R_n$ , т. е.  $n$ -мерные векторы, или соответственно наборы  $n$  действительных чисел. Потребуем далее, чтобы входные величины были элементами евклидова пространства  $R_m$ ,  $m \leq n$ , а выходные величины — элементами  $R_p$ . Будем также считать, что все рассматриваемые величины, являющиеся функциями времени, такие, как входы и выходы, определены на некотором открытом интервале  $(T_1, T_2)$ , а не в дискретные моменты времени (т. е. будем рассматривать непрерывные, а не дискретные по времени системы). Наконец, будем считать, что уравнение состояния представляет собой решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям теоремы существования и единственности (теорема 3.14).

#### 4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ <sup>1</sup>

Определим в этом параграфе понятие динамической системы формальным и довольно общим образом.

Хотя мы и будем стремиться дать аксиоматическое определение, оно не будет «слишком» общим. В следующем параграфе мы еще больше сузим это определение, с тем чтобы выделить класс систем, который будет рассматриваться в дальнейшем. Еще раз отметим, что наше представление о динамической системе базируется на понятиях входа, выхода и состояния.

Пусть  $T$  — подмножество всех действительных чисел;  $\Sigma$  — множество с расстоянием  $d$  на нем (см. § 3.1);  $\Omega$  — множество с расстоянием  $\hat{d}$  и  $U$  — множество кусочно-непрерывных функций на  $T$  со значениями в  $\Omega$ . Обозначим через  $\mathbf{x}(t)$  — переменную, определенную на  $T$  со значениями в  $\Sigma$ , а через  $\mathbf{g}$  — функцию преобразования из  $\Sigma \times \Omega \times T$  (см. § 3.2) в евклидово пространство  $R_p$ . Если  $t_0$  и  $t$  — элементы из  $T$ , причем  $t_0 \leq t$ , то будем записывать  $(t_0, t]$  для обозначения множества всех элементов  $T$  между  $t_0$  и  $t$ , т. е.

$$(t_0, t] = \{\tau : \tau \in T, t_0 < \tau \leq t\}. \quad (4.62)^2$$

Символ  $\mathbf{u}_{(t_0, t]}$  будем использовать для обозначения сегмента (отрезка) функции  $\mathbf{u}$  из  $U$  на множестве  $(t_0, t]$ . Если  $t$  — элемент  $T$ ,  $\mathbf{u}$  — элемент  $U$  и  $\mathbf{x}(t)$  — элемент  $\Sigma$ , то  $\mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$  есть вполне определенный элемент из  $R_p$ , который будем обозначать через  $\mathbf{y}(t)$ , т. е.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]. \quad (4.63)$$

Через  $\mathbf{y}_{(t_0, t]}$  будем обозначать сегмент функции (4.63) на  $(t_0, t]$  и писать

$$\mathbf{y}_{(t_0, t]} = \hat{\mathbf{g}}[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}_{(t_0, t]}]. \quad (4.64)$$

Сформулируем аксиомы:

**Аксиома 4.1.** Для любых  $\mathbf{x}(t_0)$  из  $\Sigma$ ; любых  $t$  и  $t_0$  из  $T$ ;  $t \geq t_0$ ,  $t \in T$  и любого  $\mathbf{u}_{(t_0, t]}$ ,  $\mathbf{u} \in U$  знание  $\mathbf{x}(t_0)$  и  $\mathbf{u}_{(t_0, t]}$  однозначно определяет  $\mathbf{y}_{(t_0, t]}$ . В частности, если  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — элементы из  $U$  такие, что

$$\mathbf{u}_{(t_0, t]} = \mathbf{v}_{(t_0, t]}, \quad (4.65)$$

то

$$\hat{\mathbf{g}}[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}_{(t_0, t]}] = \hat{\mathbf{g}}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}_{(t_0, t]}]. \quad (4.66)$$

**Аксиома 4.2.** Если  $t_0 < \hat{t} < t$  — элементы из  $T$ ,  $\mathbf{x}(t_0)$  — элемент из  $\Sigma$ , а  $\Sigma[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}, \hat{t}]$  — множество всех элементов  $\mathbf{x}(\hat{t})$  из  $\Sigma$ , удовлетворяющих уравнению

$$\mathbf{y}_{(\hat{t}, t]} = \hat{\mathbf{g}}[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}_{(t_0, t]}]_{(\hat{t}, t]} = \hat{\mathbf{g}}[\mathbf{x}(\hat{t}); \mathbf{u}_{(\hat{t}, t]}] \quad (4.67)$$

и  $\mathbf{u}^*$  — заданный элемент из  $U$ , то пересечение множеств  $\Sigma[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}, \hat{t}]$ , где  $\mathbf{u}$  — элемент из  $U$  такой, что  $\mathbf{u}_{(t_0, \hat{t}]} = \mathbf{u}^*_{(t_0, \hat{t}]}$ , не является пустым, т. е.

$$\bigcap_{\substack{\mathbf{u} \in U \\ \mathbf{u}_{(t_0, \hat{t}]} = \mathbf{u}^*_{(t_0, \hat{t}]}}} \Sigma[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}, \hat{t}] \neq \emptyset. \quad (4.68)$$

<sup>1</sup> См. литературу [111], [113] и [210], [212]. Особый интерес представляют гл. 1—4 книги [212].

<sup>2</sup> В этом случае интервал  $(t_0, t]$  скорее является пересечением полуоткрытого интервала  $(t_0, t]$  с множеством  $T$  [см. уравнения (2.3) и (3.7)].

В частности, ни одно множество  $\Sigma [x(t_0), u, \hat{t}]$  не является пустым. Эта аксиома утверждает, что существует по крайней мере один элемент из  $\Sigma$ , являющийся общим для любой пары  $(u_{(\hat{t}, t)}, y_{(\hat{t}, t)})$ .

Можно показать далее, что из аксиом 4.1 и 4.2 вытекает существование функции  $\Phi [t, u_{(t_0, t)}, x(t_0)]$  такой, что

$$x(t) = \Phi [t, u_{(t_0, t)}, x(t_0)]. \quad (4.69)^1$$

**Аксиома 4.3.** Функции  $g, \hat{g}$  и  $\Phi$  непрерывны относительно всех своих аргументов. Зависимость  $g$  и  $\Phi$  от  $u_{(t_0, t)}$  означает, что если  $u$  и  $v$  — элементы  $U$  такие, у которых расстояние

$$d_u(u_{(t_0, t)}, v_{(t_0, t)}) = \sup_{\tau \in [t_0, t] \cap T} \{\hat{d}(u(\tau), v(\tau))\} \quad (4.70)^2$$

мало, то расстояния

$$d\{\Phi [t; u_{(t_0, t)}; x(t_0)], \Phi [t; v_{(t_0, t)}; x(t_0)]\} \quad (4.71)$$

и

$$\sup_{\tau \in [t_0, t] \cap T} \|\hat{g}[x(t_0); u_{(t_0, \tau)}] - \hat{g}[x(t_0); v_{(t_0, \tau)}]\| \quad (4.72)$$

также малы (здесь  $\hat{g}[x(t_0); u_{(t_0, t_0)}] = g[x(t_0), u(t_0+), t_0]$  и  $\hat{g}[x(t_0); v_{(t_0, t_0)}] = g[x(t_0); v(t_0+), t_0]$  по определению)<sup>3</sup>.

**Аксиома 4.4.** Функция  $\mathcal{G}$  удовлетворяет условиям:

а. Для любых  $t, t_0 \in T, u \in U$  и  $x(t_0) \in \Sigma, \mathcal{G}[t_0; u_{(t_0, t)}, x(t_0)] = x(t_0)$  в том смысле, что предел  $\mathcal{G}[t; u_{(t_0, t)}, x(t_0)]$  равен  $x(t_0)$ , если  $t$  приближается к  $t_0$  справа. Это можно записать также как  $\mathcal{G}[t_0; u_{(t_0, t_0)}, x(t_0)]$ .

б. Для любых  $t_0 < \hat{t} \leq t$  из  $T, u \in U$  и  $x(t_0) \in \Sigma$

$$\mathcal{G}[t; u_{(t_0, t)}, x(t_0)] = \mathcal{G}[t; \hat{u}_{(t, \hat{t})}, \mathcal{G}[\hat{t}; u_{(t_0, \hat{t})}, x(t_0)]], \quad (4.73)$$

где  $t_0 < \hat{t} \leq t$ . Это условие называют переходным.

в. Для любых  $\tau, t_0, t$  с  $\tau$  из  $[t_0, t] \cap T$  и  $x(t_0) \in \Sigma$ , если  $u, v \in U$  и  $u_{(t_0, t)} = v_{(t_0, t)}$ , то

$$\mathcal{G}[\tau, u_{(t_0, \tau)}, x(t_0)] = \mathcal{G}[\tau, v_{(t_0, \tau)}, x(t_0)] \quad (4.74)$$

для любого  $\tau$  из  $[t_0, t] \cap T$ .

**Определение 4.1.** Динамическая система  $\mathcal{S}$  — сложное понятие, состоящее из множеств  $T, \Sigma, \Omega$  и  $U$ , переменной  $x(t)$  и функции  $g$ , удовлетворяющих условиям аксиом 4.1, 4.2, 4.3 и 4.4.

$T$  называют областью определения системы,  $\Sigma$  — пространством состояний системы,  $U$  — пространством входов системы,  $x(t)$  — состоянием (или переменной состояния) системы;  $u_{(t_0, t)}$  называют входом на интервале наблюдения системы, а  $y_{(t_0, t)} = g[x(t_0); u_{(t_0, t)}]$  — выходом (соответствующим входу  $u_{(t_0, t)}$ ) системы, причем  $(u_{(t_0, t)}; y_{(t_0, t)})$  образуют пару вход—выход системы; функцию  $\mathcal{G}[t; u_{(t_0, t)}, x(t_0)]$  называют

<sup>1</sup> См. работу [212].

<sup>2</sup> Здесь  $\sup$  означает наибольшую нижнюю границу множества всех чисел  $M$  таких, что  $\hat{d}(u(\tau), v(\tau)) \leq M$  для любого  $\tau$  из  $[t_0, t] \cap T$ . Где  $d_u$  есть расстояние на множестве функций  $u(t_0, t)$ ,  $u$  из  $U$  (см. § 3.15).

<sup>3</sup> Напомним, что  $\hat{d}$  — расстояние на  $\Omega$ ;  $d$  — расстояние на  $\Sigma$  и  $\| \quad \|$  — евклидова норма на  $R_p$ .

переходной функцией системы, а подмножество  $\{x(\tau) : x(\tau) = \mathcal{G}[\tau; u_{(t_0, \tau)}, x(t_0)]$  для  $\tau$  из  $[t_0, t] \cap T$  из пространства состояний  $\Sigma$  — траекторией [или движением] системы в течение временного интервала  $[t_0, t] \cap T$  из начального состояния  $x(t_0)$ , произведенной входом  $u_{(t_0, t)}$ . Наконец, уравнения (4.64) и (4.69) называют соответственно уравнениями выхода и состояния системы.

Аксиома 4.1, по сути дела, утверждает, что если известно начальное состояние в момент времени  $t_0$  и если приложить известный вход в течение  $(t_0, t]$ ,  $t > t_0$ , то получится выход, определенный единственным образом. Сущность этой аксиомы состоит в том, что для предсказания выхода на  $(t_0, t]$  в случае, когда известно начальное состояние системы при  $t = t_0$ , не требуется знания входа, предшествовавшего  $t_0$ . При этом достаточно знания лишь состояния в момент  $t_0$  и  $u_{(t_0, t)}$ . Отметим также, что будущие значения входа не влияют на  $y_{(t_0, t)}$ , т. е. система не обладает «предвидением».

Аксиома 4.2 утверждает, что существует «достаточно» состояний системы, и поэтому можно выбрать для расчета любую пару вход—выход. Эта аксиома предполагает также, что знания начального состояния  $x(t_0)$  и управления  $u_{(t_0, t)}$  достаточно не только для того, чтобы определить выход  $y(\hat{t})$ ,  $t_0 < \hat{t} \leq t$ , но и состояние системы в момент времени  $\hat{t}$ ,  $x(\hat{t})$ ,  $t_0 < \hat{t} \leq t$ . Это наиболее важное свойство, так как оно означает, что состояние в любой момент суммирует всю прошлую информацию, требующуюся для того, чтобы предсказать будущий выходной сигнал и будущее состояние системы.

Аксиома 4.3 представляет собой условие гладкости, гарантирующее, что малые изменения входа или состояния системы вызывают соответственно малые изменения выхода и движения системы.

Аксиома 4.4 перечисляет условия, которым должны удовлетворять изменения состояния системы. В частности, такими требованиями являются:

1. Начальные условия должны соответствовать исходной точке движения (напомним, что «движение» обозначает траекторию в пространстве состояний системы).

2. Если вход переводит систему из состояния  $x_0$  в  $x$  вдоль некоторой траектории и  $\hat{x}$  — некоторое состояние на этой траектории, то этот вход должен перевести систему  $\hat{x}$  в  $x$ .

3. Система не обладает «предвидением», т. е. будущие значения входа не влияют на текущее состояние системы.

Эти аксиомы являются обоснованной абстракцией свойств физических систем.

Следствия аксиом иллюстрируются с помощью рис. 4.7. На рис. 4.7, а показаны два входа  $u_{(t_0, t_1)}^1$  и  $u_{(t_0, t_1)}^2$ , причем

$$\left. \begin{aligned} u_{(t_0, \hat{t})}^1 &= u_{(t_0, \hat{t})}^2 \\ u_{(\hat{t}, t_1)}^1 &\neq u_{(\hat{t}, t_1)}^2 \end{aligned} \right\} \hat{t} \in [t_0, t_1].$$

Пусть  $x(t_0)$  — состояние при  $t_0$ ;  $y_{(t_0, t_1)}^1$  — единственный выход, получающийся при воздействии на систему входа  $u_{(t_0, t_1)}^1$  и  $y_{(t_0, t_1)}^2$  — при  $u_{(t_0, t_1)}^2$ . Выходы показаны на рис. 4.7, б. Согласно нашей терминологии имеем

$$\begin{aligned} y_{(t_0, t_1)}^1 &= \hat{\mathcal{G}}[x(t_0), u_{(t_0, t_1)}^1]; \\ y_{(t_0, t_1)}^2 &= \hat{\mathcal{G}}[x(t_0), u_{(t_0, t_1)}^2]. \end{aligned}$$

Аксиома 4.1 и, в частности, уравнения (4.65) и (4.66) гарантируют, что

$$\mathbf{y}^1_{(t_0, \hat{t})} = \mathbf{y}^2_{(t_0, \hat{t})}.$$

Пусть  $\tilde{t}$  — произвольная точка из  $[t_0, t_1]$ , тогда аксиома 4.2 и уравнение (4.67) утверждают существование состояний  $\mathbf{x}^1(\tilde{t})$  и  $\mathbf{x}^2(\tilde{t})$  таких, что

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1_{(\tilde{t}, t_1)} &= \hat{\mathbf{g}}[\mathbf{x}^1(\tilde{t}), \mathbf{u}^1_{(\tilde{t}, t_1)}]; \\ \mathbf{y}^2_{(\tilde{t}, t_1)} &= \hat{\mathbf{g}}[\mathbf{x}^2(\tilde{t}), \mathbf{u}^2_{(\tilde{t}, t_1)}]. \end{aligned}$$

Если  $\{\mathbf{x}^1(\tilde{t})\}$  и  $\{\mathbf{x}^2(\tilde{t})\}$  обозначают множества состояний  $\mathbf{x}^1(\tilde{t})$  и  $\mathbf{x}^2(\tilde{t})$ , то из уравнения (4.68) следует, что

$$\{\mathbf{x}^1(\hat{t})\} \cap \{\mathbf{x}^2(\hat{t})\} \neq \emptyset,$$

т. е. существует такое состояние

$$\mathbf{x}(\hat{t}) \in \{\mathbf{x}^1(\hat{t})\} \cap \{\mathbf{x}^2(\hat{t})\},$$

при котором

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1_{(\hat{t}, t_1)} &= \hat{\mathbf{g}}[\mathbf{x}(\hat{t}), \mathbf{u}^1_{(\hat{t}, t_1)}]; \\ \mathbf{y}^2_{(\hat{t}, t_1)} &= \hat{\mathbf{g}}[\mathbf{x}(\hat{t}), \mathbf{u}^2_{(\hat{t}, t_1)}]. \end{aligned}$$

Рассмотрим простую  $RL$ -цепочку, изображенную рис. 4.1. Пусть  $T$  — множество всех действительных чисел,  $\Sigma$  — действительные числа

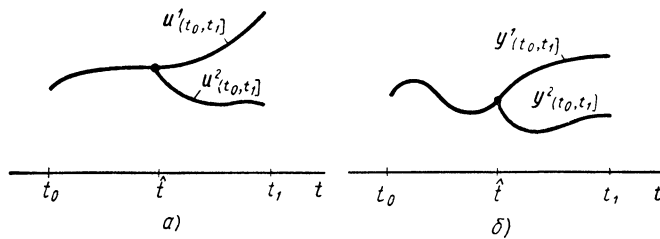


Рис. 4.7. Два входа  $\mathbf{u}^1$  и  $\mathbf{u}^2$ , производящие выходы  $\mathbf{y}^1$  и  $\mathbf{y}^2$

с обычным расстоянием,  $\Omega = \Sigma$  и  $U$  — множество кусочно-непрерывных функций, преобразующих множество  $\Omega$  в множество  $\Sigma$ . Наконец, пусть  $\mathbf{g}$  — функция, заданная как

$$\mathbf{g}(r, s, t) = r, \quad (4.75)$$

где  $r$ ,  $s$  и  $t$  — действительные числа. Поскольку  $\mathbf{g}$  не зависит от  $s$  и  $t$ , вместо (4.75) для удобства запишем

$$\mathbf{g}(r) = r. \quad (4.76)$$

Если  $u$  — элемент из  $U$  и  $x_0$  — элемент из  $\Sigma$ , то получаем

$$x(t) = e^{-at}x_0 + e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} u(\tau) d\tau, \quad (4.77)$$

где  $a = \frac{R}{L}$

Иначе говоря,

$$\varphi(t; u_{(0, t)}, x_0) = e^{-at}x_0 + e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} u(\tau) d\tau. \quad (4.78)$$

Примем также, что

$$y(t) = \mathbf{g}[x(t)] = x(t). \quad (4.79)$$

Таким образом, мы определим динамическую систему с пространством состояний  $\Sigma$  (действительные числа), выходом  $y(t)$  и уравнениями состояния и выхода:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \varphi(t; u_{(0, t]}, x(0)) = e^{-at}x(0) + e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} u(\tau) d\tau \\ \text{— уравнение состояния;} \\ y(t) &= x(t) \\ \text{— уравнение выхода.} \end{aligned} \right\} \quad (4.80)$$

Если нам известны  $x(0)$  и  $u_{(0, t]}$ , то мы знаем  $x(t)$  и, следовательно, из уравнения (4.80),  $y(t)$ . По теореме 3.14,  $x(t)$  и  $y(t)$  определяются полностью. Что касается аксиомы 4.2, то элемент

$$x(\hat{t}) = e^{-a\hat{t}}x(0) + e^{-a\hat{t}} \int_0^{\hat{t}} e^{a\tau} u^*(\tau) d\tau$$

является пересечением всех множеств  $\Sigma[x(0), u, t]$  [см. уравнение (3.259)]. Предоставим читателю проверить самостоятельно аксиомы 4.3 и 4.4.

**Упражнение 4.4.** Проверьте аксиому 4.4 для  $RL$ -цепочки.

**Упражнение 4.5.** Рассмотрите  $RL$ -цепочку (см. рис. 4.2) и определите динамическую систему, представляющую эту цепочку. Убедитесь в справедливости аксиом. У к а з а н и е: Функция  $\mathbf{g}$  задается как  $\mathbf{g}(r, s, t) = r + s$ , а функция  $\varphi$  в виде

$$\varphi(t; u_{(0, t]}x_0) = e^{-at}x_0 - ae^{-at} \int_0^t e^{a\tau} u(\tau) d\tau.$$

При этом уравнения выхода и состояния можно записать:

$$y(t) = x(t) + u(t) \text{ — уравнение выхода;}$$

$$x(t) = e^{-at}x_0 - ae^{-at} \int_0^t e^{a\tau} u(\tau) d\tau \text{ — уравнение состояния.}$$

Теорема 3.8 используется для проверки аксиомы 4.3.

#### 4.6. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, РАССМАТРИВАЕМЫЕ В ДАННОЙ КНИГЕ

Системы, рассматриваемые в данной книге, являются не только динамическими системами в смысле определения 4.1, но и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Мы будем рассматривать только конечно-мерные непрерывные системы.

**Определение 4.2.** Динамическую систему  $\mathcal{S}$  называют конечно-мерной: 1) если пространством состояний  $\Sigma$  системы  $\mathcal{S}$  является евклидово пространство  $R_n$ , т. е.  $\Sigma = R_n$ ; 2) если множество значений входа  $\Omega$  есть евклидово пространство  $R_m$ ,  $m \leq n$ , т. е.  $\Omega = R_m$ . В этом случае число  $n$ , являющееся размерностью  $\Sigma$ , называют порядком (или размерностью) динамической системы.

Колеблющаяся струна и полый резонатор (акустический или электромагнитный) являются примерами систем, которые не являются конечно-мерными. Будем далее под термином «динамическая система» понимать конечно-мерную динамическую систему. Отметим, что состояниями си-



системы являются  $n$ -мерные векторы  $\mathbf{x}$ , а входами системы —  $m$ -мерные векторы  $\mathbf{u}(t)$ , причем

$$m \leq n \quad (4.81)$$

**Определение 4.3.** Говорят, что система  $\mathcal{S}$  непрерывна (по времени), если множество  $T$  представляет собой открытый интервал  $(T_1, T_2)$ , который может быть равен всему  $R$ . Интервал  $(T_1, T_2)$  часто называют областью существования или интервалом определения системы. Импульсные системы являются примером обширного класса систем, не являющихся непрерывными.

**Определение 4.4.** Динамическую систему  $\mathcal{S}$  называют дифференциальной, если уравнения состояния и выхода системы имеют вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{G}[t; \mathbf{u}_{(t_0, t)}; \mathbf{x}(t_0)] \quad (4.82)$$

где  $\mathcal{G}$  есть решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (4.83)$$

где  $\mathbf{x}(t_0)$  — начальная точка,  $\mathbf{f}$  удовлетворяет условиям теоремы 3.14, и

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (4.84)$$

где  $\mathbf{g}$  — непрерывная функция всех своих аргументов. Мы часто будем ссылаться на уравнения (4.83) и (4.84) как на уравнения системы и называть уравнение (4.83) уравнением состояния.

Далее, говоря «динамическая система» или просто «система», мы будем подразумевать «конечно-мерную непрерывную дифференциальную систему».

В заключение отметим, что в книге под термином «динамическая система» мы будем понимать сложное понятие, состоящее из открытого интервала  $(T_1, T_2)$ , который может представлять собой все  $R$ , множества  $U$  кусочно-непрерывных функций преобразования этого интервала в  $R_m$ , непрерывной функции  $\mathbf{f}$ , преобразующей пространство  $R_n \times R_m \times (T_1, T_2)$  в  $R_n$ , и непрерывной функции  $\mathbf{g}$ , преобразующей пространство  $R_n \times R_m \times (T_1, T_2)$  в  $R_p$ , удовлетворяющих условиям:

4.1. Для любых  $\mathbf{x}_0$  из  $R_n$ ,  $t_0$  и  $t$  из  $(T_1, T_2)$ ,  $t \geq t_0$  и всех  $\mathbf{u}_{(t_0, t)}$  из  $U$  существует единственное решение  $\mathbf{x}(\tau)$  векторного дифференциального уравнения:

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau], \quad (4.85)$$

определенное на интервале  $[t_0, t]$ <sup>1</sup>, причем

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (4.86)$$

Уравнение состояния

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{G}(t; \mathbf{u}_{(t_0, t)}; \mathbf{x}_0) \quad (4.87)$$

представляет собой это решение.

4.2.  $\mathcal{G}$  является непрерывной функцией всех своих аргументов, удовлетворяющей условиям:

$$\text{а) } \mathbf{x}_0 = \mathcal{G}(t_0; \mathbf{u}_{(t_0, t)}; \mathbf{x}_0); \quad (4.88)$$

$$\text{б) } \mathcal{G}(t; \mathbf{u}_{(t_0, t)}; \mathbf{x}_0) = \mathcal{G}(t; \mathbf{u}_{(\hat{t}, t)}; \mathcal{G}(\hat{t}; \mathbf{u}_{(t_0, \hat{t})}; \mathbf{x}_0)) \quad (4.89)$$

для любого  $\hat{t}$  из  $[t_0, t]$ ;

в) Если  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  на  $(t_0, t]$ , то для любого  $\tau$  из  $[t_0, t]$

$$\mathcal{G}(\tau; \mathbf{u}_{(t_0, \tau)}; \mathbf{x}_0) = \mathcal{G}(\tau; \mathbf{v}_{(t_0, \tau)}; \mathbf{x}_0); \quad (4.90)$$

4.3. Если определить выход  $\mathbf{y}(t)$ , положив

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{g}[\mathcal{G}(\tau; \mathbf{u}_{(t_0, \tau)}; \mathbf{x}_0), \mathbf{u}(\tau), \tau], \quad (4.91)$$

<sup>1</sup> В действительности это означает, что существует решение на некотором открытом интервале, содержащем  $[t_0, t]$ .

то  $\mathbf{y}(t_0, t)$  однозначно определяется заданием  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  и  $\mathbf{u}(t_0, t)$ . Если  $t_0 \leq \hat{t} \leq t$  и  $\mathbf{x}(\hat{t}) = \mathcal{G}(\hat{t}, \mathbf{u}(t_0, \hat{t}); \mathbf{x}_0)$ , то  $\mathbf{y}(\hat{t}, t)$  однозначно определяется через  $\mathbf{x}(\hat{t})$  и  $\mathbf{u}(\hat{t}, t)$ .

Мы будем изучать вполне определенный класс динамических линейных систем. В заключение настоящего параграфа кратко обсудим понятие эквивалентности, которое будет нам полезно в дальнейшем, и рассмотрим некоторые примеры динамических систем.

Напомним, что под  $\mathcal{S}$  мы понимаем «модель» некоторой физической системы  $\mathfrak{F}$ . «Движение»  $\mathfrak{F}$  есть внутреннее движение системы и является геометрическим в том смысле, что оно не зависит от способа, которым мы его описываем. Траектории динамической системы  $\mathcal{S}$  («модели») можно рассматривать как кривые в пространстве  $R_n$ , а выход  $\mathbf{y}$  можно представлять себе как функцию точек этих кривых. Другими словами, траектории и выход системы  $\mathcal{S}$  являются геометрическими объектами, координаты которых удовлетворяют уравнениям системы. Состояние системы  $\mathbf{x}(t)$  представляет собой вектор  $\mathbf{v}$  в  $R_n$  с координатами  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  по отношению к натуральному базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  пространства  $R_n$  (см. § 2.6)<sup>1</sup>. Если  $\mathbf{P}$  — невырожденная матрица размера  $n \times n$  [см. уравнение (2.59)], то  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$  можно рассматривать как представление вектора  $\mathbf{v}$  по отношению к базису  $\mathbf{P}\mathbf{e}_1, \mathbf{P}\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{P}\mathbf{e}_n$  из  $R_n$ . Следовательно, если рассматривать динамическую систему  $\mathcal{S}'$ , описываемую уравнениями

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}[\mathbf{P}\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t]; \quad (4.92)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{P}\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (4.93)$$

то траектории и выход системы будут теми же самыми, что и для системы  $\mathcal{S}$ . Последнее обстоятельство приводит к следующему определению.

**Определение 4.5.**<sup>2</sup> Две динамические системы  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{S}'$  называют эквивалентными, если существует невырожденная матрица  $\mathbf{P}$  размера  $n \times n$  из постоянных элементов, такая, что

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t), \quad (4.94)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  — переменная состояния системы  $\mathcal{S}$  и  $\mathbf{z}(t)$  — переменная состояния системы  $\mathcal{S}'$ .

Это понятие эквивалентности будет полезно, в частности, при изучении линейных систем (см. § 4.7).

**Пример 4.2.** Пусть  $(T_1, T_2)$  — все  $R$  и  $U$  — множество всех кусочно-непрерывных функций из  $R$  в  $R$ , а  $\mathbf{f}$  — непрерывная функция преобразования  $R_2 \times R \times R$  в  $R_2$ , заданная как

$$\mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u, t\right) = \begin{bmatrix} x_2 + u \\ tx_2 \end{bmatrix} = \quad (4.95)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (4.96)$$

<sup>1</sup> Напомним, что  $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ , ...,  $\mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ .

<sup>2</sup> Такое понятие эквивалентности не является наиболее общим, но оно соответствует нашим целям.

и  $g$  — непрерывная функция, преобразующая  $R_2 \times R \times R$  в  $R$ , заданная как

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u, t\right) = x_1 = \quad (4.97)$$

$$= [1, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u. \quad (4.98)$$

Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(\tau) = f[x(\tau), u(\tau), \tau] = \quad (4.99)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau). \quad (4.100)$$

Известно (см. пример 3.51), что это уравнение имеет единственное решение:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau, \quad (4.101)$$

где  $\Phi(t, t_0)$  — матрица:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & \int_{t_0}^t e^{-\frac{t_0}{2}} e^{\frac{\tau^2}{2}} d\tau \\ 0 & e^{-\frac{t_0}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} \end{bmatrix}, \quad (4.102)$$

причем

$$x(t_0) = x_0. \quad (4.103)$$

Запишем выражение (4.101) в виде

$$x(t) = \phi(t; u_{(t_0, t)}; x_0) = \Phi(t, t_0) \left\{ x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.104)$$

Из свойств фундаментальной матрицы  $\Phi(t, t_0)$  (см. § 3.19) видно, что функция  $\phi(t; u_{(t_0, t)}; x_0)$  удовлетворяет условию 4.2. Далее, так как  $x_1(t_0, t)$  однозначно определяется величинами  $x_0$  и  $u_{(t_0, t)}$ , то, очевидно, условие 4.3\* также удовлетворяется. Что касается условия 4.1, то оно является следствием теоремы 3.14. Итак, мы определили динамическую систему второго порядка с помощью уравнений:

состояния

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad (4.105)$$

выхода

$$y(t) = [1 \ 0] x(t) + 0u(t). \quad (4.106)$$

#### 4.7. ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Грубо говоря, динамическая система линейна, если линейны уравнения системы. Можно дать более строгое определение.

**Определение 4.6.** Динамическую систему называют линейной динамической системой (или просто линейной системой), если векторное дифференциальное уравнение для состояния системы  $x(t)$  есть линейное дифференциальное уравнение (см. § 3.19) и если выход  $y(t)$  есть линейная функция от  $x(t)$  и  $u(t)$ . Уравнения линейной системы имеют вид

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t); \quad (4.107a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (4.107b)$$

где  $A(t)$  —  $n \times n$  матрица-функция;  $B(t)$  —  $n \times m$  матрица-функция;  $C(t)$  —  $p \times n$  матрица-функция и  $D(t)$  —  $p \times m$  матрица-функция. Все эти матрицы являются функциями времени  $t$ .

Если приведенные матрицы являются постоянными, то имеем систему с постоянными параметрами, а в противном случае — систему с переменными параметрами (сравните с определением 3.43).

$RL$ -цепочки (см. рис. 4.1 и 4.2) и пример 4.2 представляют собой линейные системы. Для нас особый интерес будут представлять системы, уравнения которых имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.108)$$

В этом случае мы часто будем называть уравнение

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4.109)$$

уравнением системы или просто системой.

Если рассматривается линейная система с уравнениями (4.107а) и (4.107б), то уравнения состояния и выхода системы можно записать через фундаментальную матрицу  $\Phi(t, t_0)$  уравнения (4.107а) в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{G}\mathcal{f}(t; \mathbf{u}_{(t_0, t)}; \mathbf{x}_0) = \Phi(t, t_0) \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right\}; \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathcal{G}\mathcal{f}(t; \mathbf{u}_{(t_0, t)}; \mathbf{x}_0) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) = \\ &= \mathbf{C}(t)\Phi(t, t_0) \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau - t_0) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right\} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (4.111)$$

В частности, для линейной системы с постоянными параметрами  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}$ , имеем

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \right\}; \quad (4.112)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \right\} + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \quad (4.113)$$

Заметим, что свойства переходной функции  $\mathcal{G}\mathcal{f}(t; \mathbf{u}_{(t_0, t)}; \mathbf{x}_0)$  [см. уравнения с (4.88) по (4.90)] непосредственно вытекают из свойств фундаментальной матрицы (см. § 3.20), и наоборот.

Отметим также, что понятие эквивалентности (см. определение 4.5) для линейных систем соответствует использованию преобразования подобия (§ 3.22). С другой стороны, если мы применяем преобразование подобия к линейной системе  $\mathcal{S}$ , то получаем эквивалентную линейную систему  $\mathcal{S}'$ . Наоборот, если линейная система  $\mathcal{S}'$  эквивалентна линейной системе  $\mathcal{S}$  в смысле определения 4.5, то уравнения  $\mathcal{S}'$  получены из уравнений  $\mathcal{S}$  с помощью преобразования подобия. Это означает, что преобразование подобия изменяет уравнения системы, но не меняет геометрических свойств движения системы. В частности, если  $\mathbf{P}$  — невырожденная  $n \times n$  матрица [см. уравнение (2.59)] и если

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t), \quad (4.114)$$

то система с переменной состояния  $\mathbf{z}(t)$ , эквивалентная системе (4.107а) и (4.107б), описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}(t)\mathbf{P}\mathbf{z}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t); \quad (4.115)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{P}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t). \quad (4.116)$$

Эти положения мы часто будем использовать в дальнейшем.

#### 4.8. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВХОДОМ И ВЫХОДОМ СИСТЕМЫ. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ <sup>1</sup>

До сих пор мы имели дело преимущественно с основными положениями, связанными с абстрактным понятием динамической системы. Посмотрим, как связаны данные положения с передаточной функцией системы, которая, по-видимому, является тем понятием, с которым инженер, занимающийся управлением, знаком лучше всего, поскольку оно устанавливает связь между входом и выходом линейной системы. Ниже будет показана связь соотношения входа и выхода с ее передаточной функцией, а в следующих двух параграфах — получение описания процесса в виде динамической системы на основе передаточной функции.

Одной из наиболее сложных проблем, с которой сталкивается инженер, является проблема адекватного математического описания данного физического процесса или системы. Если процесс так же прост, как в  $RL$ -цепочке § 4.2, то уравнения, описывающие процесс, получаются непосредственно. Однако в общем случае это невозможно, и хорошее математическое описание процесса можно получить только в результате большого количества экспериментов. Обычно экспериментатор прикладывает известные входные сигналы и наблюдает получающиеся выходные сигналы. В результате таких экспериментов и априорных теоретических знаний получают соотношения, связывающие доступные для наблюдения выходные сигналы и допустимые входные сигналы системы. Например, метод частотных характеристик и реакция системы на скачок входного сигнала широко применяются для получения передаточных функций линейных систем с постоянными параметрами.

Довольно часто результатом экспериментов над системой с одним входом и одним выходом является линейное дифференциальное уравнение, связывающее ее выход  $y(t)$  со входом  $u(t)$  в виде

$$\{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0\} y(t) = b_0 u(t), \quad (4.117)$$

где символ  $D = \frac{d}{dt}$  обозначает дифференцирование по времени. Если система адекватно описывается дифференциальным уравнением (4.117), то в теории регулирования обычно говорят, что система имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad (4.118)$$

где  $y(s)$  — преобразование Лапласа от выхода  $y(t)$  и  $u(s)$  — преобразование Лапласа от входа  $u(t)$ . Так как передаточная функция  $G(s)$  (4.118) не имеет конечных нулей, то говорят, что она содержит только полюса. Полюсами  $G(s)$  являются корни полинома, стоящего в знаменателе:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0. \quad (4.119)$$

Часто уравнение, связывающее выход  $y(t)$  со входом  $u(t)$  для системы с одним входом и одним выходом, имеет вид

$$\begin{aligned} \{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0\} y(t) = \\ = \{b_m D^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0\} u(t). \end{aligned} \quad (4.120)$$

Такая система имеет передаточную функцию

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad (4.121)$$

<sup>1</sup> См. [34], [36] и [212] (гл. 9).



где  $y(t)$  — (скалярный) выход и  $u(t)$  — (скалярный) вход. В предыдущем параграфе мы видели, что такая система имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (4.127)$$

Если мы обозначим через  $s_1, s_2, \dots, s_n$  корни (в общем случае комплексные) многочлена в знаменателе

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \quad (4.128)$$

то  $s_i$  будут полюсами  $G(s)$ , и мы имеем право написать

$$G(s) = \frac{b_0}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}. \quad (4.129)$$

В этом параграфе мы найдем представление системы (4.126) в пространстве состояний (или в форме динамической системы) и попытаемся показать физический смысл понятия состояния системы.

Так как нам надо знать  $n$  начальных условий  $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$  для того, чтобы получить решение дифференциального уравнения (4.126), то можно догадаться, что такое состояние системы. Имея это в виду, по образцу § 3.24 определим  $n$  переменных  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$ , положив

$$\left. \begin{aligned} z_1(t) &= y(t); \\ z_2(t) &= \dot{y}(t); \\ &\dots \dots \dots \\ z_k(t) &= y^{(k-1)}(t); \\ &\dots \dots \dots \\ z_n(t) &= y^{(n-1)}(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.130)$$

Из (4.130) заключаем, что

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t); \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t); \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{z}_{n-1}(t) &= z_n(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.131)$$

а из уравнения (4.126)

$$\dot{z}_n(t) = D^n y(t) = -a_0 y(t) - a_1 \dot{y}(t) - \dots - a_{n-1} y^{(n-1)}(t) - b_0 u(t). \quad (4.132)$$

Следовательно,

$$\dot{z}_n(t) = -a_0 z_1(t) - a_1 z_2(t) - \dots - a_{n-1} z_n(t) + b_0 u(t), \quad (4.133)$$

откуда вытекает, что если мы определили  $z_i$  по соотношениям (4.130), то  $z_i$  удовлетворяют системе  $n$  линейных дифференциальных уравнений, которые можно записать в матричной форме как

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{z}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.134)$$

Векторное дифференциальное уравнение (4.134) имеет вид

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t). \quad (4.135)$$

Уравнение (4.135), за исключением различия в символах, полностью идентично (3.396). Матрица системы  $\mathbf{A}$  дается соотношением (3.398), а  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{b}$  в (4.135) определяется как

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}. \quad (4.136)$$

Убедимся, что вектор  $\mathbf{z}(t)$  представляет собой переменную состояния системы (4.126). Чтобы сделать это, мы должны показать, что знание  $\mathbf{z}(t_0)$

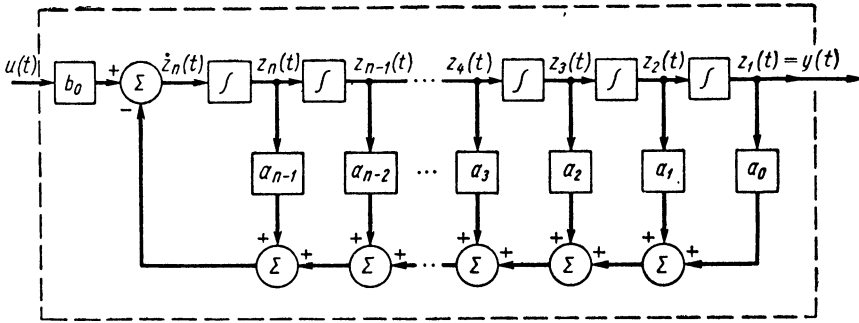


Рис. 4.8. Моделирование системы (4.134) с помощью аналоговой вычислительной машины

и  $u_{(t_0, t]}$  полностью определяет  $\mathbf{z}_{(t_0, t]}$  и выход  $y_{(t_0, t]}$ . Если  $\mathbf{z}(t_0)$  и  $u_{(t_0, t]}$  известны, то единственное решение уравнения (4.135) с  $\mathbf{z}(t_0)$  в качестве исходной точки и управляющей функцией  $u_{(t_0, t]}$  выражается соотношением

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{z}(t_0) - e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau, \quad (4.137)$$

где  $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$  — фундаментальная матрица уравнения (4.135). Следовательно,  $\mathbf{z}_{(t_0, t]}$  полностью определяется начальной точкой  $\mathbf{z}(t_0)$  и функцией  $u_{(t_0, t]}$ . Так как  $y(t) = z_1(t)$  [в силу (4.130)], то очевидно, что  $y_{(t_0, t]} = z_{1(t_0, t]}$  также полностью определяется  $\mathbf{z}(t_0)$  и  $u_{(t_0, t]}$ . Уравнениями состояния системы являются выражения

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t); \\ y(t) &= z_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.138)$$

Мы предлагаем читателю убедиться, что действительно нашли динамическую систему, которая описывается уравнением (4.126).

Рис. 4.8 иллюстрирует моделирование векторного дифференциального уравнения (4.134) с помощью аналоговой вычислительной машины. Для моделирования требуются  $n$  интеграторов. Переменные состояния  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$  соответствуют выходным сигналам интеграторов.



Постоянные коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  являются коэффициентами усиления в цепях каналов обратной связи.

В § 3.24 было показано, что собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы системы (3.396) являются корнями полинома

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0. \quad (4.139)$$

Но два полинома (4.128) и (4.139) идентичны, и, следовательно, имеют одинаковые корни. Таким образом, собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  (3.396) те же самые, что и полюса передаточной функции  $\mathbf{G}(s)$  (4.127). Этого следовало ожидать, потому что полюса передаточной функции определяют частотную и переходную характеристики системы и уравнения (4.138) представляют собой просто другой способ описания той же системы. Иначе говоря, собственные значения матрицы системы  $\mathbf{A}$  определяют характеристики системы (4.138), а полюса  $\mathbf{G}(s)$  — характеристики системы (4.126). Так как это — математические описания одного и того же физического процесса, то полюса и собственные значения должны быть связаны друг с другом. В данном случае они одинаковы. В § 2.10 мы показали, что собственные значения являются инвариантным свойством линейного преобразования и матрица, связанная с линейным преобразованием, зависит от базисов векторных пространств. Систему также можно рассматривать как линейное преобразование и, следовательно, обнаружить, что полюса (или собственные значения) представляют собой инвариантные величины. В данном случае матрица и вектор состояния системы зависят от выбранного базиса. Это лишь другая формулировка того положения, что собственные значения эквивалентных систем (см. определение 4.5) одинаковы, тогда как их переменные состояния и матрицы могут быть различными.

Для того чтобы проиллюстрировать неединственность вектора состояния, произведем следующую замену переменной. Пусть  $\mathbf{Q}$  — невырожденная  $n \times n$  матрица; определим вектор  $\mathbf{x}(t)$ , положив

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{z}(t), \quad (4.140)$$

где  $\mathbf{z}(t)$  — вектор, определяемый соотношением (4.130). Такая замена эквивалентна замещению системы (4.138) системой, эквивалентной по определению 4.5. Продифференцировав обе части выражения (4.140), получим

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Q}^{-1}\dot{\mathbf{z}}(t). \quad (4.141)$$

Умножив обе части уравнения (4.135) на матрицу  $\mathbf{Q}^{-1}$ , получим

$$\mathbf{Q}^{-1}\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}u(t). \quad (4.142)$$

Подставляя (4.140) и (4.141) в (4.142), находим, что  $\mathbf{x}(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}u(t). \quad (4.143)$$

Пусть

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}; \quad \mathbf{c} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}. \quad (4.144)$$

Уравнение (4.143) запишется в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{S}\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}u(t). \quad (4.145)$$

Матрицы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{A}$  подобны<sup>1</sup> и, следовательно, имеют одинаковые соб-

<sup>1</sup> См. § 2.9.

ственные значения (см. § 2.10). Так как собственные значения  $A$  те же, что и полюса функции  $G(s)$ , то и собственные значения  $S$  должны совпадать с полюсами  $G(s)$ . Далее,  $x(t)$  можно рассматривать как вектор состояния системы (4.126). Заметим, что для любого  $t_0$  знание  $x(t_0)$  и  $u_{(t_0, t]}$  полностью определяет  $x_{(t_0, t]}$ , так как

$$x(t) = e^{S(t-t_0)}x(t_0) + e^{S(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-S(\tau-t_0)} c u(\tau) d\tau. \quad (4.146)$$

Но если известен вектор  $x(\tau)$  для любого  $\tau$  из  $(t_0, t]$ , то известен и вектор  $z(t)$ , так как  $z(\tau) = Qx(\tau)$ , где  $Q$  — невырожденная матрица, и, следовательно,  $z_1(\tau) = y(\tau)$  для любого  $\tau$  из  $(t_0, t]$ . Итак,  $x(t)$  — вектор состояния системы (4.126), и уравнения (4.135) и (4.145) являются эквивалентными описаниями этой системы.

**Упражнение 4.6.** Промоделируйте с помощью аналоговой вычислительной машины систему (4.126), используя ее представление в виде (4.145). Можно считать, что  $s_{ij}$  — элементы  $S$ ,  $q_{ij}$  — элементы  $Q$  и  $c_i$  — компоненты  $c$ . Требуется показать, что компонентами  $x_i(t)$  и в этом случае являются выходы  $n$  интеграторов.

Полезную замену переменных можно произвести, когда полюсами передаточной функции  $G(s)$  (или, соответственно, собственными значениями матрицы системы) являются различные действительные числа. В § 3.24 мы показали, что в этом случае можно отыскать невырожденную матрицу  $P$ , которая является матрицей Вандермонда (3.411), такую, что

$$\Lambda = P^{-1}AP, \quad (4.147)$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица собственных значений (3.409). Если определить вектор состояния  $x(t)$ , положив

$$x(t) = P^{-1}z(t), \quad (4.148)$$

то  $x(t)$  будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = \Lambda x(t) + P^{-1}bu(t). \quad (4.149)$$

Обозначим элементы  $P^{-1}$  через  $r_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Так как вектор  $b$  задан в виде (4.136), то уравнение (4.149) можно записать:

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t) + r_{in} b_0 u(t), \quad (4.150)$$

где  $\lambda_i$  — собственные значения матрицы системы и  $r_{in}$  — элементы последнего ( $n$ -го) столбца матрицы  $P^{-1}$ .

Рис. 4.9 иллюстрирует аналоговую модель системы, описываемой уравнениями (4.149) или (4.150). Компоненты вектора состояния (фазовые координаты)  $x_i(t)$  опять представляют собой выходные сигналы  $n$  интеграторов. Выход  $y(t) = z_1(t)$  равен сумме  $x_i(t)$ , т. е.

$$y(t) = z_1(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad (4.151)$$

так как первая строка матрицы Вандермонда состоит целиком из единиц [см. матрицу (3.411)].

Числа  $r_{in}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  в (4.150) можно вычислить непосредственно, проинвертировав матрицу  $P$ , однако их легче определить иным способом и получить дополнительную информацию о физическом смысле такого преобразования уравнений системы. Так как полюса  $G(s)$  расположены при  $s = \lambda_i$ , можно написать

$$G(s) = b_0 \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - \lambda_i}, \quad (4.152)$$

где  $r_i$  представляет собой вычет  $G(s)$  в  $i$ -м полюсе  $\lambda_i$ . Так как  $\lambda_i$  различны, имеем

$$r_i = \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \dots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \dots (\lambda_i - \lambda_n)}. \quad (4.153)$$

Предположим, что вначале система находится в покое (т. е. все начальные условия — нулевые) и что приложен вход  $u(t)$ , тогда

$$y(s) = b_0 \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - \lambda_i} u(s). \quad (4.154)$$

При этих же условиях, из выражения (4.150) находим

$$x_i(s) = \frac{b_0 r_{in} u(s)}{s - \lambda_i}. \quad (4.155)$$

Так как

$$y(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t),$$

имеем

$$y(s) = \sum_{i=1}^n x_i(s) = b_0 \sum_{i=1}^n \frac{r_{in}}{s - \lambda_i} u(s). \quad (4.156)$$

Сравнивая выражение (4.154) с (4.156), получим

$$r_{in} = r_i, \quad (4.157)$$

т. е. элементы последнего столбца  $P^{-1}$  равны вычетам  $G(s)$ .

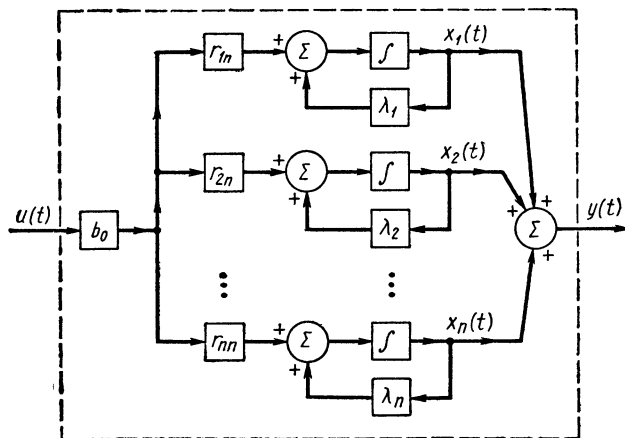


Рис. 4.9. Моделирование с помощью аналоговой вычислительной машины системы (4.150)

Преобразование подобия позволило заменить модель системы, показанную на рис. 4.8, моделью, которая приведена на рис. 4.9. Коэффициенты усиления  $r_{1n}, r_{2n}, \dots, r_{nn}$  (рис. 4.9) в точности равны вычетам передаточной функции  $G(s)$  в полюсах  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  соответственно.

**Пример 4.4.** Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, описываемую уравнением третьего порядка

$$\{D^3 + 3D^2 + 2D\} y(t) = u(t). \quad (4.158)$$

Эта система имеет передаточную функцию

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \quad (4.159)$$

с полюсами  $s = 0$ ,  $s = -1$  и  $s = -2$ . Если принять, что

$$\left. \begin{aligned} z_1(t) &= y(t); \\ z_2(t) &= \dot{y}(t); \\ z_3(t) &= \ddot{y}(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.160)$$

то вектор  $\mathbf{z}(t)$  с компонентами  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $z_3(t)$  должен удовлетворять векторному дифференциальному уравнению вида

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.161)$$

или, более сокращенно,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t). \quad (4.162)$$

Найдем собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ . Для этого отыщем нули  $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ , т. е.

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda. \quad (4.163)$$

Собственные значения  $\mathbf{A}$  равны 0,  $-1$  и  $-2$ . Полюса  $G(s)$  и собственные значения  $\mathbf{A}$  одинаковы. Эти собственные значения — действительные различные числа. Если  $\mathbf{P}$  — матрица Вандермонда

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad (4.164)$$

то, применяя преобразование подобия к уравнению (4.161), получим следующую систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = \quad (4.165)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(t), \quad (4.166)$$

где  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}(t)$ .

Заметим, что

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}. \quad (4.167)$$

Следовательно, вычеты  $G(s)$  равны элементам последнего столбца  $\mathbf{P}^{-1}$  [т. е. вычеты — это компоненты вектора, на который умножается  $u(t)$  в уравнении (4.166)].

#### 4.10. ОТЫСКАНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ (ИЛИ В ФОРМЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ) ОБЪЕКТА, ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ КОТОРОГО СОДЕРЖИТ ПОЛЮСА И НУЛИ

Рассмотрим объект с одним входом и одним выходом, который описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0\} y(t) &= \\ = \{b_nD^n + b_{n-1}D^{n-1} + \dots + b_1D + b_0\} u(t), \end{aligned} \quad (4.168)$$



$$\begin{aligned} \text{так как } z_{i+1}(t) &= y^{(i)}(t) - \sum_{k=0}^i u^{(k)}(t) h_{i-k} = \\ &= y^{(i)}(t) - h_i u(t) - \sum_{k=1}^i u^{(k)}(t) h_{i-k}. \end{aligned} \quad (4.177)$$

Дифференцирование выражения (4.172) для  $i = n$  дает:

$$\dot{z}_n(t) = y^{(n)}(t) - \sum_{k=1}^n u^{(k)}(t) h_{n-k}. \quad (4.178)$$

Дифференциальное уравнение (4.168) дает соотношение

$$y^{(n)}(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) + b_n u^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k u^{(k)}(t) + b_0 u(t). \quad (4.179)$$

Из выражения (4.177) следует, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z_{i+1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left[ \sum_{k=1}^i u^{(k)}(t) h_{i-k} \right] + u(t) \sum_{i=0}^{n-1} a_i h_i \quad (4.180)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{z}_n(t) &= - \sum_{i=0}^{n-1} a_i z_{i+1}(t) + b_n u^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k u^{(k)}(t) + b_0 u(t) - \\ &- \sum_{k=1}^n u^{(k)}(t) h_{n-k} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left[ \sum_{k=1}^i u^{(k)}(t) h_{i-k} \right] - u(t) \sum_{i=0}^{n-1} a_i h_i. \end{aligned} \quad (4.181)$$

Путем непосредственных вычислений можно получить

$$- \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{k=1}^i u^{(k)}(t) h_{i-k} = - \sum_{k=1}^{n-1} u^{(k)}(t) \sum_{i=0}^{n-k-1} h_i a_{i+k}. \quad (4.182)$$

Подставив это выражение в уравнение (4.181) и сгруппировав члены, получим

$$\begin{aligned} \dot{z}_n(t) &= - \sum_{i=0}^{n-1} a_i z_{i+1}(t) + (b_n - h_0) u^{(n)}(t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} u^{(k)}(t) \left\{ b_k - h_{n-k} - \sum_{i=0}^{n-k-1} h_i a_{i+k} \right\} + u(t) \left\{ b_0 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i h_i \right\}. \end{aligned} \quad (4.183)$$

Выберем  $h$  таким образом, чтобы  $\dot{z}_n(t)$  не зависела от всех производных  $u(t)$ . Это можно сделать, положив

$$h_0 = b_n; \quad (4.184)$$

$$h_{n-k} = b_k - \sum_{i=0}^{n-k-1} h_i a_{i+k} \quad \text{для } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Подставив выражение (4.184) в уравнение (4.183), получим дифференциальное уравнение

$$\dot{z}_n(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i z_{i+1}(t) + h_n u(t), \quad (4.185)$$

где

$$h_n = b_0 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i h_i. \quad (4.186)$$

Итак, мы получили дифференциальные уравнения относительно  $z_i(t)$ , которые можно записать в векторной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{z}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} u(t) \quad (4.187)$$

или, сокращенно,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{h}u(t), \quad (4.188)$$

где  $\mathbf{A}$  — матрица (3.398) и  $\mathbf{h}$  — вектор с компонентами  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , определяемыми уравнениями (4.184) и (4.186).

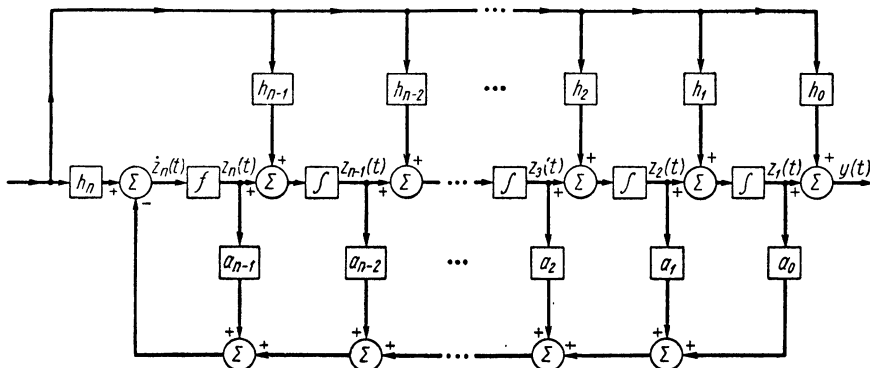


Рис. 4.10. Представление в виде аналоговой модели системы (4.187)

Заметим, что вычисление постоянных  $h_i, i = 0, 1, \dots, n$  не представляет особого труда, так как уравнения (4.184) имеют вид

$$\begin{aligned} h_0 &= b_n; \\ h_1 &= b_{n-1} - h_0 a_{n-1}; \\ h_2 &= b_{n-2} - h_0 a_{n-2} - h_1 a_{n-1}; \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.189)$$

и  $h_i$  находится последовательными подстановками.

Нетрудно убедиться, что вектор  $\mathbf{z}(t)$  представляет собой вектор состояния системы (4.168), так как знание  $\mathbf{z}(t_0)$  и  $u_{(t_0, t]}$  полностью определяет решение дифференциального уравнения (4.188) на интервале  $[t_0, t]$  (т. е.  $\mathbf{z}_{(t_0, t]}$ ). Поскольку выход  $y(t)$  равен

$$y(t) = z_1(t) + h_0 u(t), \quad (4.190)$$

ясно, что  $y_{(t_0, t]}$  полностью определяется величинами  $\mathbf{z}(t_0)$  и  $u_{(t_0, t]}$ .

Мы предлагаем читателю получить уравнения состояния и убедиться, что действительно нашли динамическую систему, которая описывается выражением (4.168).

Интересно сравнить дифференциальное уравнение (4.187) системы (4.168) с дифференциальным уравнением (4.135) системы (4.126). Матрица системы  $\mathbf{A}$  одинакова в уравнениях (4.187) и (4.135). Эти уравне-

ния отличаются лишь векторами  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{h}$ , на которые умножается управление  $u(t)$ . Ясно, что собственные значения матрицы системы  $\mathbf{A}$  являются полюсами как передаточной функции  $H(s)$  [см. (4.169)], так и передаточной функции  $G(s)$  [см. (4.127)].

На рис. 4.10 показана аналоговая модель векторного дифференциального уравнения (4.187). Фазовые координаты являются выходами  $n$  интеграторов. Сравнивая рис. 4.8 и 4.10, нетрудно заметить, что последняя схема отличается от первой лишь наличием каналов прямой связи, а каналы обратной связи обеих схем идентичны.

Выше мы полагали, что число полюсов и нулей  $H(s)$  одинаково. Рассмотрим случай, когда передаточная функция  $H(s)$  имеет  $m$  нулей и  $n$  полюсов, причем

$$m < n.$$

Иначе говоря, предположим, что в уравнении (4.168)

$$b_n = b_{n-1} = \dots = b_{m+1} = 0, \quad b_m \neq 0 \quad (4.191)$$

и что  $H(s)$  имеет вид

$$H(s) = \frac{b_m (s - \sigma_1) (s - \sigma_2) \dots (s - \sigma_m)}{(s - s_1) (s - s_2) \dots (s - s_n)}. \quad (4.192)$$

Способом, совершенно аналогичным тому, который использовался для систем с  $n$  нулями и  $n$  полюсами, можно показать, что вектор  $\mathbf{z}(t)$  с компонентами  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$ , определенными как

$$\left. \begin{aligned} z_1(t) &= y(t); \\ z_2(t) &= \dot{y}(t); \\ &\dots \\ z_{n-m}(t) &= y^{(n-m-1)}(t); \\ z_{n-m+1}(t) &= y^{(n-m)}(t) - h_{n-m}u(t); \\ &\dots \\ z_n(t) &= y^{(n-1)}(t) - h_{n-m}u^{(m-1)}(t) - \dots - h_{n-1}u(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.193)$$

где

$$h_{n-k} = b_k - \sum_{j=n-m}^{n-k-1} a_{j+k} h_j, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (4.194)$$

можно рассматривать как вектор состояния системы с передаточной функцией  $H(s)$  по выражению (4.192). Доказать это мы предлагаем читателю, отметив, что  $\mathbf{z}(t)$  удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{z}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ h_{n-m} \\ \dots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} u(t). \quad (4.195)$$



Выше уже рассматривался эффект преобразования подобия для случая действительных различных собственных значений (§ 4.7 и 4.9). Посмотрим, к каким выводам приведет нас преобразование подобия в данном случае.

Пусть собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы системы  $\mathbf{A}$  (4.188) действительны и различны. Определим вектор состояния  $\mathbf{x}(t)$ , положив

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}(t), \quad (4.196)$$

где  $\mathbf{P}$  — матрица Вандермонда (3.411). Новый вектор состояния удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{h}u(t), \quad (4.197)$$

где  $\mathbf{\Lambda}$  — диагональная матрица собственных значений (3.409). Если  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  — компоненты  $\mathbf{x}(t)$  и

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{h} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad (4.198)$$

то уравнение (4.197) можно записать в виде

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t) + v_i u(t). \quad (4.199)$$

На рис. 4.11 показана модель системы (4.199) в предположении, что  $b_n \neq 0$ , т. е. когда  $H(s)$  имеет  $n$  нулей и  $n$  полюсов. Из сравнения рис. 4.11

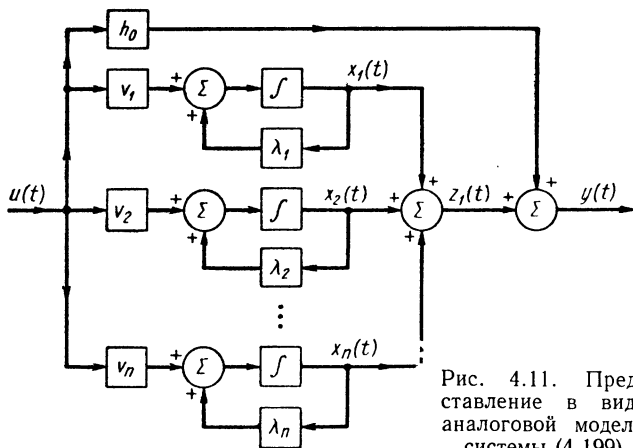


Рис. 4.11. Представление в виде аналоговой модели системы (4.199)

с рис. 4.9 видно, что единственное отличие — канал прямой связи от входа  $u(t)$ , который показан на рис. 4.11. С другой стороны, если  $b_n = 0$  (т. е. число нулей по крайней мере на один меньше числа полюсов), то  $h_0 = 0$  и рис. 4.11 и 4.9 имеют одинаковую структуру.

Если  $b_n = 0$ , то коэффициенты  $v_1, v_2, \dots, v_n$  можно рассчитать непосредственно. Можно определить  $v_i$  в терминах вычетов  $H(s)$  в полюсах  $\lambda_i$ . Для этого предположим, что в начальный момент система находится в покое, т. е.

$$y(0) = \dot{y}(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = u(0) = \dots = u^{(m-1)}(0) = 0, \quad (4.200)$$

и к ней прикладывается входной сигнал  $u(t)$ . Известно, что преобразование Лапласа дает

$$y(s) = H(s)u(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{s - \lambda_i} u(s), \quad (4.201)$$

где  $\rho_i$  — вычет  $H(s)$  в полюсе  $\lambda_i$ . Так как  $\lambda_i$  различны, имеем

$$\rho_i = \frac{b_m (\lambda_i - \sigma_1) (\lambda_i - \sigma_2) \dots (\lambda_i - \sigma_m)}{(\lambda_i - \lambda_1) (\lambda_i - \lambda_2) \dots (\lambda_i - \lambda_{i-1}) (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \dots (\lambda_i - \lambda_n)}, \quad (4.202)$$

где  $H(s)$  имеет  $m$  нулей  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  [т. е.  $H(s)$  определяется уравнением (4.192)]. Из уравнения (4.200) в силу (4.193), определяющего  $z(t)$ , следует, что  $z(0) = \mathbf{0}$ , и поскольку  $\mathbf{P}^{-1}$  — невырожденная матрица, то

$$x_1(0) = x_2(0) = \dots = x_n(0) = 0. \quad (4.203)$$

Из уравнения (4.199) получим

$$x_i(s) = \frac{v_i}{s - \lambda_i} u(s). \quad (4.204)$$

Элементами первой строки матрицы Вандермонда  $\mathbf{P}$  (3.411), являются единицы. Так как  $b_n = 0$ , то и  $h_0 = 0$ , и мы получим

$$y(s) = z_1(s) = \sum_{i=1}^n x_i(s) = \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{s - \lambda_i} u(s). \quad (4.205)$$

Сравнение выражений (4.205) с (4.201) приводит к заключению, что

$$v_i = \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.206)$$

В этом и предыдущем параграфах мы показали, как найти описание системы в пространстве состояний (в фазовом пространстве) по ее передаточной функции.

Мы показали, что собственные значения матрицы системы равны полюсам передаточной функции, а ее нули влияют только на управление в том смысле, что нули передаточной функции определяют «усилительный» вектор  $\mathbf{b}$ .

Отметим, что представление системы в пространстве состояний соответствует моделированию системы с помощью аналоговой модели, в которой фазовые координаты являются выходами интеграторов.

Полюса передаточной функции и собственные значения матрицы системы одинаковы. Нетрудно убедиться, что критерий устойчивости (§ 3.26) можно преобразовать в известный критерий устойчивости в терминах положения полюсов передаточной функции на комплексной плоскости.

**Пример 4.5.** Рассмотрим систему

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \ddot{u}(t) + 7\dot{u}(t) + 12u(t),$$

для которой имеем  $n = 3$ ;  $a_0 = 0$ ;  $a_1 = 2$ ;  $a_2 = 3$ ;  $b_3 = 0$ ;  $b_2 = 1$ ;  $b_1 = 7$ ;  $b_0 = 12$ .

Из уравнения (4.194) находим  $h_0 = 0$ ;  $h_1 = 1$ ;  $h_2 = 4$ ;  $h_3 = -2$ .

Фазовые координаты  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  и  $z_3(t)$  определяются соотношениями (4.193):

$$z_1(t) = y(t);$$

$$z_2(t) = \dot{y}(t) - u(t);$$

$$z_3(t) = \ddot{y}(t) - \dot{u}(t) - 4u(t)$$

и удовлетворяют векторному дифференциальному уравнению (4.195):

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} u(t).$$

**Упражнение 4.7.** Найдите дифференциальные уравнения в фазовых координатах  $z_i(t)$  для следующих систем:

$$\begin{aligned} 1) \quad \ddot{y}(t) &= \ddot{u}(t); & 2) \quad \dot{y}(t) &= \ddot{u}(t) + 8\dot{u}(t) + 15u(t); \\ 3) \quad \ddot{y}(t) - \dot{y}(t) &= \dot{u}(t); & 4) \quad y^{(4)}(t) + 2y^{(3)}(t) + y^{(2)}(t) &= u^{(2)}(t) + u^{(1)}(t). \end{aligned}$$

**Упражнение 4.8.** Рассмотрите систему

$$\ddot{y}(t) + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = b_2(t)\ddot{u}(t) + b_1(t)\dot{u}(t) + b_0(t)u(t),$$

где коэффициенты являются непрерывными функциями времени. Требуется найти описание системы в пространстве состояний. У к а з а н и е: Необходимо использовать выражения  $z_1(t) = y(t) - h_0(t)u(t)$  и т. д.

**Упражнение 4.9.** Обобщите результат упражнения 4.8 на случай линейной системы с переменными параметрами  $n$ -го порядка.

## ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

### 4.11. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Ранее сформулировано общее определение динамической системы и рассмотрены связанные с ним понятия входа, выхода и состояния. Поэтому мы подготовлены к тому, чтобы в достаточно общем виде рассмотреть задачу «управления» динамической системой. При изучении физической системы обычно имеются в виду какие-то определенные цели. В данном случае мы хотим, чтобы наша физическая система выполняла определенную задачу и делала это возможно «дешевле». Например, нам необходимо спроектировать автопилот с некоторыми определенными характеристиками или систему управления положением спутника, достаточно быстродействующую, но потребляющую не слишком много рабочего тела, или быстродействующую силовую следящую систему. Перевод этих инженерных задач проектирования на абстрактный язык динамических систем и представляет собой то, что мы будем дальше называть «задачей управления». Существенными элементами задачи управления являются:

- 1) динамическая система, которой надо «управлять»;
- 2) желаемый выходной сигнал или цель системы;
- 3) множество разрешенных (или допустимых) «управлений» (т. е. входных сигналов);
- 4) функционал, измеряющий эффективность «управляющих действий».

В качестве желаемой цели системы будем рассматривать заданное состояние или множество таких состояний, которые могут изменяться с течением времени. Иначе говоря, вопрос о получении определенного выходного сигнала мы заменим задачей «попадания» в определенное множество цели в пространстве состояний системы. Например, если мы хотим, чтобы выходной сигнал  $y(t)$  линейной системы, определяемой уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t); \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.207)$$

все время стремился к нулю, это означает, что мы хотим достичь такого множества состояний  $\hat{x}$ , для которого  $C\hat{x} = 0^1$ .

«Управляющие» сигналы физической системы обычно получают с помощью аппаратуры, способной дать ограниченные по величине «силу» или «энергию». Это обстоятельство вызывает необходимость накладывать

<sup>1</sup> Если  $\mathcal{S}$  — преобразование  $R_n$  в  $R_p$ ,  $\mathcal{S}x = Cx$ , то множество цели есть ядро  $\mathcal{S}^{-1}(0)$  (см. § 2.4).

ограничения на множество всех входов, которые можно использовать для управления системой. Множество управлений  $U$ , удовлетворяющее таким ограничениям, будем называть областью допустимых управлений.

Для большинства физических систем желаемая цель может быть достигнута с помощью различных допустимых входов, дающих различные переходные процессы. Нам хотелось бы рассчитать каждый из них и, если возможно, выбрать наилучший. Это обстоятельство требует некоторого критерия (или функционала). Функционалы, которые мы будем использовать для измерения «стоимости» управления нашей системой, принимают действительные значения и зависят от состояний, соответствующих началу и концу «управляющих действий»; траектории движения системы от исходного до конечного состояния; времени, в течение которого прикладывается управление, и используемого закона управления.

#### 4.12. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Предположим, что нам дана динамическая система  $n$ -го порядка

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]; \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \end{aligned} \right\} \quad (4.208)$$

на интервале определения  $(T_1, T_2)$  (см. § 4.6). Обозначим переходную функцию системы через

$$\mathcal{G}(t; \mathbf{u}_{(t_0, t)}; \mathbf{x}_0). \quad (4.209)$$

Пусть  $L$  — непрерывная действительная функция, заданная на  $R_n \times R_m \times (T_1, T_2)$ , т. е. непрерывная функция вида

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t), \quad (4.210)$$

и  $K$  — действительная функция на  $R_n \times (T_1, T_2)$ :

$$K(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \quad (4.211)$$

Будем считать подмножество  $S$  из  $R_n \times (T_1, T_2)$  заданным и назовем его множеством цели (target set). Элементами множества цели являются пары  $(\mathbf{x}, t)$ , состоящие из состояния  $\mathbf{x}$  и точки  $t$  из интервала определения системы.

Важным элементом определения динамической системы является множество  $U$  кусочно-непрерывных функций (см. определение 4.4). Элементы  $\mathbf{u}$  из  $U$  будем называть управлениями и покажем, как связаны ограничения с определением  $U$ .

Предположим, что для каждого  $t$  из  $(T_1, T_2)$  задано подмножество  $U_t$  из  $R_m$  (обычно замкнутое, ограниченное и выпуклое или все  $R_m$ ). Обозначим набор всех множеств  $U_t$  через  $\Omega$ , т. е.

$$\Omega = \{U_t : t \in (T_1, T_2)\}. \quad (4.212)^1$$

**Определение 4.7.**  $U_t$  называют областью ограничений при  $t$  и  $\Omega$  — множеством ограничений (или просто ограничениями). Если  $U$  — множество всех ограниченных кусочно-непрерывных функций  $\mathbf{u}(t)$  на  $(T_1, T_2)$ , такое, что

$$\mathbf{u}(t) \in U_t \text{ для всех } t \text{ из } (T_1, T_2), \quad (4.213)$$

то говорят, что  $U$  есть множество, или область управлений, удовлетворяющая ограничениям  $\Omega$  (или  $U$  — область допустимых управлений). Любой элемент  $\mathbf{u}$  из  $U$  называется допустимым управлением.

<sup>1</sup>  $\Omega$  имеет другой смысл, нежели в § 4.5. Здесь множество из § 4.5 представляет собой пространство  $R_m$ .

**Пример 4.6.** Обозначим через  $\hat{U}$  подмножество из  $R_m$ , заданное как

$$\hat{U} = \{u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_m e_m : |u_i| \leq M_i\}, \quad (4.214)$$

где  $M_i$  — заданные постоянные и  $e_1, e_2, \dots, e_m$  — натуральный базис в  $R_m$  [см. уравнение (2.27)]. Тогда довольно часто встречающееся множество ограничений  $\Omega$  дается соотношением

$$\Omega = \{U_t = \hat{U} : t \text{ из } (T_1, T_2)\}. \quad (4.215)$$

Здесь  $u(t)$  удовлетворяет ограничениям  $\Omega$  тогда и только тогда, когда для любого  $t$  из  $(T_1, T_2)$  имеем

$$|u_i(t)| \leq M_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.216)$$

Часто говорят, « $u(t)$  удовлетворяет ограничению  $|u_i(t)| \leq M_i, i = 1, 2, \dots, m$ » вместо « $u(t)$  удовлетворяет ограничению  $\Omega$ ». При  $M_1 = M_2 = \dots = M_m = 1$ , ограничивающим множеством является гиперкуб в  $R_m$ .

**Пример 4.7.** Пример ограничений, зависящих от времени, можно получить, приняв

$$U_t = \left\{ \begin{array}{l} \{u : |u_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m \text{ для } t \text{ из } (T_1, T_1)\} \\ \{u : |u_i| \leq 2, i = 1, 2, \dots, m \text{ для } t \text{ из } (T, T_2)\}, \end{array} \right. \quad (4.217)$$

где  $T$  — некоторый заданный элемент из  $(T_1, T_2)$ . Далее рассмотрим случай, когда  $M(t)$  является положительной действительной функцией времени на  $(T_1, T_2)$  и

$$U_t = \{u : |u_i| \leq M(t), i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (4.218)$$

**Пример 4.8.** Другим важным примером ограничения является

$$U_t = \{u : \|u\| \leq M\}, \quad (4.219)$$

где  $M$  — заданное число и  $\|u\|$  обозначает евклидову норму  $u$  (см. § 3.2). В этом случае часто говорят, что  $u(t)$  удовлетворяет ограничению:

$$\|u(t)\| \leq M. \quad (4.220)$$

Последний тип ограничений рассматривается в гл. 10, где ограничивающим множеством является гиперсфера радиуса  $M$  в  $R_m$ .

Пусть  $t_0$  — заданный элемент из  $(T_1, T_2)$  и  $x_0$  — заданный элемент из  $R_n$ . Для  $u$  из  $U$  зависимость

$$x(\tau) = \mathcal{G}(\tau; u_{(t_0, \tau)}; x_0) \quad (4.221)$$

является единственным решением системы, удовлетворяющим начальному условию

$$x(t_0) = x_0, \quad (4.222)$$

а функция  $\hat{J}$ , преобразующая  $R_n \times (T_1, T_2) \times U \times R_n \times (T_1, T_2)$ , определенная как

$$\hat{J}(x_0, t_0, u, x, t) = K(x, t) + \int_{t_0}^t L[x(\tau), u(\tau), \tau] d\tau, \quad (4.223)$$

является действительным числом. В выражении (4.223)  $K$  и  $L$  — функции, введенные ранее [см. уравнения (4.210) и (4.211)].

**Определение 4.8.** Говорят, что управление  $u$  переводит  $x_0$  в  $S$  [более строго  $(x_0, t_0)$  в  $S$ ], где  $S$  — множество цели, если множество

$$\{\mathcal{G}(t; u_{(t_0, t)}; x_0), t : t \geq t_0\} \quad (4.224)$$

встречает (т. е. пересекает) множество  $S$ . В этом случае говорят, что движение системы встречается, или пересекает,  $S$ . Если  $u$  переводит  $x_0$  в  $S$  и  $t_f$  — первый момент времени после  $t_0$ , когда движение  $x(t) = \mathcal{G}(t; u_{(t_0, t)}, x_0)$  вступает в  $S$ , то, обозначив:

$$x_f = x(t_f) = \mathcal{G}(t_f; u_{(t_0, t_f)}; x_0), \quad (4.225)$$

вместо  $\hat{J}(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}, \mathbf{x}_f, t_f)$  [см. уравнение (4.223)] пишут  $J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$ , т. е.

$$J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}) = \hat{J}(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}, \mathbf{x}_f, t_f) = \quad (4.226)$$

$$= K(\mathbf{x}_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau = \quad (4.227)$$

$$= K[\mathcal{G}(t_f; \mathbf{u}(t_0, t_f); \mathbf{x}_0), t_f] + \quad (4.228)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} L[\mathcal{G}(\tau; \mathbf{u}(t_0, \tau); \mathbf{x}_0), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau.$$

$J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$  называют значением функционала для управления  $\mathbf{u}$  по отношению к множеству цели  $S$ ;  $t_f$  — конечным временем;  $\mathbf{x}_f$  — конечным состоянием и  $K(\mathbf{x}_f, t_f)$  — конечной стоимостью. Если  $\mathbf{u}$  — такой элемент из  $U$ , который не переводит  $\mathbf{x}_0$  в  $S$ , принято полагать

$$J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}) = \infty. \quad (4.229)$$

Функционал<sup>1</sup>  $J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$ , преобразующий  $R_n \times (T_1, T_2) \times U$  в  $R \cup \{\infty\}$ <sup>2</sup>, называют функционалом преобразования системы.

Так как начальные состояние  $\mathbf{x}_0$  и время  $t_0$  часто фиксированы, то обычно пишут  $J(\mathbf{u})$  вместо  $J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$ . Частные случаи функционалов преобразования, представляющие практический интерес, рассматриваются в гл. 6. Мы можем теперь строго сформулировать задачу управления.

**Определение 4.9.** Задачей оптимального управления системой (4.208) по отношению к множеству  $S$ , функционалу преобразования  $J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$ , множеству допустимых управлений  $U$  и начальному состоянию  $\mathbf{x}_0$  в момент времени  $t_0$  является отыскание управления  $\mathbf{u}$  из  $U$ , минимизирующее функционал  $J(\mathbf{u})$ . Другими словами, задачей оптимального управления является следующее.

Заданы: динамическая система (4.208); начальное состояние  $\mathbf{x}_0$ ; начальное время  $t_0$ ; множество  $S$ ; область допустимых управлений  $U$ .

Найти: управление  $\mathbf{u}$  из  $U$ , переводящее  $\mathbf{x}_0$  в  $S$ ,<sup>3</sup> т. е.  $(\mathcal{G}(t_f; \mathbf{u}(t_0, t_f); \mathbf{x}_0), t_f) \in S$  и минимизирующее функционал  $J(\mathbf{u}) = J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$ .

Любое управление  $\mathbf{u}^*$ , дающее решение задачи оптимального управления, называют оптимальным управлением. Отметим, что существование оптимального управления не является необходимым. Действительно, в  $U$  может вообще не оказаться управлений  $\mathbf{u}$ , переводящих  $\mathbf{x}_0$  в  $S$ . Этот случай более подробно разбирается в § 4.14. С другой стороны, может оказаться несколько оптимальных управлений (см. гл. 6, 8 и 10).

Так как отыскание максимума действительной функции эквивалентно отысканию минимума той же функции с обратным знаком, то достаточно рассмотреть только минимизацию функционалов. По этой причине в дальнейшем мы будем иметь дело только с отысканием минимума.

#### 4.13. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые специальные случаи задачи управления, а именно: задачу без ограничений, вопрос об ограничении состояний и различные специальные вопросы, возникающие из

<sup>1</sup>  $J$  называют функционалом, потому что  $J$  зависит от множества функций  $U$ ;  $J$  есть функция от функций. (Сравните с § 3.16.)

<sup>2</sup>  $R \cup \{\infty\}$  есть множество всех действительных чисел вместе с символом  $\infty$ , превышающим любое действительное число.

<sup>3</sup> Т. е. переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S$ .

конкретного вида множества цели, т. е. задачи о регуляторе и точке встречи (перехвате). При рассмотрении этих задач будем использовать терминологию и обозначения, приведенные в § 4.12.

Несмотря на то, что входы физической системы неизбежно ограничены, часто оказывается интересным рассмотреть задачу оптимального управления без ограничений, т. е. случай, когда ограничением  $U_t$  в момент времени  $t$  (см. определение 4.7) является все пространство  $R_m$  для любого  $t$ . Иначе говоря, мы часто будем полагать, что любая ограниченная кусочно-непрерывная функция из  $(T_1, T_2)$  в  $R_m$  является допустимым управлением. При этом говорят, что изучается свободная оптимальная задача или оптимальная задача без ограничений. Отметим, что свободная задача может не иметь решения, тогда как аналогичная задача с ограничениями имеет решение и наоборот. При определении задачи оптимального управления мы рассмотрели влияние ограничений на величину управлений, предполагая, что вектор состояния системы может принимать любое значение в  $R_n$ . Иногда возникает задача управления, где ограничения накладываются и на фазовые координаты системы.

**Определение 4.10.** Пусть  $X$  — замкнутое подпространство пространства состояний  $R_n$  и множество цели  $S$  содержится в  $X \times (T_1, T_2)$ , тогда оптимальная задача с ограниченным состоянием системы формулируется следующим образом.

Дана динамическая система (4.208), начальное состояние  $x_0$  из  $X$ , начальное время  $t_0$ , множество цели  $S$  и область допустимых управлений  $U$ . Найти управление  $u$  из  $U$ , переводящее  $x_0$  в  $S$  вдоль траектории, целиком заключенной в  $X$ , и минимизирующее функционал преобразования  $J(u) = J(x_0, t_0, u)$  по отношению ко всем таким управлениям.

Можно заметить, что к общей оптимальной задаче добавлены требования: 1) чтобы начальное состояние принадлежало к  $X$  и 2) рассматриваются лишь те управления, которые дают траектории, целиком проходящие в  $X$ . Такие задачи в данной книге рассматриваться не будут, поэтому мы отсылаем заинтересованного читателя к другим литературным источникам [43], [54], [129].

Рассмотрим некоторые частные случаи множества  $S$  и соответствующие им варианты задачи управления. Напомним, что  $S$  представляет собой подмножество из  $R_n \times (T_1, T_2)$  — элементами  $S$  являются пары  $(x, t)$ , соответствующие состоянию  $x$  в момент времени  $t$  из  $(T_1, T_2)$ .

Если множество  $S$  имеет вид

$$S = \cup_{t \in (T_1, T_2)} S_t \times \{t\}, \quad (4.230)$$

где  $S_t$  — заданные (непустые) подмножества из  $R_n$ , то такую задачу называют задачей с нефиксированным временем. Иначе говоря, мы пытаемся достичь множества, движущегося в пространстве состояний, причем достичь его мы имеем право в любой момент времени  $t$ , принадлежащий интервалу определения  $(T_1, T_2)$ . В частном случае

$$S = \{(z(t), t) : t \in (T_1, T_2)\}, \quad (4.231)$$

где  $z(t)$  — заданная на  $(T_1, T_2)$   $n$ -мерная функция времени.

Эту задачу называют задачей о точке встречи (или задачей преследования).

Напротив, если  $S$  имеет вид

$$S = S_1 \times \{T\}, \quad (4.232)$$

где  $T$  — заданный элемент из  $(T_1, T_2)$ ,

то такую задачу называют задачей с фиксированным временем. В данном случае мы пытаемся достичь заданного множества  $S_1$  в заданный момент времени  $T$ . Если  $T_2 = \infty$ , то часто вместо  $S_1 \times \{T\}$  рассматривают множество цели  $S \times \{t_0 + T\}$ .

**Определение 4.11.** Пусть  $T$  — заданный элемент из  $(T_1, T_2)$  и  $S_1$  — заданное подмножество из  $R_n$ . Задача с фиксированным временем формулируется так: задана динамическая система (4.208), начальное состояние  $\mathbf{x}_0$ , начальное время  $t_0$ , причем  $t_0 < T$ , множество цели  $S_1 \times \{T\}$  и множество допустимых управлений  $U$ ; необходимо найти в  $U$  управление  $\mathbf{u}$ , которое переводит систему из  $\mathbf{x}_0$  в  $S$ , минимизируя функционал преобразования

$$J(\mathbf{u}) = J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}) = K[\mathbf{x}(T), T] + \int_{t_0}^T L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau.$$

Предположим теперь, что множество  $S$  имеет вид

$$S = \{\mathbf{x}^*\} \times (T_1, T_2), \quad (4.233)$$

где  $\mathbf{x}^*$  — единственная точка, обычно начало координат в  $R_n$ . Такую задачу называют задачей с фиксированной конечной точкой и нефиксированным временем. В общем случае, если множество всех  $\mathbf{x}$  из  $R_n$  в области цели  $S$  состоит из единственной точки, то о задаче управления говорят как о задаче с фиксированным концом. Если точка  $\mathbf{x}^*$  является точкой равновесия системы<sup>1</sup>, то такую задачу называют задачей о регуляторе. В дальнейшем будут возникать другие варианты задач управления, но после приведенного обсуждения их интерпретация не должна вызывать у читателя затруднений.

#### 4.14. МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМЫХ СОСТОЯНИЙ<sup>2</sup>

В теории управления важную роль играют некоторые качественные свойства систем. В частности, очень важны понятия достижимости, управляемости и наблюдаемости. В этом параграфе рассматривается понятие достижимости и сопутствующее ему понятие множества достижимых состояний. В следующем параграфе мы дадим определения понятий управляемости и наблюдаемости.

Термин «достижимость» означает, что мы можем найти такое управление, которое переводит систему из заданного состояния  $\mathbf{x}_0$  в другое состояние  $\mathbf{x}_1$ . Сформулируем это понятие более строго. Предположим, что рассматривается система с переходной функцией  $\mathcal{G}(t; \mathbf{u}_{(t_0, t)}; \mathbf{x}_0)$  и областью допустимых управлений  $U$ , удовлетворяющей ограничениям  $\Omega$  (см. определение 4.7), т. е.  $\mathbf{u} \in U$  в том случае, когда  $\mathbf{u}$  — кусочно-непрерывная функция

$$\mathbf{u}(t) \in U_t \quad (4.234)$$

для любого  $t$  из интервала определения системы. Здесь  $U_t$  — заданные подмножества из  $R_m$ .

**Определение 4.12.** Состояние  $\mathbf{x}_1$  называют достижимым, или доступным из исходного состояния  $\mathbf{x}_0$  при  $t_0$  по отношению к  $U$ , если существует элемент  $\mathbf{u}_1$  из  $U$ , такой, что

$$\mathcal{G}(t_1; \mathbf{u}_{(t_0, t_1)}; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_1 \quad (4.235)$$

<sup>1</sup> Это означает, что  $f(\mathbf{x}^*, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$  для любого  $t$  из  $(T_1, T_2)$ , где  $f$  — функция, фигурирующая в уравнении (4.208).

<sup>2</sup> См. [87]—[89], [142], [145], [146], [150], [152], [169] и [189].



для конечного  $t_1$ ,  $t_1 \geq t_0$ . Если  $A(t; \mathbf{x}_0, t_0, U)$  обозначает подмножество из  $R_n$ , которое состоит из всех состояний  $\mathbf{x}_1$ , достижимых из  $\mathbf{x}_0$  при  $t_0$  по отношению к  $U$  в момент времени  $t$ ,

$A(t; \mathbf{x}_0, t_0, U) = \{\mathbf{x}_1: \text{существует } \mathbf{u}_1 \in U \text{ такое, что}$

$$\mathcal{G}(t; \mathbf{u}_1(t_0, t); \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_1\}, \quad (4.236)$$

то  $A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U)$  называют областью достижимых состояний в момент времени  $t$  (из  $\mathbf{x}_0$  при  $t_0$  по отношению к  $U$ ), а  $\bigcup_{t \geq t_0} A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U)$  — множеством достижимых состояний (из  $\mathbf{x}_0$  при  $t_0$  по отношению к  $U$ ).

Предположим, что наша система линейна и описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t); \quad (4.237)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t). \quad (4.238)$$

Пусть  $\Phi(t, t_0)$  — фундаментальная матрица уравнения (4.237) (см. § 3.20). Тогда переходную функцию системы  $\mathcal{G}$  можно записать в виде

$$\mathcal{G}(t; \mathbf{u}_{(t_0, t)}; \mathbf{x}_0) = \Phi(t, t_0) \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.239)$$

Исследование выражения (4.239) приводит нас к следующей теореме.

**Теорема 4.1.** Если область допустимых управлений  $U$  для системы (4.237) и (4.238) выпукла (см. § 3.8), то для любых  $\mathbf{x}_0$  и  $t_0$  множество достижимых состояний  $A(t; \mathbf{x}_0, t_0, U)$  также выпукло. В частности, если  $U$  состоит из всех кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих ограничению

$$\mathbf{u}(\tau) \in U_\tau, \quad (4.240)$$

где все  $U_\tau$  выпуклы, то и  $A(t; \mathbf{x}_0, t_0, U)$  выпукло.

**Доказательство.** Предположим, что область  $U$  выпукла, что  $\mathbf{x}_0$  — произвольный элемент из  $R_n$  и  $t_0$  — произвольный момент времени. Мы хотим показать, что если  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  — элементы из  $A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U)$  и  $r, s$  — действительные числа, такие, что  $r + s = 1$ ,  $r, s \geq 0$ , то  $r\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2$  целиком принадлежит  $A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U)$ . Существуют управления  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  из  $U$ , такие, что

$$\mathbf{x}_1 = \Phi(t, t_0) \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_1(\tau) d\tau \right\}; \quad (4.241)$$

$$\mathbf{x}_2 = \Phi(t, t_0) \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_2(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.242)$$

Следовательно,

$$r\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2 = \Phi(t, t_0) \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \mathbf{B}(\tau) [r\mathbf{u}_1(\tau) + s\mathbf{u}_2(\tau)] d\tau \right\}. \quad (4.243)$$

Так как область  $U$  выпуклая, то  $r\mathbf{u}_1 + s\mathbf{u}_2$  принадлежит к  $U$ , и мы доказали, что  $r\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2$  принадлежит к  $A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U)$ . Читатель может самостоятельно проверить справедливость этой теоремы в частных случаях.

**Следствие 4.1.** Если  $U$  состоит из управлений, удовлетворяющих ограничению

$$|u_i(\tau)| \leq M_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.244)$$

то множество  $A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U)$  выпукло.

**Пример 4.9.** Если даже все  $A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U)$  выпуклы, из этого не следует, что и  $\bigcup_{t > t_0} A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U)$  является выпуклым. Покажем это на простом примере. Рассмотрим систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (4.245)$$

Предположим, что  $U$  состоит всего из одной функции, тождественно равной нулю:

$$u_1(t) = u_2(t) = 0 \text{ для любого } t.$$

Пусть  $t_0 = 0$  и  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Множество  $A(t; \mathbf{x}_0; 0; U)$  состоит из единственной точки  $\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$  и, следовательно, выпукло. Однако  $\bigcup_{t \geq 0} A(t; \mathbf{x}_0; 0; U)$  есть множество  $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$ , которое, очевидно, выпуклым не является.

**Следствие 4.2.** Если  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , область  $U$  — выпуклая и содержит функцию  $\mathbf{u}(t)$  для любого  $t$ , то множество достижимых состояний выпукло. В частности, если  $U$  выпуклая и содержит  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ , а система является линейной с постоянными параметрами, то множество состояний, достижимых из  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  по отношению к  $U^1$ , является выпуклым.

**Теорема 4.2.** Предположим, что  $U$  состоит из всех кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих ограничению

$$\mathbf{u}(\tau) \in U_\tau, \quad (4.246)$$

где все множества  $U_\tau$  содержатся в сфере  $S(\mathbf{0}, M)$  в  $R_m$ . Тогда для любого  $t > t_0$  множество  $A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U)$  ограничено (см. § 3.6).

**Доказательство.** Предположим, что  $\mathbf{x}_1$  принадлежит к  $A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U)$ ; тогда существует  $\mathbf{u}$  из  $U$  такое, что

$$\mathbf{x}_1 = \Phi(t, t_0) \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.247)$$

Так как все элементы матриц  $\Phi$  и  $\mathbf{B}$  являются непрерывными функциями на  $[t_0, t]$ , то можно заключить, что существуют числа  $L, N$ , при которых

$$\|\Phi(t, t_0) \mathbf{v}\| \leq L \|\mathbf{v}\| \quad (4.248)^2$$

и

$$\|\Phi(t_0, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{v}\| \leq N \|\mathbf{v}\| \quad (4.249)$$

для любого  $\tau$  из  $[t_0, t]$  и для любого  $\mathbf{v}$  из  $R_n$ . Из теоремы 3.8 имеем

$$\|\mathbf{x}_1\| \leq L \|\mathbf{x}_0\| + (t - t_0) N \max_{\tau \in (t_0, t)} \|\mathbf{u}(\tau)\| \leq \quad (4.250)$$

$$\leq L \|\mathbf{x}_0\| + (t - t_0) MN \quad (4.251)$$

и, следовательно,

$$A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U) \subset \overline{S(\mathbf{0}, L \|\mathbf{x}_0\| + (t - t_0) MN)}. \quad (4.252)^3$$

Таким образом, мы доказали, что множество  $A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U)$  заключено в сфере  $S$  из  $R_n$  и, следовательно, ограничено.

**Следствие 4.3.** Если  $U$  состоит из управлений, удовлетворяющих ограничению

$$|u_i(\tau)| \leq M_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.253)$$

то  $A(t; \mathbf{x}_0; t_0; U)$  ограничено.

<sup>1</sup> Рассматриваются лишь управления, принадлежащие к  $U$ .

<sup>2</sup> Напомним, что  $\|\cdot\|$  обозначает евклидову норму (см. § 3.6).

<sup>3</sup> См. уравнение (3.5).

**Упражнение 4.10.** Рассмотрите систему (4.245) для  $u_1(t) = 0$  и  $|u_2(t)| \leq 1$  при любом  $t$ . Пусть  $t_0 = 0$  и начальное состояние  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . Покажите, что множеством достижимых состояний  $A$  для  $t = \pi$  является

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}.$$

**Упражнение 4.11.** Рассмотрите систему  $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ ;  $\dot{x}_2(t) = u(t)$ ;  $0 \leq u(t) \leq 1$  для любого  $t$ . Пусть  $t_0 = 0$ ;  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . Найдите множество достижимых состояний при  $t = 1$ .

В заключение приведем теорему, которая очень часто используется при доказательстве существования оптимального управления. Её доказательство можно найти в работе [142].

**Теорема 4.3.** Предположим, что для системы (4.237) с постоянными  $A(t)$  и  $B(t)$  область  $U$  состоит из измеримых<sup>1</sup> функций, удовлетворяющих ограничению:

$$u(\tau) \in U_\tau, \quad (4.254)$$

где множества  $U_\tau$ : 1) выпуклы; 2) содержатся в некоторой сфере  $S(0, M)$  в  $R_m$  и 3) замкнуты в  $R_m$  (см. § 3.4). Тогда для любого  $t > t_0$  множество  $A(t; x_0, t_0; U)$  замкнуто.

#### 4.15. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом параграфе мы определим понятия управляемости и наблюдаемости. Грубо говоря, термин «управляемость» означает, что в течение конечного отрезка времени  $t$  возможно перевести систему из любого состояния в начало координат. Термин же «наблюдаемость» означает, что начальное состояние системы можно определить путем соответствующих измерений ее выхода. Несколько ниже мы дадим строгие определения этих понятий, а в последующих двух параграфах рассмотрим их для случая линейной системы с постоянными параметрами, позволяющего получить критерии управляемости и наблюдаемости в развернутой форме. В заключение мы рассмотрим некоторые практические примеры этих понятий<sup>2</sup>.

Предположим, что задана динамическая система

$$\dot{x}(t) = f[x(t); u(t); t]; \quad (4.255)$$

$$y(t) = g[x(t); u(t); t] \quad (4.256)$$

с переходной функцией  $\mathcal{G}(T; u_{(t_0, T)}^0; x_0)$  и с областью допустимых управлений  $U$ , состоящей из всех ограниченных кусочно-непрерывных функций, преобразующих интервал определения в  $R_m$ . Никаких специальных ограничений на  $u$  не накладывается.

**Определение 4.13. Управляемость.** Если состояние  $x_1 = 0$  достижимо из  $x_0$  при  $t_0$  (см. определение 4.12), то говорят, что состояние  $x_0$  управляемо в момент времени  $t_0$ . Иначе говоря,  $x_0$  управляемо при  $t_0$ , если существует кусочно-непрерывная функция  $u^0$  такая, что

$$\mathcal{G}(T; u_{(t_0, T)}^0; x_0) = 0 \quad (4.257)$$

для некоторого конечного  $T \geq t_0$ . Если каждое состояние  $x_0$  управляемо при  $t_0$ , то система управляема при  $t_0$ . Наконец, если каждое состояние  $x_0$  управляемо в каждый момент времени  $t_0$  на интервале определения системы, то система полностью управляема (или просто «управляема»).

**Определение 4.14. Наблюдаемость.** Говорят, что состояние  $x_0$  наблюдаемо для  $t = t_0$ , если для заданного управления  $u$  существует время

<sup>1</sup> Кусочная непрерывность здесь недостаточна, и поэтому требуется наличие измеримости (см. [192], где дается определение этого понятия).

<sup>2</sup> Более детальный анализ этих понятий читатель найдет в [35], [61], [82], [106], [109], [111], [113], [130], [210] и [212].

$t_1 \geq t_0^1$  такое, что знания  $\mathbf{u}_{(t_0, t_1]}$  и выхода<sup>2</sup>  $\mathbf{y}_{(t_0, t_1]} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}_{(t_0, t_1]})$  достаточно для определения  $\mathbf{x}_0$ . Если каждое состояние  $\mathbf{x}_0$  наблюдаемо при  $t_0$ , то говорят, что система наблюдаема при  $t_0$ . Наконец, если каждое состояние  $\mathbf{x}_0$  наблюдаемо в любой момент времени  $t_0$  в интервале определения системы, то система полностью наблюдаема (или просто «наблюдаема»).

Ниже мы покажем, что понятия управляемости и наблюдаемости являются внутренними свойствами системы, т. е. они сохраняются при всех эквивалентных преобразованиях системы (см. определение 4.5).

**Теорема 4.4.** Пусть  $\mathbf{P}$  — невырожденная  $n \times n$  матрица и  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}(t)$ . Система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t); \mathbf{u}(t); t]; \quad (4.258)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t); \mathbf{u}(t); t] \quad (4.259)$$

управляема (или наблюдаема), когда эквивалентная система

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f}[\mathbf{Pz}(t), \mathbf{u}(t), t]; \quad (4.260)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{Pz}(t), \mathbf{u}(t), t] = \mathbf{h}[\mathbf{z}(t); \mathbf{u}(t); t] \quad (4.261)$$

управляема (или наблюдаема).

**Доказательство.** Предположим сначала, что система (4.258), (4.259) управляема,  $t_0$  — заданное время и  $\mathbf{z}_0$  — заданный элемент из  $R_n$ . Тогда в  $R_n$  существует элемент  $\mathbf{x}_0$  такой, что  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0$ , а для некоторого  $T \geq t_0$  — элемент  $\mathbf{u}^0$  из  $U$ , для которого

$$\phi(T; \mathbf{u}_{(t_0, T]}^0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}, \quad (4.262)$$

где  $\phi$  — переходная функция системы (4.258), (4.259).

Если

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1} \phi(t; \mathbf{u}_{(t_0, t]}^0; \mathbf{x}_0), \quad (4.263)$$

то непосредственно видно, что  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$  и  $\mathbf{z}(T) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0}$ . Так как справедливо и обратное положение, то часть теоремы, относящаяся к управляемости системы, доказана.

Для доказательства другой части теоремы, относящейся к наблюдаемости системы, предположим, что система (4.258), (4.259) наблюдаема. Пусть  $t_0$  — заданный момент времени,  $\mathbf{z}_0$  — заданный элемент из  $R_n$ ,  $\mathbf{u}$  — любой элемент  $U$  и  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{Pz}_0$ . Существует время  $T \geq t_0$  такое, что  $\mathbf{u}_{(t_0, T]}$  и  $\mathbf{y}_{(t_0, T]} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}_{(t_0, T]})$  достаточны для определения  $\mathbf{x}_0$ . Так как  $\mathbf{g}[\mathbf{Pz}(t), \mathbf{u}(t), t] = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$ , то  $\mathbf{y}_{(t_0, T]} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{Pz}_0; \mathbf{u}_{(t_0, T]}) = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{z}_0; \mathbf{u}_{(t_0, T]})$  и, следовательно, знания  $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{z}_0; \mathbf{u}_{(t_0, T]})$  и  $\mathbf{u}_{(t_0, T]}$  достаточно для определения  $\mathbf{z}_0$ . Так как справедливо и обратное положение, то эта часть теоремы также доказана.

#### 4.16. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим линейную систему с постоянными параметрами вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t); \quad (4.264)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t), \quad (4.265)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  — соответственно матрицы  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $p \times n$  и  $p \times m$  и попытаемся обнаружить внутреннее содержание понятия управляемости для этого случая.

<sup>1</sup>  $t_1$  может зависеть от  $\mathbf{u}$ .

<sup>2</sup> См. § 4.5.

Для начала предположим, что  $\mathbf{x}_0$  — управляемое состояние при  $t_0$ . Существует  $T \geq 0$  ( $T = t_1 - t_0$ ) такое, что для некоторого  $\mathbf{u}$  имеем

$$\mathbf{x}_0 = - \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-A(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (4.266)$$

где  $e^{At}$  — экспонента от  $A t$  (см. § 3.21). Из выражения (4.266) и уравнения

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{-A(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^T e^{-A\sigma} \mathbf{B}\mathbf{u}(\sigma) d\sigma \quad (4.267)$$

видно, что  $\mathbf{x}_0$  управляемо при 0. Иначе говоря, при исследовании, является ли состояние  $\mathbf{x}_0$  линейной системы с постоянными параметрами управляемым, мы можем принимать 0 за начальный момент времени. Далее, следует говорить об управляемом состоянии вообще, так как мы показали, что начальный момент времени можно выбирать произвольно. Мы показали, что для управляемости  $\mathbf{x}_0$  при  $t$  необходимо и достаточно, чтобы  $\mathbf{x}_0$  было управляемо при  $t = 0$ .

Другим важным следствием выражения (4.266) является то обстоятельство, что множество состояний  $\mathbf{x}_0$ , являющихся управляемыми, есть подпространство из  $R_n^1$ . Теорема 4.5 дает описание подпространства управляемых состояний в терминах матрицы системы  $A$  и матрицы  $B$ . Ясно, что если  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}_1$  — управляемые состояния, то существует траектория, соединяющая  $\mathbf{x}_0$  с  $\mathbf{x}_1$ . В частности, можно двигаться от 0 к любому управляемому состоянию.

**Упражнение 4.12.** Покажите, что область состояний, управляемых при  $t = 0$ , является подпространством из  $R_n$ .

Обозначим через  $\mathbf{b}_\beta$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, n$  —  $n$ -мерный вектор, являющийся  $\beta$ -м столбцом матрицы  $B$ :

$$\mathbf{b}_\beta = \begin{bmatrix} b_{1\beta} \\ b_{2\beta} \\ \vdots \\ b_{n\beta} \end{bmatrix} \quad (4.268)$$

и пусть  $\mathbf{e}_{\alpha\beta}$  —  $n$ -мерный вектор, определенный как

$$\mathbf{e}_{\alpha\beta} = A^\alpha \mathbf{b}_\beta; \quad \alpha = 0, 1, \dots, n-1; \quad \beta = 1, 2, \dots, m, \quad (4.269)$$

где  $A^0 = I$  и  $A^\alpha = AA \cdots A$  ( $\alpha$  раз) для  $\alpha > 0$ .

**Теорема 4.5.** Линейная система с постоянными параметрами (4.264), (4.265) полностью управляема тогда и только тогда, когда векторы  $\mathbf{e}_{\alpha\beta}$  отображают все пространство  $R_n$ , т. е. только в том случае, когда любой элемент из  $R_n$  есть линейная комбинация векторов  $\mathbf{e}_{\alpha\beta}$  (см. § 2.5).

**Доказательство.** Докажем эту теорему, дополнительно предположив, что матрица системы  $A$  не имеет комплексных собственных значений (полное доказательство можно найти в [61]).

Прежде всего предположим, что  $\xi$  — управляемое (при  $t = 0$ ) состояние системы. Существуют  $T > 0$  и управление  $\mathbf{u}^*$  такие, что

$$-\xi = \int_0^T e^{-As} \mathbf{B}\mathbf{u}^*(s) ds. \quad (4.270)^2$$

<sup>1</sup> Напомним, что подмножество  $W$  векторного пространства  $V$  является его подпространством, если: 1)  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ , то  $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$  и 2) если  $r \in R$  и  $\mathbf{w} \in W$ , то  $r\mathbf{w} \in W$  (см. § 2.5).

<sup>2</sup> Переменная  $s$  обозначает время, а не комплексную переменную.

Так как (см. § 3.21)

$$e^{-As} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A^p \frac{s^p}{p!}$$

и каждая  $n \times n$  матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению (см. § 2.10, теорема 2.3), то

$$e^{-As} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \psi_{\alpha}(s) A^{\alpha}, \quad (4.271)$$

где  $\psi_{\alpha}(s)$  — скалярные функции от  $s$ . Следовательно,

$$-\xi = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \int_0^T \psi_{\alpha}(s) A^{\alpha} B u^*(s) ds \quad (4.272)$$

и

$$-\xi = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=1}^m \left[ \int_0^T \psi_{\alpha}(s) u_{\beta}^*(s) ds \right] A^{\alpha} b_{\beta}, \quad (4.273)$$

поскольку

$$u^*(s) = \sum_{\beta=1}^m u_{\beta}(s) e_{\beta}, \quad (4.274)$$

где  $e_{\beta}$  — элементы натурального базиса в  $R_n$ . Последнее доказывает достаточность.

С другой стороны, предположим, что  $\xi$  — элемент пространства  $R_n$ . Покажем, что существуют  $T > 0$  и управление  $u^*$  такие, что

$$-\xi = \int_0^T e^{-As} B u^*(s) ds. \quad (4.275)$$

Допустим, что для момента времени  $T > 0$  существует действительная функция  $\varphi(s)$ , удовлетворяющая условиям

1)  $\varphi^{(\alpha)}(0) = \varphi^{(\alpha)}(T) = 0$  для  $\alpha = 0, 1, \dots, n-2$ , где  $\varphi^{(\alpha)}(s)$  обозначает производную от  $\varphi(s)$  по  $s$  порядка  $\alpha$  и  $\varphi^{(0)}(s) = \varphi(s)$ ;

2)  $\varphi(s) > 0$  на  $(0, T)$ ;

3) матрица  $Q$ , определенная как

$$Q = \int_0^T \varphi(s) e^{-As} ds, \quad (4.276)$$

— невырожденная.

Так как каждый элемент из  $R_n$  есть линейная комбинация  $e_{\alpha\beta}$ , то можно записать

$$-\xi = Q^{-1} \xi = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}, \quad (4.277)$$

где  $a_{\alpha\beta}$  — действительные числа.

Управление  $u^*(s)$  с компонентами  $u_{\beta}^*(s)$ , определяемыми соотношениями

$$u_{\beta}^*(s) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} a_{\alpha\beta} \varphi^{(\alpha)}(s), \quad (4.278)$$

переводит  $\xi$  в начало координат за время  $T$ . Далее,

$$\int_0^T e^{-As} B u^*(s) ds = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=1}^m a_{\alpha\beta} \left[ \int_0^T \varphi^{(\alpha)}(s) e^{-As} ds \right] b_{\beta}. \quad (4.279)$$

Поэтому достаточно показать, что

$$\int_0^T \varphi^{(\alpha)}(s) e^{-As} ds = QA^\alpha. \quad (4.280)$$

С помощью выражения (4.275) получим

$$-QQ^{-1}\xi = -\xi = \int_0^T e^{-As} Bu^*(s) ds. \quad (4.281)$$

Выражение (4.280) легко доказать методом индукции по числу  $\alpha$ , используя формулу (4.276) и интегрируя по частям на основе соотношения (3.278).

Теперь остается показать, что соответствующая функция  $\varphi(s)$  существует. Такой функцией является

$$\varphi(s) = s^{2n} (T-s)^{2n}, \quad (4.282)$$

и она, очевидно, обладает свойствами 1 и 2. Покажем, что матрица

$$Q = \int_0^T \varphi(s) e^{-As} ds \quad (4.283)$$

— невырожденная. Пусть  $J$  — жорданова каноническая форма  $A$  (см. § 2.10). Существует невырожденная матрица  $P$  такая, что  $P^{-1}AP = J$  и

$$e^{A(T-s)} = P^{-1}e^{J(T-s)}P. \quad (4.284)$$

Так как матрица  $e^{AT}$  невырожденная, то достаточно доказать, что матрица

$$Pe^{AT}QP^{-1} = \int_0^T \varphi(s) e^{J(T-s)} ds \quad (4.285)$$

невырожденная. Но  $e^{J(T-s)}$  — треугольная матрица с элементами  $e^{\lambda_i(T-s)}$  вдоль диагонали, где  $\lambda_i$  — собственные значения (необязательно различные) матрицы  $A$  (см. § 3.22). Следовательно,

$$\det \int_0^T \varphi(s) e^{J(T-s)} ds = \prod_{i=1}^n \left[ \int_0^T \varphi(s) e^{\lambda_i s} ds \right], \quad (4.286)$$

и поэтому правая часть выражения (4.285) есть невырожденная матрица, так как

$$\int_0^T \varphi(s) e^{\lambda_i s} ds > 0 \quad (4.287)$$

для любого  $i$  (см. теорему 3.8).

Итак, теорема доказана. Ее важными следствиями являются:

**Следствие 4.4.** Подпространство управляемых состояний системы (4.264), (4.265) то же самое, что и отображение векторов  $e_{\alpha\beta}$  (4.269). Иначе говоря,  $x_0$  управляемо в том и только в том случае, когда  $x_0$  — линейная комбинация векторов  $e_{\alpha\beta}$ .

**Следствие 4.5.** Пусть  $G$  — матрица  $n \times nm$ , определенная соотношением

$$G = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B] \quad (4.288)$$

или эквивалентным соотношением

$$G = [e_{01}, e_{02}, \dots, e_{0m} \mid e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1m} \mid \dots \mid e_{n-1,1}, e_{n-1,2}, \dots, e_{n-1,m}], \quad (4.289)$$

где вектора  $e_{\alpha\beta}$  определяется соотношением (4.269). Система полностью управляема тогда, когда ранг  $G$  равен  $n$ , т. е.

$$\text{ранг } G = n, \tag{4.290}$$

или, иначе говоря, в том случае, когда в  $G$  имеется  $n$  линейно независимых векторов-столбцов.

**Следствие 4.6.** Если  $B$  есть  $n \times 1$  матрица  $b$ , т. е. если управления являются скалярными величинами, то система полностью управляема в том и только в том случае, когда  $n \times n$  матрица

$$G = [b \mid Ab \mid \dots \mid A^{n-1}b] \tag{4.291}$$

невырождена, или, полагая

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

в том и только в том случае, когда

$$\det G = \det \begin{bmatrix} b_1 & \sum_{j=1}^n \alpha_{1j}^{(1)} b_j & \dots & \sum_{j=1}^n \alpha_{1j}^{(n-1)} b_j \\ b_2 & \sum_{j=1}^n \alpha_{2j}^{(1)} b_j & \dots & \sum_{j=1}^n \alpha_{2j}^{(n-1)} b_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & \sum_{j=1}^n \alpha_{nj}^{(1)} b_j & \dots & \sum_{j=1}^n \alpha_{nj}^{(n-1)} b_j \end{bmatrix} \neq 0, \tag{4.292}$$

где  $\alpha_{ij}^{(k)}$  — элементы матрицы  $A^k$ .

**Следствие 4.7.** Если матрица системы  $A$  — диагональная матрица с различными элементами, то система полностью управляема, если матрица  $B$  не имеет нулевых строк.

Последние два следствия дают простые правила для определения, является ли система полностью управляемой.

**Пример 4.10.** Рассмотрим систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \tag{4.293}$$

Управляема ли она?  $B$  есть вектор-столбец  $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  и  $Ab$  — вектор  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Следовательно, система управляема.

**Пример 4.11.** Рассмотрим систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u. \tag{4.294}$$

Управляема ли она?  $B$  есть вектор-столбец  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  и  $Ab$  — вектор  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Следовательно,  $b$  и  $Ab$  не отображают  $R_2$ , и система не является управляемой.

**Пример 4.12.** Рассмотрим систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \tag{4.295}$$



Управляема ли она?  $B$  —  $2 \times 2$  матрица  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $A$  —  $2 \times 2$  матрица  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  и  $AB$  —  $2 \times 2$  матрица  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ . Итак,  $G = [B; AB]$  есть  $2 \times 4$  матрица:

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ранг  $G$  равен 2, следовательно, система управляема. Векторы  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  линейно независимы. Любые два вектора-столбца матрицы  $G$  в данном случае линейно независимы.

**Упражнение 4.13.** Покажите, что невозможно найти решения уравнения (4.294), начинающегося в точке  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  и оканчивающегося в точке  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

**Упражнение 4.14.** Какие из приведенных систем полностью управляемы?

а)  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix};$

б)  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix};$

в)  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$

**Упражнение 4.15.** Каким условиям должны удовлетворять  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$ , чтобы обеспечивалась полная управляемость системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u.$$

**Упражнение 4.16.** Рассмотрите нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 x_2 x_3 + u_1;$$

$$\dot{x}_2 = \alpha_2 x_1 x_3 + u_2;$$

$$\dot{x}_3 = \alpha_3 x_1 x_2 + u_3,$$

где  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ . Можно ли показать, что эта система управляема?

#### 4.17. НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим линейную систему с постоянными параметрами вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad (4.296)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (4.297)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  — соответственно  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $p \times n$  и  $p \times m$  матрицы. Определим, какой смысл заключен в понятии «наблюдаемость системы».

Предположим, что  $\mathbf{x}_0$  наблюдаемо при  $t_0$ . Тогда состояние  $\mathbf{x}_0$  является наблюдаемым и при  $t = 0$ . Для того чтобы показать это, будем считать  $\mathbf{u}$  заданным элементом из  $U$  и примем, что

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t - t_0), \quad (4.298)$$

где  $\mathbf{v}$  есть элемент  $U$ . В силу наблюдаемости  $\mathbf{x}_0$  при  $t_0$  можно заключить, что существует  $T \geq 0$ , такое, что  $\mathbf{v}_{(t_0, t_0+T]}$  и  $\mathbf{y}_{(t_0, t_0+T]} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0; \mathbf{v}_{(t_0, t_0+T]})$  определяют  $\mathbf{x}_0$ .

Из соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathcal{G}(t; \mathbf{v}_{(t_0, t]}, \mathbf{x}_0) = \\ &= e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (4.299)$$

для  $t$  из  $[t_0, t_0 + T]$  следует, что

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) d\tau \right\} + \mathbf{D}\mathbf{v}(t) \quad (4.300)$$

для  $t$  из  $[t_0, t_0 + T]$ . Если произвести замену переменных  $s = t - t_0$ ;  $\sigma = \tau - t_0$ , то уравнение (4.300) с помощью соотношения (4.298) запишется в виде

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}s} \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_0^s e^{-\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B}\mathbf{u}(\sigma) d\sigma \right\} + \mathbf{D}\mathbf{u}(s) \quad (4.301)$$

для  $s$  из  $[0, T]$ . Следовательно,  $\mathbf{u}_{(0, T]}$  и  $\mathbf{y}_{(0, T]} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0; \mathbf{u}_{(0, T]})$  определяют  $\mathbf{x}_0$ .

Итак, для линейной системы с постоянными параметрами достаточно рассматривать наблюдаемость при  $t = 0$ . Иначе говоря, линейная система с постоянными параметрами наблюдаема в том и только в том случае, когда она наблюдаема при  $t = 0$ .

Если  $\mathbf{x}_0$  наблюдаемо при  $t = 0$ , то знания  $\mathbf{y}_{(0, T]}^0 = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0; 0)$  для некоторого  $T > 0$  достаточно для определения  $\mathbf{x}_0$ . Справедливо и обратное положение. Если мы знаем свободное движение системы, начиная с  $\mathbf{x}_0$  (см. 3.19), то этого достаточно для определения  $\mathbf{x}_0$ , и  $\mathbf{x}_0$  наблюдаемо. Для доказательства этого утверждения заметим, что если  $\mathbf{u}$  есть элемент из  $U$ , то

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{g}(t; \mathbf{u}_{(0, t]}; \mathbf{x}_0) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) = \quad (4.302)$$

$$= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \right\} + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) = \quad (4.303)$$

$$= \mathbf{y}^0(t) + \mathbf{C} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \quad (4.304)$$

Из выражения (4.304) следует, что если  $\mathbf{y}_{(0, T]}^0$  определяет  $\mathbf{x}_0$ , то величины  $\mathbf{u}_{(0, T]}$  и  $\mathbf{y}_{(0, T]}$  определяют  $\mathbf{x}_0$ .

Предположим теперь, что  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}_1$  — два наблюдаемых состояния при  $t = 0$ , причем  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1$ . Если через  $\mathbf{y}_0^0(t)$  и  $\mathbf{y}_1^0(t)$  обозначить выходы системы, начиная с  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}_1$  соответственно, производимые управлением  $\mathbf{u}(\tau) = 0$  ( $\tau$  — любое), то мы знаем, что

$$\mathbf{y}_0^0(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0; \quad (4.305)$$

$$\mathbf{y}_1^0(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_1. \quad (4.306)$$

Существует  $t \geq 0$  (например,  $T$ ), для которого

$$\mathbf{y}_0^0(T) \neq \mathbf{y}_1^0(T). \quad (4.307)$$

Если бы  $\mathbf{y}_0^0(t) = \mathbf{y}_1^0(t)$  для любого  $t \geq 0$ , то знание  $\mathbf{y}_0^0$  на любом интервале  $(0, t]$  не позволило бы определить состояние  $\mathbf{x}_0$ , которое в этом случае ненаблюдаемо. Следовательно, если любое состояние наблюдаемо (для  $t = 0$ ), то преобразование, связывающее каждое из состояний  $\mathbf{x}$  с соответствующей (свободной) выходной функцией  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}$ , будет взаимнооднозначным (см. § 2.4).

Выше указывалось, что множество управляемых состояний является подпространством из  $R_n$ . Справедливо ли это для множества наблюдаемых состояний? Очевидно, что если  $\mathbf{x}_0$  наблюдаемо, то и  $r\mathbf{x}_0$ , где  $r \in R$ , также наблюдаемо. Предположим,  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}_1$  наблюдаемы. Тогда состояние  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$

также наблюдаемо. Прежде чем доказать справедливость этого утверждения, рассмотрим более внимательно, что означает наблюдаемость для линейных систем с постоянными параметрами. В частности справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.6.** Обозначим через  $c'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$   $n$ -мерный вектор-столбец, компонентами которого являются элементы  $i$ -й строки матрицы  $C$ , например

$$c'_i = \begin{bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{bmatrix}, \text{ где } C = (c_{ij}). \quad (4.308)$$

Пусть  $w_{ki}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  есть  $n$ -мерный вектор, заданный как

$$w_{ki} = A'^k c'_i, \quad (4.309)$$

где  $A'^k$  — транспонированная [см. уравнение (2.45)] матрица  $A^k$ . Пусть  $x$  — наблюдаемое состояние и  $r_{ki}$  — действительное число, определенное как

$$r_{ki} = \langle w_{ki}, x \rangle, \quad (4.310)$$

т. е., если  $w_{kij}$  —  $j$ -я компонента  $w_{ki}$  и  $x_j$  —  $j$ -я компонента  $x$ , то

$$r_{ki} = \sum_{j=1}^n w_{kij} x_j. \quad (4.311)$$

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  —  $n$  неизвестных. Рассмотрим систему уравнений

$$r_{ki} = \sum_{j=1}^n w_{kij} X_j; \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad i = 1, \dots, p. \quad (4.312)$$

Тогда  $x$  является единственным решением системы (4.312). С другой стороны, если уравнение (4.312) имеет единственное решение  $X_j = y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , то вектор  $y$  с компонентами  $y_j$  является наблюдаемым состоянием системы.

**Доказательство.** Так как состояние  $x$  наблюдаемо, то существует  $T \geq 0$  такое, что  $y(t) = Ce^{At}x$  на  $[0, T]$  однозначно определяет  $x$ . Тогда  $i$ -я компонента  $y_i(t)$  вектора  $y(t)$  выражается как

$$y_i(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(t) \langle A'^k c'_i, x \rangle = \quad (4.313)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(t) \langle w_{ki}, x \rangle = \quad (4.314)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(t) r_{ki}, \quad (4.315)$$

где  $e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(t) A^k$ , так как  $e^{At} = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{t^M}{M!} A^M$  (см. § 3.21) и любая  $n \times n$  матрица является корнем своего характеристического уравнения [по теореме (2.3)]. По определению  $x$  есть решение уравнения (4.312). Если существует другое решение  $x'$ , то из выражения (4.315) следует, что

$$y(t) = Ce^{At}x' \quad (4.316)$$

на  $[0, T]$  и, следовательно,  $y_{(0, T]}$  не позволяет однозначно определить  $x$ . И так,  $x$  есть единственное решение уравнения (4.312).

Мы предлагаем читателю доказать справедливость обратного утверждения теоремы.

**Следствие 4.8.** Если  $x_0$  и  $x_1$  наблюдаемы, то  $x_0 + x_1$  также наблюдаемо.

**Упражнение 4.17.** Докажите следствие 4.8. У к а з а н и е: Пусть  $\langle w_{k_0}, x_0 \rangle = r_{k_0}$ ;  $\langle w_{k_1}, x_1 \rangle = r_{k_1}$ , тогда  $\langle w_{k_1}, x_0 + x_1 \rangle = r_{k_0} + r_{k_1}$ . Решениями какого уравнения являются компоненты вектора  $x_0 + x_1$ ? Почему они являются единственным решением этого уравнения? Ответ на последний вопрос может быть получен с помощью доказательства от противного.

**Следствие 4.9.** Если  $x$  наблюдаемо, то  $Ce^{At}x$  однозначно определяет  $x$  на любом интервале  $[0, T]$ ,  $T > 0$ .

**Следствие 4.10.** Система полностью наблюдаема в том и только в том случае, если каждый вектор  $x$  есть линейная комбинация векторов  $w_{k_i}$  (см. § 2.5).

**Следствие 4.11.** Подпространство наблюдаемых состояний есть отображение векторов  $w_{k_i}$ . Иначе говоря,  $x_i$  наблюдаемо тогда, когда  $x_0$  есть линейная комбинация  $w_{k_i}$ .

**Следствие 4.12.** Пусть  $H$  —  $n \times n$  матрица, определенная соотношением

$$H = [C' \mid A'C' \mid \dots \mid (A')^{n-1}C']. \quad (4.317)$$

Система полностью наблюдаема в том и только в том случае, когда ранг матрицы  $H$  равен  $n$ , или, что эквивалентно, если в матрице  $H$  имеется  $n$  линейно независимых столбцов. В частности, если  $C$  есть матрица размера  $1 \times n$  (вектор-строка  $c$ , выходом является скалярная функция), то система полностью наблюдаема в том случае, когда  $n \times n$  матрица

$$H = [c' \mid A'c' \mid \dots \mid (A')^{n-1}c'] \quad (4.318)$$

невырожденная (см. следствия 4.5 и 4.6).

**Следствие 4.13.** Если матрица системы  $A$  — диагональная с различными элементами, то система полностью наблюдаема, когда матрица  $C$  не имеет нулевых столбцов (см. следствие 4.7).

Два последних следствия дают простые правила проверки наблюдаемости систем.

**Пример 4.13.** Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \\ y &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.319)$$

Наблюдаема ли она? Так как  $c' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  и  $A'c' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , то система наблюдаема.

**Пример 4.14.** Наблюдаема ли система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.320)$$

$$y = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2? \quad (4.321)$$

Имеем  $c' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  и  $A'c' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Следовательно, система ненаблюдаема.

Если рассмотреть единичную массу, движущуюся без трения, обозначив через  $x_1(t)$  — положение точки, а через  $x_2(t)$  и  $u(t)$  — соответственно ее скорость и приложенную силу, то  $x_1$  и  $x_2$  будут соответствовать уравнению (4.320). Выход  $y$ , представляющий собой скорость точки, может возникнуть в случае наблюдения системы с помощью радара, исполь-

\*

зующего эффект Допплера, который измеряет величину относительной скорости. По скорости можно определить положение, но лишь с точностью до неизвестной постоянной. Этот случай представляет собой один из примеров ненаблюдаемости системы.

**Упражнение 4.18.** Рассмотрите систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u(t); \\ y(t) &= c_1x_1(t) + c_2x_2(t).\end{aligned}$$

Требуется получить условия, при которых система ненаблюдаема и неуправляема. Может ли рассматриваемая система быть одновременно ненаблюдаемой и неуправляемой? Проиллюстрировать результат, подобрав нетривиальные числовые значения. Дать схему модели на АВМ. Объяснить с ее помощью неуправляемость, ненаблюдаемость или то и другое одновременно.

**Упражнение 4.19.** Рассмотрите систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_1 + \omega x_2 + b_1u; \\ \dot{x}_2 &= -\omega x_1 + \alpha x_2 + b_2u; \\ y &= x_1\end{aligned}$$

при  $\omega \neq 0$ . Покажите, что система управляема, за исключением случая, когда  $b_1 = b_2 = 0$ , и что система наблюдаема.

## ФИЗИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ НОРМАЛЬНОСТИ

### 4.18. РЕГУЛИРОВАНИЕ ВЫХОДА

До сих пор мы уделяли мало внимания физическому смыслу понятий управляемости и наблюдаемости. Постараемся исправить такое положение, рассмотрев в этом и двух последующих параграфах некоторые практические стороны приведенных выше понятий. В данном параграфе разберем задачу о регулировании выхода.

Рассмотрим линейную динамическую систему с постоянными параметрами:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad (4.322)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \quad (4.323)$$

В инженерной практике часто представляет интерес перевести выход системы  $\mathbf{y}(t)$  в  $\mathbf{0}$  и удерживать его в этом состоянии при отсутствии дальнейших возмущений. Регулируя выход, мы желаем найти:

- 1) управление, переводящее выход системы  $\mathbf{y}(t)$  в  $\mathbf{0}$ ;
- 2) управление, удерживающее выход в этом состоянии после переходного процесса.

Примем  $t_0 = 0$  и предположим, что мы нашли управление такое, что

$$\mathbf{y}(T) = \mathbf{0}. \quad (4.324)$$

Будем считать нашу систему наблюдаемой, т. е. мы можем вычислить начальное состояние  $\mathbf{x}_0$  при  $t = 0$ . Так как уравнение (4.322) — линейное с постоянными коэффициентами, то выражения (4.324) и (4.323) дают соотношение

$$\mathbf{C} \left\{ e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + e^{\mathbf{A}t} \int_0^T e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \right\} + \mathbf{D}\mathbf{u}(T) = \mathbf{0}. \quad (4.325)$$

Предположим теперь, что система еще и управляема. Это означает, что мы можем найти такое управление  $\mathbf{u}_{(0, T]}$ , при котором  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$ . Если

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \text{ и } \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \text{ для } t > T, \quad (4.326)$$

$$\text{то } \mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \text{ для любого } t \geq T. \quad (4.327)$$

Следовательно, если система полностью управляема и полностью наблюдаема, то можно регулировать ее выход.

Отметим, что управляемость и наблюдаемость дают достаточные условия регулирования выхода, не являясь, конечно, необходимыми. Обнаружить это можно, регулируя выход и определяя такое управление  $\hat{u}(t)$  для  $t > T$ , когда решение уравнения  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , обозначенное через  $\hat{x}(t)$  для  $t \geq T$ , удовлетворяет уравнению

$$C\hat{x}(t) + D\hat{u}(t) = 0, \quad t \geq T, \quad (4.328)$$

Обозначим через  $\hat{H}$  множество  $\hat{x}(T)$ , для которых можно найти управление  $\hat{u}(t)$ . Если система управляема, то можно<sup>1</sup> перевести систему из  $x_0$  в  $\hat{H}$ . Если система неуправляема, то и в этом случае можно найти управление, переводящее  $x_0$  в  $\hat{H}$ .

**Пример 4.15.** Для иллюстрации рассмотрим простую систему второго порядка

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad (4.329)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (4.330)$$

Легко видеть, что система наблюдаема, но не управляема. Пусть  $\xi_1$  и  $\xi_2$  обозначают начальные значения фазовых координат  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Простое интегрирование уравнения (4.329) позволяет получить

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \xi_2 e^{-t}; \\ x_1(t) &= \xi_1 - \xi_2 e^{-t} + \xi_2 + \int_0^t u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.331)$$

Так как система наблюдаема, то  $\xi_1$  и  $\xi_2$  можно вычислить, зная выход  $y(t)$ .

Пусть  $T$  — заданное время и требуется найти такое управление, чтобы  $y(T) = 0$ . Так как  $y(t) = x_1(t)$ , то нужно получить  $x_1(T) = 0$ . Если для любого  $t \geq T$   $x_1(t) = 0$ , то  $y(t) = 0$  также для любого  $t \geq T$ . Эти рассуждения определяют множество  $\hat{H}$  в плоскости состояний  $x_1 x_2$ . Очевидно, таким множеством является вся ось  $x_2$ .

Пусть  $u(t) = k$  является постоянной величиной, тогда при  $t = T$  из уравнения (4.331) получим

$$0 = x_1(T) = \xi_1 - \xi_2 e^{-T} + \xi_2 + kT. \quad (4.332)$$

Это означает, что постоянное управление

$$u(t) = k = \frac{\xi_2 e^{-T} - \xi_1 - \xi_2}{T}, \quad 0 < t \leq T \quad (4.333)$$

переводит выход в нуль при  $t = T$ . Далее задача состоит в том, чтобы удерживать выход в этом состоянии, т. е. удерживать состояние на оси  $x_2$ .

Для  $t > T$  управление

$$u(t) = -x_2(t) = -\xi_2 e^{-t}, \quad t > T \quad (4.334)$$

дает [см. (4.329)]  $\dot{x}_1(t) = 0$  для  $t > T$ , и, следовательно,  $x_1(t) = y(t) = 0$  для  $t > T$ . Итак, мы можем регулировать выход, хотя система и не является управляемой. Аналогичный случай будет рассмотрен в § 4.20, но там мы потребуем, чтобы управление было ограниченным.

Рассмотрим систему (4.329) с выходом

$$y(t) = x_2(t). \quad (4.335)$$

Система (4.329), (4.335) неуправляема и ненаблюдаема. Нетрудно убедиться, что в этом случае регулировать выход нельзя.

Разберем другие примеры, интерпретирующие понятия управляемости и наблюдаемости. При этом отметим, что часто ненаблюдаемость или

<sup>1</sup> В этом случае управляемость означает, что любое состояние достижимо из любого другого состояния.

неуправляемость системы означают, что имеется больше фазовых координат, чем это необходимо. Для иллюстрации рассмотрим физическую систему, показанную на рис. 4.12. Постоянные  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$  — коэффициенты усиления;  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  и  $x_4(t)$  — выходы четырех интеграторов. Выход  $y(t)$  — сумма переменных  $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ .

Нетрудно показать, что вектор

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (4.336)$$

можно рассматривать как вектор состояния, и описать физическую систему, приведенную на рис. 4.12, уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} u(t); \quad (4.337)$$

$$y(t) = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \mathbf{x}(t). \quad (4.338)$$

Читателю легко убедиться, что система, описываемая уравнениями (4.337) и (4.338), неуправляема и ненаблюдаема. В то же время

нетрудно доказать, что выход удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{y}(t) = ky(t) \quad (4.339)$$

где

$$k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4. \quad (4.340)$$

Если  $k \neq 0$ , то нетрудно заметить, что система

$$\dot{z}(t) = kz(t); \quad (4.341)$$

$$y(t) = z(t) \quad (4.342)$$

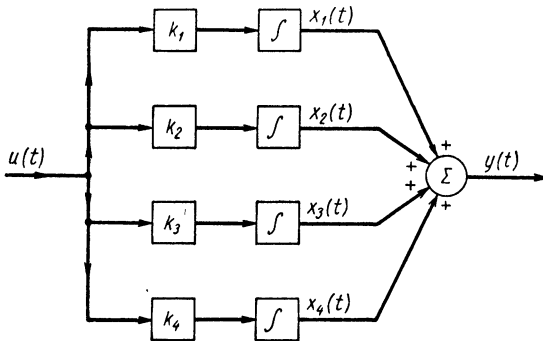


Рис. 4.12. Аналоговая модель физической системы

и управляема, и наблюдаема. Следовательно, выход ее можно регулировать и рассматривать  $z(t) = y(t)$  как состояние системы.

Очевидно, что с точки зрения связи входа с выходом системы (4.337), (4.338) и (4.341), (4.342) эквивалентны. Этот простой пример показывает, что выбор состояния системы и особенно размерности фазового пространства с точки зрения связи выхода со входом системы является весьма существенным. Если же размерность фазового пространства больше, чем это необходимо, то система оказывается неуправляемой и ненаблюдаемой.

В работе [212] содержится строгое изложение этих идей. В работе [35] приведены полезные соотношения для систем, рассматриваемых с точки зрения выхода, с использованием понятия управляемости.

#### 4.19. ЭФФЕКТ СОКРАЩЕНИЯ ПОЛЮСА С НУЛЕМ

В этом параграфе мы покажем, что обычные способы сокращения полюса с нулем, применяемые при проектировании следящих систем, приводят, согласно нашему определению, к неуправляемым системам

(или неполностью управляемым). Рассмотрим систему с различными собственными значениями, фазовые координаты которой удовлетворяют дифференциальным уравнениям [см. уравнение (4.199)]

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t) + v_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.343)$$

где  $v_i$  — вычет передаточной функции  $H(s)$  [уравнение (4.170)] в  $i$ -м полюсе.

Если предположить, что в передаточной функции  $H(s)$  [см. (4.170)]

$$\sigma_1 = s_1, \quad (4.344)$$

т. е. что в точке  $s = s_1 = \sigma_1$  находятся полюс и нуль передаточной функции, тогда уравнение для фазовой координаты  $x_1(t)$  запишется в виде

$$\dot{x}_1(t) = s_1 x_1(t) + v_1 u(t), \quad (4.345)$$

где  $v_1 = \rho_1$ , вычет  $H(s)$  при  $s_1 = \lambda_1$ .

С помощью выражения (4.202) имеем

$$v_1 = \rho_1 = \frac{b_m (\lambda_1 - \sigma_1) (\lambda_1 - \sigma_2) \dots (\lambda_1 - \sigma_m)}{(\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3) \dots (\lambda_1 - \lambda_n)} = 0, \quad (4.346)$$

так как  $\lambda_1 = s_1 = \sigma_1$ .

Итак,

$$\dot{x}_1(t) = s_1 x_1(t), \quad (4.347)$$

и поэтому, согласно следствию 4.7, система неполностью управляема.

#### 4.20. ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

С практической точки зрения управление системой означает, что мы заставили выход изменяться желаемым образом. Имея это в виду, рассмотрим проявления неуправляемости на следующем примере.

Скалярный выход  $y(t)$  связан с ее скалярным входом  $u(t)$  линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t) + u(t). \quad (4.348)$$

Передаточная функция системы имеет вид

$$\frac{y(s)}{u(s)} = H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2}. \quad (4.349)$$

В полученной передаточной функции имеются два полюса и один нуль, все при  $s = -1$ . Следуя порядку, описанному в § 4.10, определим фазовые координаты  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$ , полагая

$$z_1(t) = y(t); \quad (4.350)$$

$$z_2(t) = \dot{y}(t) - u(t).$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.351)$$

Попробуем показать, что система неуправляема. Для проверки этого утверждения образуем матрицу

$$\mathbf{G} = [\mathbf{b}; \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.352)$$



Ее детерминант равен нулю. Используем следствие 4.6, и применим к уравнению (4.351) преобразование подобия, преобразующее матрицу  $A$  в ее каноническую жорданову форму (см. § 2.10). Пусть

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.353)$$

и

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.354)$$

Тогда  $J$  — искомая каноническая форма. Примем, что

$$x = P^{-1}z, \quad (4.355)$$

т. е.

$$x_1(t) = z_1(t) = y(t); \quad (4.356)$$

$$x_2(t) = z_1(t) + z_2(t) = y(t) + \dot{y}(t) - u(t).$$

Новые фазовые координаты  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  удовлетворяют уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.357)$$

Если принять, что  $x_1(0) = \xi_1$ ;  $x_2(0) = \xi_2$ , то решение уравнения (4.357) запишется в виде

$$x_1(t) = \xi_1 e^{-t} + \xi_2 t e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^{\tau} u(\tau) d\tau; \quad (4.358)$$

$$x_2(t) = \xi_2 e^{-t}. \quad (4.359)$$

Теперь попробуем для заданных начальных значений  $\xi_1$  и  $\xi_2$  найти управление, переводящее выход  $y(t)$  в нуль и заставляющее его оставаться равным нулю в дальнейшем.

Итак, мы хотим найти такое управление, чтобы для некоторого  $T$  выполнялось

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 & \text{для } t \geq T; \\ \dot{y}(t) &= 0 & \text{для } t > T. \end{aligned} \quad (4.360)$$

Это требование к выходу эквивалентно требованию к фазовым координатам  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  уравнения (4.356):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0 & \text{для } t \geq T; \\ x_2(t) &= -u(t) & \text{для } t > T. \end{aligned} \quad (4.361)$$

Из выражения (4.358) заключаем, что любое управление  $u(t)$ , удовлетворяющее соотношению

$$-\int_0^T e^{\tau} u(\tau) d\tau = \xi_1 + \xi_2 T, \quad (4.362)$$

действительно переводит  $x_1$  в нуль за время  $T$ , а из выражения (4.359) находим, что управление

$$u(t) = -\xi_2 e^{-t} \quad \text{для } t > T \quad (4.363)$$

обеспечивает выполнение условия  $\dot{y}(t) = 0$  для  $t > T$ . Итак, хотя система и неуправляема, выходную величину и ее производную можно сделать равными нулю.

Наложим ограничения на величину управления в виде

$$|u(t)| \leq M \text{ для любого } t \quad (4.364)$$

(сравните с примером 4.6). Можно ли найти управление, удовлетворяющее ограничению (4.364) и переводящее выход  $y(t)$  и его производную  $\dot{y}(t)$  в нуль? Если  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  и  $T$  таковы, что существует управление  $u(t)$ ,  $|u(t)| \leq M$  такое, что

$$\int_0^T e^t u(t) dt = \xi_1 + \xi_2 T, \quad (4.365)$$

то  $x_1(T)$  будет равно нулю, но  $\xi_2$  может оказаться таким, что

$$|\xi_2 e^{-t}| > M \text{ для } T < t \leq T'. \quad (4.366)$$

Следовательно, не существует управления, удовлетворяющего ограничениям (4.364) и (4.363). Иначе говоря, для таких  $\xi_1$  и  $\xi_2$  выход и его производная не могут быть сделаны равными нулю в течение заданного времени<sup>1</sup>. Аналогичные задачи будут рассмотрены в § 7.13.

#### 4.21. НОРМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ<sup>2</sup>

В этом параграфе мы рассмотрим понятие нормальности. Нормальная система — это такая система, которая является управляемой по отношению к каждой из компонент  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , ...,  $u_m(t)$  управления  $u(t)$ . Мы ограничимся обсуждением случая линейной системы с постоянными параметрами, хотя понятие нормальности может быть определено и в более общем виде. Заметим, что понятие нормальности будет широко использоваться в гл. 6.

Рассмотрим линейную систему с постоянными параметрами

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (4.367)$$

где  $A$  и  $B$  — матрицы, соответственно размера  $n \times n$  и  $n \times m$ . Пусть  $b_\beta$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, m$  обозначает  $n$ -мерный вектор, образующий  $\beta$ -й столбец матрицы  $B$ :

$$b_\beta = \begin{bmatrix} b_{1\beta} \\ b_{2\beta} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n\beta} \end{bmatrix}, \quad B = (b_{i\beta}). \quad (4.368)$$

Иначе говоря,

$$B = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \uparrow & \vdots & \uparrow & \vdots & \vdots & \uparrow \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & \vdots & b_m \\ \hline \downarrow & \vdots & \downarrow & \vdots & \downarrow & \downarrow \end{array} \right]. \quad (4.369)$$

<sup>1</sup> Так как  $u(t)$  ограничено, то существует время  $t^*$  (зависящее от  $\xi_1$  и  $\xi_2$ ), которое величина  $T$  должна превосходить, для того чтобы было возможно решить задачу. Время  $T$  может быть много больше, чем  $t^*$ .

<sup>2</sup> Понятие нормальности было введено в [142] по отношению к системам, оптимальным по быстродействию.

**Определение 4.15. Нормальность.** Говорят, что система (4.367) нормальна, если каждая из систем

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_1 u(t); \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_2 u(t). \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_m u(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.370)$$

полностью управляема (см. определение 4.13), где  $\mathbf{b}_\beta$  — столбцы матрицы  $\mathbf{B}$  из уравнения (4.367) [т. е.  $\mathbf{b}_\beta$  определяются уравнением (4.368)].

Рассмотрим физический смысл этого определения и его связь с управляемостью системы  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ . Для того чтобы ответить на

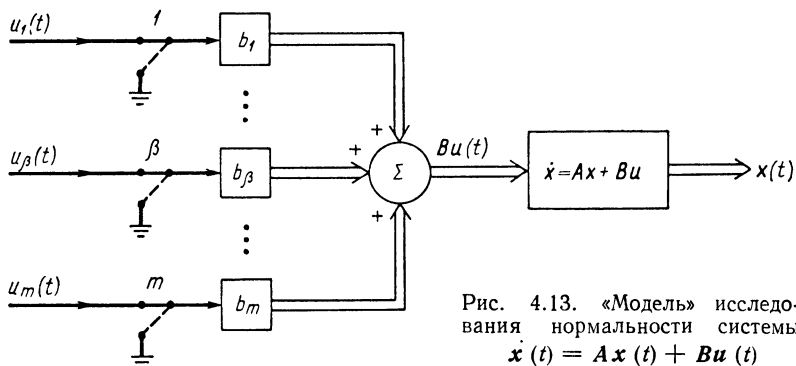


Рис. 4.13. «Модель» исследования нормальности системы  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$

эти вопросы, представим систему в виде, изображенном на рис. 4.13. На рис. 4.13 на каждую из компонент  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$  вектора  $\mathbf{u}(t)$  «действуют» соответствующие «векторы усиления»  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ , в результате чего получаются «векторные сигналы»  $\mathbf{b}_1 u_1(t), \mathbf{b}_2 u_2(t), \dots, \mathbf{b}_m u_m(t)$ . Эти векторные сигналы суммируются и образуют сигнал  $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ . По сути дела, это просто графическое представление уравнения вида

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{u}(t) &= \left[ \begin{array}{c|c|c|c|} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_m \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{b}_1 u_1(t) + \mathbf{b}_2 u_2(t) + \dots + \mathbf{b}_m u_m(t). \end{aligned} \quad (4.371)$$

На рис. 4.13 показано также  $m$  нормально закрытых ключей 1, 2, ...,  $m$ . Каждый ключ, размыкаясь, заземляет соответствующую компоненту вектора  $\mathbf{u}(t)$  независимо от его остальных компонент. Если, например, ключ  $\beta$  разомкнут, то  $u_\beta(t) = 0$  для любого  $t$ .

Если теперь система  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  полностью управляема и все ключи замкнуты, то можно найти скалярные сигналы  $u_{1(0, T)}, u_{2(0, T)}, \dots, u_{m(0, T)}$ , переводящие систему из любого начального состояния  $\mathbf{x}_0$  в  $\mathbf{0}$  в течение времени  $T$ , которое может зависеть от  $\mathbf{x}_0$ .

Предположим, что мы разомкнули все ключи за исключением первого, тогда получим

$$\mathbf{b}_2 u_2(t) = \mathbf{b}_3 u_3(t) = \dots = \mathbf{b}_m u_m(t) = \mathbf{0}. \quad (4.372)$$

На движение системы можно воздействовать только с помощью скалярного управления  $u_1(t)$ . Теперь система описывается уравнением вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_1 u_1(t). \quad (4.373)$$

Необходимо определить, существует ли кусочно-непрерывная функция  $u_1(t)$  для заданной системы (4.373) и начального состояния  $\mathbf{x}_0$  при  $t_0 = 0$ , переводящая систему из  $\mathbf{x}_0$  в  $\mathbf{0}$ . Такое управление существует в силу следствия 4.6 тогда и только тогда, когда система (4.373) управляема, или эквивалентно, если матрица размера  $n \times n$

$$\mathbf{G}_1 = [\mathbf{b}_1; \mathbf{A}\mathbf{b}_1; \dots; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_1] \quad (4.374)$$

невырожденная. Аналогично, если разомкнуть все ключи за исключением  $\beta$ , то система (4.367) запишется в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_\beta u_\beta(t). \quad (4.375)$$

Управление  $u_\beta(t)$ , переводящее систему из  $\mathbf{x}_0$  в  $\mathbf{0}$ , можно найти в том и только в том случае, если  $n \times n$  матрица

$$\mathbf{G}_\beta = [\mathbf{b}_\beta; \mathbf{A}\mathbf{b}_\beta; \dots; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_\beta] \quad (4.376)$$

невырожденная.

Термин «нормальность» означает, что система управляема по каждой из компонент управления и, следовательно, нормальность предполагает, что система полностью управляема. Более того, справедлива следующая теорема:

**Теорема 4.7.** Система  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  нормальна тогда и только тогда, когда

$$\det \mathbf{G}_\beta \neq 0 \text{ для всех } \beta = 1, 2, \dots, m, \quad (4.377)$$

где  $\mathbf{G}_\beta$  — матрица размера  $n \times n$ ,

$$\mathbf{G}_\beta = [\mathbf{b}_\beta; \mathbf{A}\mathbf{b}_\beta; \dots; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_\beta] \quad (4.378)$$

и  $\mathbf{b}_\beta$  —  $\beta$ -й столбец матрицы  $\mathbf{B}$ .

Из примера 4.16 видно, что не каждая управляемая система является нормальной.

**Пример 4.16.** Рассмотрим систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (4.379)$$

где  $a$  — некоторая постоянная величина. Прежде всего система (4.379) управляема при всех значениях  $a$ , потому что матрица  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 & -3a \\ 1 & 2 & -5 & -10 \end{bmatrix}$

содержит два линейно-независимых вектора  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ . Для исследования нормальности системы образуем две матрицы  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  [см. уравнение (4.378)]:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} a & -3a \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad (4.380)$$

где  $\mathbf{G}_1$  всегда невырожденная, тогда как  $\mathbf{G}_2$  невырожденная лишь для  $a \neq 0$ .

Итак, система нормальна лишь при условии  $a \neq 0$ . При  $a = 0$  система (4.379) не является нормальной, но остается управляемой. Нетрудно заметить, что если  $a = 0$  и  $u_1(t) = 0$ , то система (4.379) превращается в систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -3x_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -5x_2(t) + 2u_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.381)$$

В этом случае управлять координатой  $x_1(t)$  с помощью одного только сигнала управления  $u_2(t)$  невозможно.

**УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ. ПРИНЦИП МИНИМУМА  
И УРАВНЕНИЕ ЯКОБИ—ГАМИЛЬТОНА****5.1. ВВЕДЕНИЕ**

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти управление  $u^*$ , минимизирующее заданный функционал преобразования  $J(u)$ <sup>1</sup>. Целью настоящей главы будет развитие некоторых весьма общих условий оптимальности управления  $u^*$ . Мы будем предполагать, что имеется некоторое решение задачи оптимального управления  $u^*$ , и попытаемся сделать из этого некоторые выводы. Эти результаты позволят нам найти способ судить о том, может ли данное управление быть решением поставленной задачи. В последующих главах будет показано, что эти общие условия имеют большее значение для решения практических задач управления.

Так как задача оптимального управления является задачей минимизации, нам придется иметь дело с отысканием экстремумов. Поэтому часть настоящей главы посвящена изучению задач минимизации. При этом имеется в виду получение необходимых условий минимума. Вначале рассматривается обычный минимум, т. е. минимум действительных функций, определенных на евклидовом пространстве  $R_n$ ; затем исследуются минимум функционалов и принцип минимума Понтрягина.

Результаты минимизации используются для получения классического принципа минимума (методами вариационного исчисления) для задачи управления с незакрепленным концом. Этот классический принцип минимума послужит основой развития известного принципа минимума Понтрягина<sup>2</sup>, который и дает необходимые условия оптимальности.

В конце главы рассматриваются условия достаточности, основанные на уравнении Якоби—Гамильтона и принципе оптимальности.

Перед тем как перейти к детальному изучению проблем минимизации, отметим роль, которую играют необходимые условия при практическом отыскании решений. Использование необходимых условий обычно ограничивает количество управлений, которые могут представлять решение поставленной задачи. Далее методом исключения можно определить, какое из управлений является наилучшим. Часто встречается случай, когда существует единственный элемент, удовлетворяющий необходимым условиям. Следовательно, этот элемент и должен быть искомым решением (если он существует). Важность этих замечаний читатель будет все глубже понимать по мере дальнейшего чтения данной книги.

---

<sup>1</sup> См. определение 4.9.

<sup>2</sup> См. сноску на стр. 21.

К материалу V гл. относятся работы [20], [23], [26], [30], [31], [33], [37], [40], [43], [45], [47], [49], [53], [54], [68], [79], [80], [87], [89], [91], [112], [115], [116], [131], [132], [148], [158], [169], [171], [177], [179], [188], [190], [191], [204], [207] и [208].

## 5.2. ОБЫЧНЫЙ МИНИМУМ

Изучение необходимых условий оптимальности мы начнем с рассмотрения теории обычного минимума. Эта теория позволяет решать задачи отыскания точки или точек, в которых некоторая действительная функция  $f$ , определенная на области евклидова пространства  $R_n$ , имеет минимум. Ниже мы дадим точное определение понятий минимума и абсолютного минимума для такой функции  $f$  и опишем некоторые необходимые и достаточные условия для их отыскания. В следующем параграфе будет показано влияние некоторых дополнительных ограничений на эту задачу. Если  $f$  — действительная функция, определенная на всем  $R$ , то имеем следующие два определения.

**Определение 5.1.** Точку  $x^*$  из  $R$  называют (локальным) минимумом функции  $f$ , если существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что при  $|x - x^*| < \varepsilon$

$$f(x^*) \leq f(x). \quad (5.1)$$

Иначе говоря,  $x^*$  есть локальный минимум  $f$ , если  $f(x^*)$  не превышает  $f(x)$  для любого  $x$  в окрестности  $x^*$  (т. е. для  $x$ , близких к  $x^*$ ).

**Определение 5.2.** Точку  $x^*$  из  $R$  называют абсолютным минимумом  $f$ , если

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (5.2)$$

для всех  $x$  из  $R$ .

Очевидно, что абсолютный минимум  $f$  является также локальным минимумом  $f$  и что локальный минимум может не быть абсолютным минимумом (рис. 5.1).

На практике часто представляют интерес действительные функции  $f$ , определенные не на всем  $R$ , а на интервале из  $R$  [см. уравнение (3.7)]. В этом случае понятия минимума и абсолютного минимума полностью аналогичны понятиям, сформулированным в определениях 5.1 и 5.2. Имея в виду эти определения, предположим, что  $f$  — действительная функция, определенная и непрерывная на замкнутом интервале  $[a, b]$ . По теореме 3.7  $f$  может иметь абсолютный минимум на  $[a, b]$ . Попробуем его отыскать.

Прежде всего, если  $x$  — внутренняя точка интервала  $[a, b]$ , т. е.  $x$  принадлежит открытому интервалу  $(a, b)$ , и производная  $f'(x)$  существует и не равна нулю, то точка  $x$  не может быть минимумом  $f$ . Таким образом имеем первое необходимое условие:

1. Если  $x^*$  — внутренняя точка из  $[a, b]$ ,  $f'(x^*)$  существует и  $x^*$  — минимум  $f$ , то

$$f'(x^*) = \frac{df}{dx}(x^*) = 0. \quad (5.3)$$

Точка  $x$ , в которой  $f'(x)$  равна нулю, называется экстремумом функции  $f$ . Можно заключить, что абсолютным минимумом  $f$  могут быть экстремумы  $f$ , конечные точки интервала  $a$  и  $b$  и точки из  $(a, b)$ , в которых производной  $f$  не существует.

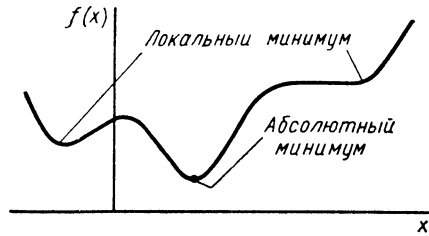


Рис. 5.1. Виды минимумов

Предположим, что  $f'(x)$  — кусочно-непрерывная функция<sup>1</sup>, имеющая конечное число разрывов на  $[a, b]$ . В этом случае имеем второе необходимое условие:

2. Если внутренняя точка  $x^*$  из  $[a, b]$  является минимумом  $f$ , то

$$f'(x^*) = 0 \quad (5.4)$$

или

$$\lim_{x \rightarrow x^*+} f'(x) \geq 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow x^*-} f'(x) \leq 0. \quad (5.4a)^2$$

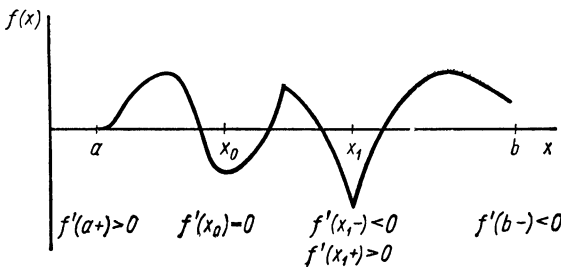
Если  $a$  — минимум  $f$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a+} f'(x) \geq 0; \quad (5.5)$$

и если  $b$  — минимум  $f$ , то

$$\lim_{x \rightarrow b-} f'(x) \leq 0. \quad (5.6)$$

Различные примеры этих условий иллюстрируются с помощью рис. 5.2. С целью лучшего освоения этого понятия целесообразно краткое обоснование необходимого условия 2.



Пусть  $x^*$  — внутренняя точка  $[a, b]$ , являющаяся минимумом  $f$ . При  $t$  достаточно малом

$$0 \leq |t| < \varepsilon \quad (5.7)$$

имеем

$$f(x^* + t) \geq f(x^*). \quad (5.8)$$

Рис. 5.2. К необходимому условию 2

Назовем  $x^* + t$  возмущением  $x^*$ . Если  $f'(x)$  существует, то на основании определения  $f'$  можно написать

$$f(x^* + t) - f(x^*) = tf'(x^*) + 0(t), \quad (5.9)$$

где через  $0(t)$  обозначен поправочный член, обладающий свойством

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{0(t)}{t} = 0. \quad (5.10)$$

Таким образом,  $f(x^* + t)$  приблизительно равна  $f(x^*) + tf'(x^*)$ . Если предположить, что  $f'(x^*)$  положительна, то для  $t < 0$  мы получим, что разность  $f(x^* + t) - f(x^*)$ , равняясь приблизительно  $tf'(x^*)$ , окажется отрицательной. Мы пришли к противоречию, так как  $x^*$  является минимумом  $f$ . Мы предлагаем читателю обосновать утверждение для случая, когда  $f'(x^*)$  не существует.

**Упражнение 5.1.** Необходимо показать, что если  $x^*$  — внутренняя точка из  $[a, b]$ , являющаяся минимумом  $f$ , и  $f'(x^*)$  не существует, то  $\lim_{x \rightarrow x^*+} f'(x) \geq 0$ . У к а з а н и е: Если  $t > 0$ , то

$$f(x^* + t) \geq f(x^*) \text{ и } \frac{f(x^* + t) - f(x^*)}{t} \geq 0.$$

**Упражнение 5.2.** Необходимо показать, что наличие члена  $0(t)$  в уравнении (5.9) не мешает доказательству, т. е. с его учетом предположение  $f'(x^*) > 0$  приводит к противоречию. У к а з а н и е: Если  $f'(x^*) > 0$ , то существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $f'(x^*) > \varepsilon > 0$ . Выбрать  $\delta > 0$

<sup>1</sup> Это означает, что  $f'(x+)$  и  $f'(x-)$  существуют для всех  $x$ , за исключением, возможно, самой этой точки.

<sup>2</sup> См. определение 3.24.

такое, чтобы для  $|t| < \delta$  выполнялось  $\left| \frac{0(t)}{t} \right| < \varepsilon$ , а затем рассмотреть знак  $\frac{f(x^* + t) - f(x^*)}{t}$  для  $-\delta < t < 0$ .

Отметим, что обоснованиями необходимого условия 2 являются:

1) небольшие изменения (возмущения)  $x$  вызывают соответственно малые изменения величины  $f(x)$ ;

2) для малых изменений  $x$  изменение  $f(x)$  можно аппроксимировать членом, зависящим от производной от  $f(x)$ .

Из обоснования необходимых условий 1 и 2 можно заключить, что если  $x^*$  — точка, в которой  $f'(x^*) = 0$ , и производная от  $f$  меняет знак с отрицательного на положительный при переходе через  $x^*$ , то  $x^*$  — минимум  $f$ . Это достаточное условие минимума можно сформулировать следующим образом:

1. Если  $x^*$  — внутренняя точка из  $[a, b]$ , в которой  $f' = 0$ , а  $f''(x^*) > 0$ , то  $x^*$  является локальным минимумом  $f$ .

В настоящее время известны различные достаточные условия минимума, однако в данной книге мы будем пользоваться только достаточным условием 1.

Перейдем к задаче отыскания минимума функции нескольких переменных. Функция  $g$  есть действительная функция, зависящая от вектора  $x$  с компонентами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Вопрос минимизации таких функций сложен, и поэтому мы перечислим только те результаты, которые нам понадобятся в дальнейшем. Для начала сформулируем три определения.

**Определение 5.3.** Точку  $x^*$  из  $R_n$  называют локальным минимумом  $g$ , если существует  $\varepsilon > 0$  такое, что при  $\|x - x^*\| < \varepsilon^1$

$$g(x^*) \leq g(x). \quad (5.11)$$

Точка  $x^*$  есть минимум  $g(x)$ , если  $g(x^*)$  не превосходит  $g(x)$  для всех  $x$ , лежащих в окрестности  $x^*$ .

**Определение 5.4.** Точку  $x^*$  из  $R_n$  называют абсолютным минимумом  $g$ , если

$$g(x^*) \leq g(x) \quad (5.12)$$

для всех  $x$  из  $R_n$ .

Абсолютный минимум  $g$  является локальным минимумом  $g$ , однако локальный минимум не обязательно является абсолютным минимумом. Часто представляет интерес отыскание минимума  $g$  на некотором подмножестве из  $R_n$  и изучение функций, определенных на подмножестве из  $R_n$ , а не обязательно на всем  $R_n$ . В частности, имеем.

**Определение 5.5.** Открытое ограниченное подмножество  $D$  из  $R_n$  называют областью определения, если для любых двух точек  $x_0$  и  $x_1$  из  $D$  существует кусочно-линейная функция [см. уравнение (3.104)]  $\lambda$ , преобразующая  $[0, 1]$  в  $D$ , такая, что  $\lambda(0) = x_0$  и  $\lambda(1) = x_1$  (т. е. в  $D$  существует ломаная линия, соединяющая  $x_0$  и  $x_1$ ), как показано на рис. 5.3. Пусть  $\partial D$  обозначает границу  $D$  (см. определение 3.10) и  $\hat{D}$  — подмножество из  $R_n$  такое, что

$$D \subset \hat{D} \subset D \cup \partial D. \quad (5.13)$$

Точку  $x^*$  из  $\hat{D}$  называют локальным минимумом  $g$  в  $\hat{D}$ , если существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для

$$\tilde{x} \in S(x^*, \varepsilon) \cap \hat{D} \quad (5.14)$$

<sup>1</sup> Напомним, что символ  $\| \quad \|$  обозначает евклидову норму.



имеем

$$g(\mathbf{x}^*) \leq g(\hat{\mathbf{x}}). \quad (5.15)$$

Иначе говоря,  $\mathbf{x}^*$  есть минимум  $g$  в  $\hat{D}$ , если  $g(\mathbf{x}^*)$  не превосходит  $g(\hat{\mathbf{x}})$  для всех  $\hat{\mathbf{x}}$  из  $\hat{D}$ , близких к  $\mathbf{x}^*$ .

Предположим, что  $D$  — заданная область,  $g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  непрерывна на замыкании  $\bar{D} (=D \cup \partial D)$  области  $D$  и что  $g$  имеет непрерывные частные производные по каждой из компонент  $x_1, x_2, \dots, x_n$  вектора  $\mathbf{x}$  в  $D$ . Тогда имеем третье необходимое условие:

3. Если точка  $\mathbf{x}^*$  из  $D$  является минимумом  $g$ , то все частные производные  $g$  в точке  $\mathbf{x}^*$  равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) = \dots = \frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (5.16)$$

или эквивалентно, градиент  $g$  [см. уравнения (3.67) и (3.68)] в точке  $\mathbf{x}^*$  равен нулевому вектору  $\mathbf{0}$ . Это необходимое условие можно рассматривать следующим образом.

Пусть  $\alpha$  — единичный вектор с компонентами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  и  $f(t)$  — функция, определенная как

$$f(t) = g(\mathbf{x}^* + t\alpha). \quad (5.17)$$

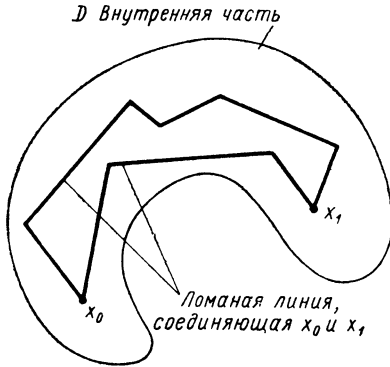


Рис. 5.3. Типичная область

Если  $\mathbf{x}^*$  — минимум  $g$ , то  $0$  является минимумом  $f$  и, следовательно,

$$f'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) \alpha_i = \langle \nabla g(\mathbf{x}^*), \alpha \rangle = 0. \quad (5.18)$$

Так как  $f'(0)$  является не чем иным, как производной  $g$  по направлению  $\alpha$  в точке  $\mathbf{x}^*$  [см. уравнение (3.80)], необходимое условие 3 эквивалентно условию, что производная от  $g$  по любому направлению  $\alpha$  в точке  $\mathbf{x}^*$  обращается в нуль.

Продолжим обоснование необходимого условия 2 несколько дальше. Предположим, что  $g$  имеет непрерывные частные производные второго порядка. В окрестности нуля можно написать

$$f''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^* + t\alpha) \alpha_i \alpha_j. \quad (5.19)$$

Из достаточного условия 1 можно заключить, что  $0$  будет минимумом функции  $f$ , если  $f'(0) = 0$  и

$$f''(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^*) \alpha_i \alpha_j > 0. \quad (5.20)$$

В результате этих рассуждений получаем следующее второе достаточное условие:

2. Если производная от  $g$  по любому из направлений  $\alpha$  в точке  $\mathbf{x}^*$  обращается в нуль и неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^*) \alpha_i \alpha_j > 0 \quad (5.21)$$

выполняется для каждого направления  $\alpha$ , то  $\mathbf{x}^*$  является локальным минимумом  $g$ .

Выражение (5.21) очень похоже на внутреннее произведение (см. § 2.11). Если  $\mathbf{Q}$  — симметричная матрица размера  $n \times n$ , элементами которой являются  $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^*)$ , т. е., если  $\mathbf{Q}$  задается соотношением

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}^*) & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

то можно определить внутреннее произведение  $\mathbf{Q}$  на  $R_n$  с матрицей  $\mathbf{Q}$  [см. уравнение (2.83)] и убедиться в том, что достаточное условие 2 эквивалентно достаточному условию 3.

3. Если градиент  $g$  в точке  $\mathbf{x}^*$  равен  $\mathbf{0}$  и если матрица  $\mathbf{Q}$  (5.22) положительно определена [см. § 2.15 уравнение (2.84)], то  $\mathbf{x}^*$  есть минимум  $g$ .

В частности, если  $g$  — функция на  $R_2$ , то условия

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) = 0; \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^*) > 0; \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^*) \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}^*) - \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}^*) \right]^2 > 0 \quad (5.25)$$

гарантируют, что в точке  $\mathbf{x}^*$  имеет место минимум  $g$ .

Еще раз отметим, что эти условия были получены путем вычисления влияния малых изменений  $\mathbf{x}$  на функцию  $g$  с помощью «производной» (в данном случае — частных производных) от  $g$ . Мы предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть полученные результаты с этой точки зрения.

**Пример 5.1.** Рассмотрим функцию  $g$ , заданную на  $R_2$  в виде  $g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ . Начало координат  $(0, 0)$  есть минимум  $g$ , так как

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = y; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 1$$

и достаточное условие выполняется при  $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ . Отметим, что матрица  $\mathbf{Q}$  по выражению (5.22) в данном случае является единичной матрицей. Функция  $g$ , рассматриваемая как поверхность в  $R_3$ , представляет собой параболоид вращения, показанный на рис. 5.4.

**Пример 5.2.** Рассмотрим функцию  $g$ , определенную на  $R_2$  в виде  $g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}$ .

Производные  $\frac{\partial g}{\partial x}$  и  $\frac{\partial g}{\partial y}$  в начале координат обращаются в нуль, но начало координат не является ни минимумом, ни максимумом функции  $g$ . Матрица  $\mathbf{Q}$  в этом случае имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

и не является ни положительно, ни отрицательно определенной. Функция  $g$ , рассматриваемая как поверхность в  $R_3$ , является гиперболическим параболоидом, как показано на рис. 5.5. Начало координат называют «седловой точкой»  $g$ , или «седлом» (рис. 5.5).

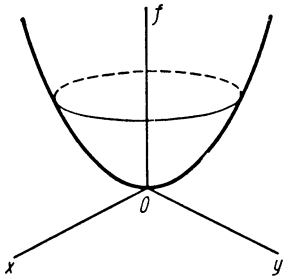


Рис. 5.4. Параболоид к примеру 5.1

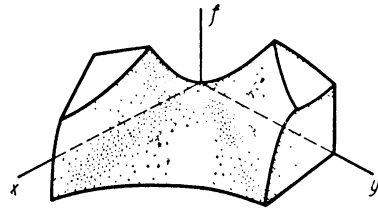


Рис. 5.5. Гиперболический параболоид к примеру 5.2. В начале координат находится особая точка типа «седло»

### 5.3. ОБЫЧНЫЙ МИНИМУМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ. ПРОСТАЯ ЗАДАЧА

В предыдущем параграфе была рассмотрена задача отыскания минимума функции на подмножестве из евклидова пространства  $R_n$ . Теперь мы рассмотрим задачу отыскания минимума функции, на которую накладываются некоторые ограничения. Для того, чтобы подойти к общим результатам, которые будут получены в следующем параграфе, рассмотрим некоторые более наглядные случаи, используя функции на  $R_2$ .

Предположим, что  $f = f(x, y)$  и  $h(x)$  — действительные функции, соответственно определенные на  $R_2$  и  $R$ . Пусть уравнение

$$y = h(x); \quad x \in R \quad (5.26)$$

определяет собой кривую<sup>1</sup> в пространстве  $R_2$ .

Если определить  $g(x, y)$ , положив

$$g(x, y) = y - h(x), \quad (5.27)$$

то уравнение кривой запишется

$$g(x, y) = y - h(x) = 0. \quad (5.28)^2$$

Определим, в каких точках кривой  $y = h(x)$  функция  $f(x, y)$  минимальна? Другими словами, мы хотим найти точки  $(x^*, y^*)$  на кривой [т. е.  $y^* = h(x^*)$ ] такие, что если точка  $(x, y)$  есть точка кривой «вблизи» точки  $(x^*, y^*)$ , то

$$f(x^*, y^*) \leq f(x, y). \quad (5.29)$$

Так как  $y^* = h(x^*)$  и  $y = h(x)$ , уравнение (5.29) можно записать в более наглядном виде:

$$f(x^*, h(x^*)) \leq f(x, h(x)). \quad (5.30)$$

Точку  $x^*, y^*$  называют минимумом  $f$  на кривой  $y - h(x) = 0$ . Используем принцип возмущений для получения необходимого условия минимума  $f$  на кривой  $y - h(x) = 0$ . Пусть точка  $(x^*, y^*)$  является таким ограниченным минимумом, а  $f$  и  $g$  — достаточно гладкие (т. е. дифференцируемые) функции. Если точка  $(x, y)$  «близка» к  $(x^*, y^*)$ , то можно написать

$$x = x^* + \varepsilon \xi_1; \quad y = y^* + \varepsilon \xi_2, \quad (5.31)$$

<sup>1</sup> Эта кривая есть множество точек  $\{(x, y) : y = h(x)\}$  в плоскости  $x, y$  в качестве пространства  $R_2$ .

<sup>2</sup> См. § 3.13. Заметим, что кривая есть множество  $S(g)$ .

где  $\varepsilon$  — малое положительное число и  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  — некоторый вектор. Следовательно,

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + \varepsilon \langle \nabla f(x^*, y^*), \xi \rangle + o(\xi), \quad (5.32)$$

где  $\nabla f(x^*, y^*)$  — градиент  $f$  в точке  $(x^*, y^*)$  [см. уравнение (3.67)] и  $o(\varepsilon)$  — член, зависящий от  $\varepsilon$  и обладающий свойством

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0. \quad (5.33)$$

Если точка  $(x, y)$  не только «близка» к  $(x^*, y^*)$ , но и находится на кривой, то  $y = h(x)$ . Учитывая уравнения (5.31) и то, что  $y^* = h(x^*)$ , имеем:

$$y = h(x) = h(x^* + \varepsilon \xi_1) = h(x^*) + \varepsilon \xi_2 = y^* + \varepsilon \xi_2. \quad (5.34)$$

Но так как значение  $x$  «близко» к  $x^*$ , то можно написать

$$h(x^* + \varepsilon \xi_1) = h(x^*) + \varepsilon \frac{dh}{dx}(x^*) \xi_1 + o(\varepsilon) \quad (5.35)$$

и, следовательно,

$$\xi_2 = \frac{dh}{dx}(x^*) \xi_1. \quad (5.36)$$

(так как  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ ). Итак, для возмущения  $(x^*, y^*)$  вдоль кривой  $y = h(x)$  уравнение (5.32) можно записать в виде

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + \varepsilon \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, y^*} \xi_1 + \varepsilon \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x^*, y^*} \frac{dh}{dx} \Big|_{x^*} \xi_1 + o(\varepsilon). \quad (5.37)$$

Так как  $(x^*, y^*)$  есть минимум  $f$  на кривой,  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ , а  $\xi_1$  может быть как положительным, так и отрицательным, имеем

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \frac{dh}{dx} \Big|_{x^*} = 0. \quad (5.38)$$

Это уравнение — необходимое условие того, что точка  $(x^*, y^*)$  является минимумом  $f$  на кривой  $y = h(x)$ .

Отметим, что при выводе уравнения (5.38) мы рассматривали возмущения вдоль кривой  $y = h(x)$ . Иначе говоря, если  $\xi_1$  было выбрано, то  $\xi_2$  определялось соотношением (5.36). Таким образом, в соответствии с неравенством (5.30) наш результат зависит лишь от одной производной. Результатом этого является ограничение свободы выбора возмущения и, следовательно, уменьшение размерности задачи.

**Упражнение 5.3.** Рассматривая функцию одной переменной  $F(x) = f[x, h(x)]$ , при помощи метода возмущений необходимо получить уравнение (5.38).

Подойдем к уравнению (5.38) несколько иначе. Рассмотрим функцию

$$g(x, y) = y - h(x). \quad (5.39)$$

Ограничение можно записать в виде

$$g(x, y) = 0. \quad (5.40)$$

Заметим, что частная производная

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1 \quad (5.41)$$

нигде на ограничивающей кривой не обращается в нуль. Имеем

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \quad (5.42)^*$$

$$= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{dh}{dx} & 1 \end{bmatrix} = \quad (5.43)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dh}{dx}. \quad (5.44)$$

Левое выражение представляет собой якобиан от  $f$  и  $g$  по отношению к  $x$  и  $y$  [см. уравнение (3.89)]. Следовательно, уравнение (5.38) можно представить в виде

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0. \quad (5.45)$$

Смысл полученного соотношения состоит прежде всего в том, что система уравнений относительно переменной  $p$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} + p \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} &= 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} + p \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

имеет решение  $p = p^*$ . Действительно, так как  $g(x, y) = y - h(x)$ , то

$$p = p^* = -\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} = \text{const} \quad (5.47)$$

является одним таким решением. Заметим, что если

$$G(x, y) = f(x, y) + p^*g(x, y) = f(x, y) + p^*[y - h(x)], \quad (5.48)$$

где  $p^*$  — решение (5.46), то уравнение (5.46) после замены в нем  $p^*$  на  $p$  можно рассматривать как необходимое условие того, что точка  $(x^*, y^*)$  является минимумом  $G(x, y)$ . Иначе говоря, если  $(x^*, y^*)$  является минимумом  $G(x, y)$ , то, как мы уже знаем, частные производные функции  $G$  по  $x$  и по  $y$  в точке  $(x^*, y^*)$  должны быть равны нулю [см. условие (5.16)]. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} &= \frac{\partial}{\partial x} \{f(x, y) + p^*g(x, y)\} \Big|_{(x^*, y^*)} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} + p^* \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0; \\ \frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} &= \frac{\partial}{\partial y} \{f(x, y) + p^*g(x, y)\} \Big|_{(x^*, y^*)} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} + p^* \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0. \end{aligned}$$

\* См. § 3.12.

Итак, необходимым условием того, что точка  $(x^*, y^*)$  является минимумом функции  $f$  при ограничении  $g(x, y) = y - h(x) = 0$ , будет существование числа  $p^*$ , для которого справедливы уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} + p^* \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0; \tag{5.49}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} + p^* \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0; \tag{5.50}$$

$$g(x^*, y^*) = y^* - h(x^*) = 0; \tag{5.51}$$

число  $p^*$  называется множителем Лагранжа.

Несколько обобщим теперь нашу задачу. Предположим, что  $f(x, y)$  — действительная функция, определенная на  $R_2$ , и  $g(x, y)$  — также действительная функция на  $R_2$ , не обязательно вида  $y - h(x)$ . Мы можем попробовать найти необходимые условия минимума  $f$  вдоль кривой  $g(x, y) = 0$ . Предположим, что  $f$  и  $g$  достаточно гладкие (т. е. достаточное число раз дифференцируемые) и что норма градиента  $g$  не равна нулю:

$$\|\nabla g\| = \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} > 0. \tag{5.52}^1$$

Если  $(x^*, y^*)$  есть минимум  $f$  при ограничении  $g(x, y) = 0$ , то существует число  $p^*$ , называемое множителем Лагранжа, такое, что  $x^*$ ,  $y^*$  и  $p^*$  являются решениями системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial g}{\partial x} = 0; \tag{5.53}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + p \frac{\partial g}{\partial y} = 0; \tag{5.54}$$

$$g(x, y) = 0, \tag{5.55}$$

т. е. справедливы соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} + p^* \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0; \tag{5.56}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} + p^* \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0; \tag{5.57}$$

$$g(x^*, y^*) = 0. \tag{5.58}$$

Доказательство этого положения аналогично приведенному выше, и в разъяснении нуждается лишь утверждение (5.52). Это утверждение предполагает, что уравнение  $g(x, y) = 0$  разрешимо относительно одной из переменных  $x$  или  $y$ . Например, если

$$\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} \neq 0, \tag{5.59}$$

то в окрестности  $x^*$  существует функция  $h(x)$ :

$$y^* = h(x^*); \tag{5.60a}$$

$$0 = g[x, h(x)]; \tag{5.60б}$$

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}, \tag{5.60в}$$

<sup>1</sup> Как станет ясно ниже, мы требуем лишь  $\|\nabla g\| > 0$  на кривой  $g(x, y) = 0$ .

т. е. уравнения  $g(x, y) = 0$  и  $y = h(x)$  определяют одну и ту же кривую «вблизи» от  $(x^*, y^*)$ . Необходимость условий с (5.56) по (5.58) мы предлагаем доказать читателю.

**Пример 5.3.** Пусть  $f(x, y) = -xy$  и  $g(x, y) = y + xe^x$ .

Какие точки могут оказаться минимумом  $f$  при ограничении  $g = 0$ ? Можно принять  $h(x) = -xe^x$  и использовать уравнение (5.38). Таким образом, мы должны решить уравнения

$$\begin{aligned} -y + (-x)(-e^x - xe^x) &= 0; \\ y + xe^x &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что только точки  $(0, 0)$  и  $(-2, +\frac{2}{e^2})$  являются решениями этих уравнений и лишь они могут оказаться минимумом  $f$  при ограничении  $g = 0$ . Рассмотрение функции  $x^2e^x$  приводит к заключению, что точка  $(0, 0)$  является минимумом  $f$ , а точка  $(-2, +\frac{2}{e^2})$  — максимумом  $f$  при ограничении  $g = 0$ .

**Пример 5.4.** Пусть  $f(x, y) = -xy$  и  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Необходимо найти, какие точки могут оказаться минимумом  $f$  при ограничении  $g = 0$ ? Прежде всего отметим, что предположение (5.52) в точке  $(0, 0)$  не удовлетворяется. Однако эта точка не принадлежит кривой  $g(x, y) = 0$  и мы можем воспользоваться поэтому необходимыми условиями (5.56)–(5.58). Полагая,

$$G(x, y, p) = -xy + p(x^2 + y^2 - 1),$$

получаем, что мы должны решить уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= -y + 2px = 0; \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= -x + 2py = 0; \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что решениями этих уравнений являются  $(p^* = \frac{1}{2}, x^* = \frac{1}{\sqrt{2}}, y^* = \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(p^* = \frac{1}{2}, x^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y^* = -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(p^* = -\frac{1}{2}, x^* = \frac{1}{\sqrt{2}}, y^* = -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(p^* = -\frac{1}{2}, x^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y^* = \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Таким образом, минимумом  $f$  при ограничении  $g = 0$  могут быть точки  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

**Упражнение 5.4.** Покажите, что точки  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  и  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  действительно являются минимумами в примере 5.4. У к а з а н и е: рассмотрите функцию  $-|x|/\sqrt{1-|x|^2}$ .

#### 5.4. ОБЫЧНЫЙ МИНИМУМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ И МНОЖИТЕЛИ ЛАГРАНЖА

После предварительного рассмотрения экстремальных задач в предыдущих параграфах мы подошли к решению задачи отыскания минимума функции при некоторых ограничениях. Отыскание необходимых условий для этого типа задач весьма тесно связано с понятием множителей Лагранжа, которые будут часто использоваться в дальнейшем. Начнем со строгой постановки задачи, затем с помощью теоремы 5.1 сформулируем необходимые условия и закончим параграф их обсуждением.

Итак, предположим, что  $D$  — заданная область из  $R_n$  (см. определение 5.5),  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — непрерывная действительная функ-

ция на замыкании<sup>1</sup>  $\bar{D}$  и  $g_1(\mathbf{x}) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $g_2(\mathbf{x}) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $g_m(\mathbf{x}) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — непрерывные действительные функции на  $\bar{D}$ . Предположим также, что функции  $g$  независимы, т. е. что множество общих нулей функций  $g$ , или множество всех  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющих условию

$$g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = \dots = g_m(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.61)$$

не может быть определено при меньшем числе функций<sup>2</sup>  $g$ .

**Определение 5.6.** Точку  $\mathbf{x}^*$  из  $\bar{D}$  называют локальным минимумом  $f$  при ограничениях

$$g_1(\mathbf{x}) = 0, g_2(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.62)$$

если, во-первых,

$$g_1(\mathbf{x}^*) = 0, g_2(\mathbf{x}^*) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (5.63)$$

и, во-вторых, существует  $\varepsilon > 0$  такое, что если удовлетворяется условие

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon, \quad (5.64)$$

причем

$$\mathbf{x} \in \bar{D}, \quad (5.65)$$

и

$$g_1(\mathbf{x}) = 0, g_2(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.66)$$

то

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}). \quad (5.67)$$

Таким образом, мы хотим изучать задачу отыскания минимума функции на  $\bar{D}$  при ограничениях  $g_i(\mathbf{x}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Предположим далее, что  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  имеют непрерывные частные производные по всем  $x_j$  в области  $D$ . Потребуем также, чтобы систему уравнений  $g_i(\mathbf{x}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  можно было разрешить относительно  $m$  координат  $x_j$  через  $n - m$  остальных координат. Это условие будет выполнено, если предположить, что везде на  $D$  выполняется неравенство

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} \left[ \frac{\partial (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_m})}{\partial (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})} \right]^2 > 0, \quad (5.68)$$

где под знаком суммы стоят различные якобианы [см. уравнение (3.89)] функций  $g$  по отношению к подмножествам из  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , содержащим  $m$  различных элементов. Отметим, что неравенство (5.68) выполняется в том и только в том случае, когда  $m$  векторов  $(\nabla g_1, \nabla g_2, \dots, \nabla g_m)$  линейно независимы во всех точках  $D$ .

**Пример 5.5.** При  $n = 4$  и  $m = 2$  рассмотрим две функции  $g_1$  и  $g_2$  четырех переменных  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$ . Тогда уравнение (5.68) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial (g_1, g_2)}{\partial (x_1, x_2)} \right]^2 + \left[ \frac{\partial (g_1, g_2)}{\partial (x_1, x_3)} \right]^2 + \left[ \frac{\partial (g_1, g_2)}{\partial (x_1, x_4)} \right]^2 + \\ & + \left[ \frac{\partial (g_1, g_2)}{\partial (x_2, x_3)} \right]^2 + \left[ \frac{\partial (g_1, g_2)}{\partial (x_2, x_4)} \right]^2 + \left[ \frac{\partial (g_1, g_2)}{\partial (x_3, x_4)} \right]^2 > 0. \end{aligned}$$

Если  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$  — точка, удовлетворяющая уравнениям ограничений  $g_1(\mathbf{x}^*) = 0$ ,  $g_2(\mathbf{x}^*) = 0$ , то один из якобианов  $\frac{\partial (g_1, g_2)}{\partial (x_i, x_j)}$  должен быть не равен нулю в точке  $\mathbf{x}^*$ . Пусть  $\frac{\partial (g_1, g_2)}{\partial (x_1, x_2)} \Big|_{\mathbf{x}^*} \neq 0$ . Это означает, что в окрестности двумерного век-

<sup>1</sup> См. определение 3.9.

<sup>2</sup> См. § 3.13.



тора  $(x_3^*, x_4^*)$  мы можем разрешить уравнения ограничений относительно  $x_1$  и  $x_2$ , выразив их через  $x_3$  и  $x_4$ , т. е. существуют функции  $h_1(x_3, x_4)$  и  $h_2(x_3, x_4)$  такие, что

$$\begin{aligned} \text{а) } x_1^* &= h_1(x_3^*, x_4^*), \quad x_2^* = h_2(x_3^*, x_4^*); \\ \text{б) } g_1[h_1(x_3, x_4), h_2(x_3, x_4), x_3, x_4] &= 0; \\ g_2[h_1(x_3, x_4), h_2(x_3, x_4), x_3, x_4] &= 0; \\ \text{в) } \frac{\partial h_1}{\partial x_3} &= -\frac{\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_3, x_2)}}{\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)}}; \quad \frac{\partial h_1}{\partial x_4} = -\frac{\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_4, x_2)}}{\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)}}; \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_3} &= -\frac{\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_3)}}{\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)}}; \quad \frac{\partial h_2}{\partial x_4} = -\frac{\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_4)}}{\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)}}. \end{aligned}$$

Функции  $h_1$  и  $h_2$  представляют собой местные «решения» уравнений  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = 0$  для двух переменных  $x_1$  и  $x_2$  в выражении через  $x_3$  и  $x_4$ .

**Упражнение 5.5.** Пусть  $g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  и  $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 + x_3^2 + x_4^2$ .

Можно ли разрешить уравнения  $g_1 = 0$  и  $g_2 = 0$  относительно  $x_1$  и  $x_2$ , выразив их через  $x_3$  и  $x_4$  «вблизи» начала координат? Можно ли выразить  $x_3$  и  $x_4$  через  $x_1$  и  $x_2$ ? Получите решения в тех случаях, когда они существуют.

Необходимые условия минимума функции  $f$  при ограничениях  $g_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  в точке  $\mathbf{x}^*$  из  $D$  определяются теоремой.

**Теорема 5.1.** Если  $\mathbf{x}^*$  — точка области  $D$ , в которой  $f$  имеет локальный минимум при ограничениях  $g_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , причем все функции  $f$  и  $g_i$  имеют непрерывные частные производные, то существуют числа  $p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*$ , называемые множителями Лагранжа. В этом случае  $\mathbf{x}^*, p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*$  являются решением системы  $n + m$  уравнений относительно  $n + m$  неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_m$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + p_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \dots + p_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0; \quad (5.69)$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (5.70)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Иначе говоря, справедливы равенства

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}^*} + p_1^* \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}^*} + p_2^* \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}^*} + \dots + p_m^* \left. \frac{\partial g_m}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}^*} = 0; \quad (5.71)$$

$$g_j(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad (5.72)$$

для  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Доказательство этой теоремы, которую мы часто будем использовать в дальнейшем, очень похоже на рассуждения, использовавшиеся ранее при выводе соотношений (5.49)—(5.51), поэтому предлагаем выполнить его самостоятельно<sup>1</sup>.

Рассмотрим теперь, каков смысл теоремы 5.1? Существенно, что она позволяет нам заменить задачу отыскания минимума  $f$  при ограничениях  $g_j = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  задачей отыскания минимума функции

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, p_1, p_2, \dots, p_m) &= \\ &= f(\mathbf{x}) + p_1 g_1(\mathbf{x}) + p_2 g_2(\mathbf{x}) + \dots + p_m g_m(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.73)$$

<sup>1</sup> См. [91].

Для того, чтобы показать это, будем считать  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$   $m$ -мерными векторами с компонентами  $p_1, p_2, \dots, p_m$  и  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$  соответственно. Уравнение (5.73) при этом запишется в виде

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle. \quad (5.74)$$

Необходимыми условиями минимума функции  $G$  в точке  $\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*$  являются

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} \Big|_{(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}^*} + \left\langle \mathbf{p}^*, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}^*} \right\rangle = 0; \quad (5.75)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_j} \Big|_{(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)} = g_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad (5.76)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$  и  $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i}$  —  $m$ -мерный вектор с компонентами  $\frac{\partial g_l}{\partial x_i}$ <sup>1</sup>. Но уравнения (5.75) и (5.76) представляют собой лишь векторную форму записи уравнений (5.71) и (5.72), что и доказывает наше утверждение.

Если мы хотим отыскать абсолютный минимум  $f$  при ограничениях  $g_j = 0, j = 1, 2, \dots, m$  на  $\bar{D}$ , то теорема 5.1 устанавливает, что абсолютный минимум может иметь место в тех точках из  $D$ , в которых выполняются условия (5.71) и (5.72), а также в точках границы  $D$ , удовлетворяющих уравнениям ограничений.

Такая задача, как отмечалось в § 5.2, является типичной задачей отыскания минимума.

**Упражнение 5.6.** Найти минимум  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$  при ограничениях

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i - 1 = 0, \quad a_i > 0 \text{ на множестве } x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0.$$

### 5.5. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Перед началом изучения функциональных минимумов и вариационных подходов их определения мы хотели бы дать эвристический обзор результатов и способов, полученных для обычных задач отыскания минимума. В этом обзоре рассматриваются основные идеи в задачах обычной минимизации (см. § 5.2—5.4) и приводятся обоснования некоторых методов, которые будут использованы при обсуждении минимизации функционалов.

В § 5.2—5.4 мы рассматривали задачу отыскания минимума действительной функции  $f$ , определенной на области  $A$  евклидова пространства  $R_n$ . Мы обычно предполагали, что  $f$  непрерывна и что подмножество  $A$  из  $R_n$  компактно (см. § 3.6). Эти предположения служат гарантией, что задача имеет решение, т. е. что минимум  $f$  на  $A$  существует. Затем мы отыскивали точки, в которых может иметь место абсолютный минимум  $f$  на  $A$ , а для того, чтобы облегчить этот поиск, получили необходимые условия, основанные на методе возмущений. В нем используется то положение, что «производная» является наилучшей линейной аппроксимацией функции (см. § 3.12). Мы установили, что локальный минимум может иметь место только при следующих условиях:

- 1) в точках границы  $A$ ;
- 2) в точках, в которых производная  $f$  не существует;
- 3) в тех внутренних точках  $A$ , где производная  $f$  обращается в нуль.

<sup>1</sup> См. уравнение (5.16).

Точки, в которых производная  $f$  обращается в нуль, называют точками экстремума функции  $f$ , и полученные необходимые условия фактически являются условиями экстремума.

Рассмотрим теперь некоторое обобщение задачи<sup>1</sup>. Предположим, что  $V$  — векторное пространство (см. § 2.5) с функцией расстояния  $d$  (см. § 3.2), полученной из нормы  $\| \cdot \|$  на  $V$ . Иначе говоря, предположим, что существует действительная функция  $\| \cdot \|$ , определенная на  $V$  и обладающая свойствами:

1)  $\| \mathbf{v} \| \geq 0$  для всех  $\mathbf{v}$  из  $V$  и  $\| \mathbf{v} \| = 0$  в том и только в том случае, если  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ;

2)  $\| \mathbf{v} + \mathbf{w} \| \leq \| \mathbf{v} \| + \| \mathbf{w} \|$  для всех  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  из  $V$ ;

3)  $\| r\mathbf{v} \| = |r| \| \mathbf{v} \|$  для всех  $\mathbf{v}$  из  $V$  и  $r$  из  $R$ .

Расстояние  $d$  на  $V$  определено соотношением

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \| \mathbf{v} - \mathbf{w} \| \quad (5.77)$$

для  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  из  $V$ .

Мы предлагаем читателю проверить, что  $d$  действительно определяет расстояние на  $V$  и что это понятие расстояния совместимо с понятиями суммы и произведения на  $V$ :

1. Если заданы элементы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  из  $V$  и последовательности  $\{\mathbf{v}_k\}$  и  $\{\mathbf{w}_k\}$  из  $V$ , сходящиеся соответственно к  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ , то последовательность  $\{\mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k\}$  сходится к  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ , т. е.

$$d(\mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \rightarrow 0. \quad (5.78)$$

2. Если заданы элементы  $\mathbf{v}$  из  $V$  и  $r$  из  $R$  и последовательности  $\{\mathbf{v}_k\}$  из  $V$ , сходящиеся к  $\mathbf{v}$ , и  $r_k$  из  $R$ , сходящаяся к  $r$ , то последовательность  $\{r_k \mathbf{v}_k\}$  сходится к  $r\mathbf{v}$ , т. е.

$$d(r_k \mathbf{v}_k, r\mathbf{v}) \rightarrow 0. \quad (5.79)$$

**Упражнение 5.7.** Требуется доказать, что функция  $d$  [уравнение (5.77)] определяет расстояние на  $V$ , удовлетворяющее условиям (5.78) и (5.79).

Функциональные пространства  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{P}$  и  $\mathfrak{C}$ , введенные в § 3.15, являются векторными пространствами этого типа. Если  $A$  есть подмножество из  $V$ , обладающее тем свойством, что для любой заданной последовательности  $\mathbf{a}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  в  $A$  существует подпоследовательность  $\mathbf{a}_{k_1}, \mathbf{a}_{k_2}, \dots$ , сходящаяся к элементу из  $A$  (сравните со свойством 4 в § 3.6), то подмножество  $A$  компактно. Наконец, полагая, что  $J$  — некоторый функционал, заданный на множестве  $A$  (которое может быть компактным или нет), можно дать следующее определение.

**Определение 5.7.** Вектор  $\mathbf{a}^*$  из  $A$  называют локальным минимумом  $J$ , если для любого  $\mathbf{a}$  из  $A$ , достаточно «близкого» к  $\mathbf{a}^*$ , удовлетворяется неравенство

$$J(\mathbf{a}^*) \leq J(\mathbf{a}). \quad (5.80)$$

Если  $A$  компактно (см. теорему 3.7), то  $J$  имеет на  $A$  абсолютный минимум. Попытаемся найти точки, которые можно рассматривать в качестве потенциальных точек абсолютного минимума.

Сосредоточим свое внимание на внутренней точке  $\mathbf{a}^*$  из  $A$  и попытаемся использовать метод возмущений. Для начала нам необходимо ввести понятие производной для того, чтобы затем аппроксимировать  $J(\mathbf{a})$  вблизи  $\mathbf{a}^*$  с помощью функции вида

$$J(\mathbf{a}^*) + \mathfrak{L}(\mathbf{a} - \mathbf{a}^*), \quad (5.81)$$

где  $\mathfrak{L}$  — линейное (непрерывное) преобразование  $V$  в  $R$  (см. § 3.12)<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Сравните это с § 3.15.

<sup>2</sup> Т. е.  $\mathfrak{L}$  представляет собой элемент пространства  $V^*$ , сопряженного к  $V$ , и, следовательно, является линейным функционалом на  $V$  (см. упражнение 2.11).

Если

$$\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}^*} \frac{|J(\mathbf{a}) - J(\mathbf{a}^*) - \mathfrak{L}(\mathbf{a} - \mathbf{a}^*)|}{\|\mathbf{a} - \mathbf{a}^*\|} = 0, \quad (5.82)$$

то линейное преобразование  $\mathfrak{L}$  называют производной  $J$  в точке  $\mathbf{a}^*$  и записывают:

$$\mathfrak{L} = \delta J(\mathbf{a}^*). \quad (5.83)$$

Выражение  $\delta J(\mathbf{a}^*)$  часто называют первой вариацией  $J$  в точке  $\mathbf{a}^*$ . Отметим, что  $\delta J(\mathbf{a}^*)$  вновь будет функционалом на  $V$  и, следовательно,  $\delta J(\mathbf{a}^*)$  является линейным преобразованием  $V$  в  $R$ .

Если  $\mathbf{v}$  — ненулевой вектор из  $V$  и  $\varepsilon$  — некоторое действительное число, то  $\mathbf{a}^* + \varepsilon\mathbf{v}$  называют возмущением или вариацией  $\mathbf{a}^*$  по направлению  $\mathbf{v}$ . Если  $\delta J(\mathbf{a}^*)$  существует, то можно написать

$$\begin{aligned} J(\mathbf{a}^* + \varepsilon\mathbf{v}) &= J(\mathbf{a}^*) + \delta J(\mathbf{a}^*)[\varepsilon\mathbf{v}] + \circ(\varepsilon) = \\ &= J(\mathbf{a}^*) + \varepsilon\delta J(\mathbf{a}^*)\mathbf{v} + \circ(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.84)$$

где  $\circ(\varepsilon)$  обладает свойством

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\circ(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0. \quad (5.85)$$

Если  $\mathbf{a}^*$  — минимум  $J$  и

$$F(\varepsilon) = J(\mathbf{a}^* + \varepsilon\mathbf{v}), \quad (5.86)$$

то при  $\varepsilon = 0$  имеет место минимум действительной функции  $F(\varepsilon)$ , и можно заключить, что

$$\left. \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|J(\mathbf{a}^* + \varepsilon\mathbf{v}) - J(\mathbf{a}^*)|}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \delta J(\mathbf{a}^*)\mathbf{v} + \frac{\circ(\varepsilon)}{\varepsilon} \right| = \\ &= |\delta J(\mathbf{a}^*)\mathbf{v}| = 0. \end{aligned} \quad (5.87)^1$$

Так как  $\mathbf{v}$  — любой ненулевой вектор из  $V$ , то

$$\delta J(\mathbf{a}^*) = 0. \quad (5.88)$$

Это условие является точной аналогией необходимых условий, полученных для функций одной или нескольких переменных. Его смысл станет более понятен из последующих параграфов. Итак, вновь заключаем, что локальный минимум  $J$  может иметь место лишь:

- 1) в точках границы  $A$ ;
- 2) в точках, где не существует производной  $J$ ;
- 3) в тех внутренних точках  $A$ , где производная (первая вариация)  $J$  обращается в нуль.

**Пример 5.6.** Пусть  $\varphi(x)$  — непрерывно дифференцируемая действительная функция на  $R$  и  $J$  — действительная функция, определенная на функциональном пространстве  $\mathfrak{F}([0, 1], R)$  всех кусочно-непрерывных функций<sup>2</sup> из  $[0, 1]$  в  $R$  с помощью соотношения

$$J(u) = \int_0^1 \varphi[u(t)] dt.$$

<sup>1</sup> Напомним, что  $\delta J(\mathbf{a}^*)$  — линейное преобразование  $V$  в  $R$  и поэтому  $\delta J(\mathbf{a}^*)\mathbf{v}$  — действительное число, поскольку  $\mathbf{v}$  — элемент из  $V$ .

<sup>2</sup> См. § 3.15.

Если  $u^*$  — элемент из  $\mathfrak{F}([0, 1], R)$  и  $u^* + \varepsilon v$  — возмущение, или вариация  $u^*$ , то

$$\begin{aligned} J(u^* + \varepsilon v) &= \int_0^1 \varphi[u^*(t) + \varepsilon v(t)] dt = \int_0^1 \left\{ \varphi[u^*(t)] + \varepsilon \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{u^*(t)} v(t) + o(\varepsilon) \right\} dt = \\ &= J(u^*) + \varepsilon \int_0^1 \varphi'[u^*(t)] v(t) dt + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Если при  $u^*$  имеет место локальный минимум  $J$ , то

$$\int_0^1 \varphi'[u^*(t)] v(t) dt = 0$$

для всех  $v$  из  $\mathfrak{F}([0, 1], R)$ . Отметим, что линейное преобразование  $\mathfrak{L}$  из  $\mathfrak{F}([0, 1], R)$  в  $R$ , определенное соотношением

$$\mathfrak{L}(v) = \int_0^1 \varphi'[u^*(t)] v(t) dt,$$

является линейным и непрерывным и представляет собой вариацию  $\delta J(u^*)$ .

**Упражнение 5.8.** Пусть  $\varphi(x, y)$  — непрерывно дифференцируемая действительная функция на  $R_2$  и  $J$  — действительная функция, определенная на функциональном пространстве  $\mathfrak{F}([0, 1], R_2)$  [см. (3.136)] соотношением

$$J(u) = \int_0^1 \varphi[u_1(t), u_2(t)] dt \quad u \in \mathfrak{F}([0, 1], R_2),$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — компоненты  $u$ . Покажите, что если  $u^*$  — минимум  $J$ , то

$$\int_0^1 \langle \nabla \varphi[u^*(t)], v(t) \rangle dt = 0$$

для всех  $v$  из  $\mathfrak{F}([0, 1], R_2)$ , где  $\nabla \varphi$  обозначает градиент  $\varphi$ .

В § 5.2 мы видели, что вторая производная играет важную роль при определении, какой из экстремумов является минимумом.

Обобщим эти положения. Во-первых, будем называть  $a^*$  экстремумом  $J$ , если

$$\delta J(a^*) = 0. \quad (5.89)$$

Во-вторых, будем говорить, что функционал  $J$  имеет вторую производную в точке  $a^*$ , если существует внутреннее произведение  $P$  (см. § 2.11) на  $V$  такое, что

$$\begin{aligned} J(a) - J(a^*) &= \delta J(a^*)(a - a^*) + P(a - a^*, a - a^*) + \\ &+ o(\|a - a^*\|^2) \end{aligned} \quad (5.90)$$

для всех  $a$ , «близких» к  $a^*$ . Квадратичная форма, образованная внутренним произведением  $P$  (см. § 2.11), является функционалом на  $V$  и называется второй производной, или второй вариацией  $J$  в точке  $a^*$ . Будем обозначать ее в виде  $\delta^2 J(a)$ . Итак,

$$J(a) - J(a^*) = \delta J(a^*)(a - a^*) + \delta^2 J(a^*)(a - a^*) + o(\|a - a^*\|^2), \quad (5.91)$$

где

$$\delta^2 J(a^*)(a - a^*) = P(a - a^*, a - a^*). \quad (5.92)$$

Если  $v$  — некоторый ненулевой вектор из  $V$  и  $\varepsilon$  — малое действительное число, то, предполагая, что  $\delta J(a^*)$  и  $\delta^2 J(a^*)$  существуют, имеем

$$J(a^* + \varepsilon v) = J(a^*) + \varepsilon \delta J(a^*)v + \varepsilon^2 \delta^2 J(a^*)v + o(\varepsilon^2), \quad (5.93)$$

где  $\circ(\varepsilon^2)$  обладает свойством

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\circ(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} = 0. \quad (5.94)$$

Если  $\mathbf{a}^*$  есть минимум  $J$ , то

$$\delta J(\mathbf{a}^*) = \mathbf{0}, \quad (5.95)$$

и уравнение (5.93) превращается в

$$J(\mathbf{a}^* + \varepsilon \mathbf{v}) = J(\mathbf{a}^*) + \varepsilon^2 \delta^2 J(\mathbf{a}^*) \mathbf{v} + \circ(\varepsilon^2). \quad (5.96)$$

Так как  $\varepsilon^2 > 0$  и членом  $\circ(\varepsilon^2)$  можно пренебречь, то

$$J(\mathbf{a}^* + \varepsilon \mathbf{v}) - J(\mathbf{a}^*) \geq 0, \quad (5.97)$$

откуда

$$\delta^2 J(\mathbf{a}^*) \mathbf{v} \geq 0 \quad (5.98)$$

для всех  $\mathbf{v}$  и, следовательно, внутреннее произведение  $P$  [выражение (5.90)] должно быть положительным [см. уравнение (2.84)]. Таким образом, выражение (5.98) представляет собой еще одно необходимое условие того, что  $\mathbf{a}^*$  является минимумом  $J$ . Значение этого условия станет ясным из § 5.7. Наконец, если квадратичная форма, образованная внутренним произведением  $P$  на пространстве  $V$ , положительно определена, т. е. существует  $\alpha > 0$  такое, что

$$P(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|^2 \quad (5.99)^1$$

для всех  $\mathbf{v}$  из  $V$ , то можно показать, что положительной определенности  $\delta^2 J(\mathbf{a}^*)$  вполне достаточно, чтобы экстремум  $\mathbf{a}^*$  функционала  $J$  являлся локальным минимумом  $J$ .

**Пример 5.7.** Пусть  $\varphi(x)$  дважды непрерывно-дифференцируемая действительная функция на  $R$  и  $J$  — действительная функция, определенная на функциональном пространстве  $\mathfrak{F}([0, 1], R)$  всех кусочно-непрерывных функций, преобразующих  $[0, 1]$  в  $R$ :

$$J(u) = \int_0^1 \varphi[u(t)] dt; \quad u \in \mathfrak{F}([0, 1], R).$$

Если  $u^* \in \mathfrak{F}([0, 1], R)$  и  $u = u^* + \varepsilon v$  — вариация  $u^*$ , то

$$\begin{aligned} J(u^* + \varepsilon v) &= \int_0^1 \varphi[u^*(t) + \varepsilon v(t)] dt = \\ &= \int_0^1 \left\{ \varphi[u^*(t)] + \varepsilon \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{u^*(t)} v(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \Big|_{u^*(t)} v^2(t) + \circ(\varepsilon^2) \right\} dt = \\ &= J(u^*) + \varepsilon \int_0^1 \varphi' [u^*(t)] v(t) dt + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^1 \varphi'' [u^*(t)] v^2(t) dt + \circ(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Если  $u^*$  — локальный минимум  $J$ , то  $\int_0^1 \varphi' [u^*(t)] v(t) dt = 0$  для всех  $v$  из  $\mathfrak{F}([0,$

$$1], R)$$
 и  $\int_0^1 \varphi'' [u^*(t)] v^2(t) dt \geq 0$

для всех  $v$  из  $\mathfrak{F}([0, 1], R)$ . Отметим, что преобразование  $\mathfrak{A}$ , определенное соотношением

$$\mathfrak{A}(v) = \int_0^1 \varphi' [u^*(t)] v(t) dt,$$

<sup>1</sup> Сравните с § 2.15.

является линейным и непрерывным [оно представляет собой  $\delta J(u^*)$ ]. Функция  $P$  из  $\mathfrak{F}([0, 1], R) \times \mathfrak{F}([0, 1], R)$  в  $R$ , определенная соотношением

$$P(v, w) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi''[u^*(t)] v(t) w(t) dt,$$

есть внутреннее произведение на  $\mathfrak{F}([0, 1], R)$  [квадратичная форма, образованная  $P$  и представляющая собой  $\delta^2 J(u^*)$ ].

## 5.6. ПРИМЕР

Рассмотрим одну частную задачу управления. Так как она является первой задачей минимизации функционалов, мы будем решать ее очень подробно и постараемся с ее помощью проиллюстрировать и обосновать методы, которые используются в дальнейшем для получения общих результатов. Начнем с постановки задачи. Рассмотрим динамическую систему первого порядка вида

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \quad (5.100)$$

с интервалом определения  $(-\infty, +\infty)$ . Будем считать, что любая ограниченная по величине кусочно-непрерывная функция из  $(-\infty, +\infty)$  в  $R$  является допустимым управлением, т. е., что наша задача относится к задачам без ограничений (см. § 4.13). Пусть  $L(x, u)$  — непрерывная функция, определенная соотношением

$$L(x, u) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} u^2, \quad (5.101)$$

и  $K(x, t)$  — функция, тождественно равная нулю, т. е.

$$K(x, t) \equiv 0. \quad (5.102)$$

Примем  $t_0 = 0$ ; пусть

$$x(0) = 1 \quad (5.103)$$

является начальным состоянием системы, а множество  $S$  — конечным состоянием системы, представляющим собой подмножество из  $R$ . Рассмотрим случай, когда  $S$  состоит из единственной точки  $(0, T)$ , т. е. мы хотим попасть в точку  $x = 0$  через заданное время  $t = T$ . Таким образом, множество  $S$  дается соотношением

$$S = \{(x(T), T) : x(T) = 0\}. \quad (5.104)$$

Итак, мы рассматриваем задачу с закрепленным концом и с фиксированным временем (см. § 4.13). Функционал преобразования  $J(u)$  определяется соотношением

$$J(u) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} x^2(t) + \frac{1}{2} u^2(t) \right] dt, \quad (5.105)$$

где  $x(t)$  — фазовая траектория, удовлетворяющая уравнению (5.100), исходящая из  $x(0) = 1$  и произведенная<sup>1</sup> управлением  $u(t)$ .

<sup>1</sup>  $x(t)$  — траектория движения системы, представляющая собой решение дифференциального уравнения (5.100), когда  $u(t)$  имеет вполне определенный вид.

Можно сформулировать задачу следующим образом. Найти допустимое управление  $u(t)$ , переводящее  $x(0) = 1$  в  $x(T) = 0$  и минимизирующее функционал преобразования  $J(u)$ .

Прежде всего мы видим, что эта задача подобна общей задаче, обсуждавшейся в предыдущем параграфе. Пространство  $V$  представляет собой  $\mathfrak{F}([0, T], R)$  — множество всех кусочно-непрерывных функций на  $[0, T]$  (см. § 3.15); подмножество  $A$  — совокупность управлений  $u$ , переводящих  $x(0) = 1$  в  $x(T) = 0$ . Имеется, однако, дополнительное ограничение, а именно: уравнение системы (5.100). Как увидим далее, для учета этого ограничения используется способ, очень похожий на метод множителей Лагранжа § 5.4. Отметим, что заранее не известно, существует ли решение задачи<sup>1</sup>. Мы просто получим необходимые условия оптимума и затем укажем, что требуется еще доказать его существование. В данной задаче такая необходимость существует.

Определим теперь необходимые условия, которым должно удовлетворять оптимальное управление. Для наглядности мы будем излагать материал последовательными частями, нумеруя каждый шаг и сопровождая его эвристическими разъяснениями.

**Шаг 1. Предположение существования оптимума.** Для того чтобы получить необходимые условия, которым должно удовлетворять оптимальное управление, предположим, что оптимальное управление существует<sup>2</sup>. Итак, считаем, что  $u^*(t)$  — оптимальное управление и  $x^*(t)$  — соответствующая ему оптимальная траектория. Иначе говоря,  $x^*(t)$  и  $u^*(t)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$1) \dot{x}^*(t) = -x^*(t) + u^*(t); \quad (5.106)$$

$$2) x^*(0) = 1, \quad x^*(T) = 0; \quad (5.107)$$

3) если  $u(t)$  — любое допустимое управление, такое, что соответствующая ему траектория  $x(t)$  удовлетворяет условиям 1 и 2, т. е.

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 1, \quad x(T) = 0, \quad (5.108)$$

то

$$\begin{aligned} J^* = J(u^*) &= \frac{1}{2} \int_0^T [x^{*2}(t) + u^{*2}(t)] dt \leq \\ &\leq J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [x^2(t) + u^2(t)] dt. \end{aligned} \quad (5.109)$$

В дальнейшем все оптимальные величины мы будем отмечать звездочкой справа сверху.

По определению решения дифференциального уравнения (определение 3.41) любая кусочно-непрерывная функция, отличающаяся от  $u^*(t)$  лишь в счетном подмножестве точек на  $[0, T]$ , является оптимальным управлением. Для математической строгости мы часто к нашим утверждениям должны добавлять фразу «за исключением, возможно, счетного множества точек из  $[0, T]$ »; или мы должны говорить об эквивалентных классах функций, как в § 3.15. Однако мы, обратив внимание читателя на это обстоятельство, в дальнейшем будем опускать эти математические тонкости.

**Шаг 2. Возмущение.** Как и при рассмотрении обычного минимума, для получения необходимых условий будем использовать метод возму-

<sup>1</sup> В положении такого типа трудно определить, является ли  $A$  компактным. Даже в том случае, когда  $A$  не является компактным, задача может иметь решение.

<sup>2</sup> Оптимальных управлений может быть несколько или не быть ни одного.



щений. Давая малые приращения  $u^*(t)$ , найдем условия, которым должно удовлетворять возмущение. Положим, что

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon \eta(t), \quad (5.110)$$

где  $\eta(t)$  — кусочно-непрерывная функция на  $[0, T]$  является возмущением, или вариацией  $u^*(t)$ . Часто записывают

$$u(t) = u^*(t) + \delta u^*(t) \quad (5.111)$$

и называют

$$\delta u^*(t) = \varepsilon \eta(t) \quad (5.112)$$

вариацией  $u^*(t)$ .

Если  $x(t)$  — траектория, производимая управлением  $u(t)$ , то в силу аксиомы 4.3 и определения динамической системы (см. § 4.5) можно написать

$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon \psi(t), \quad (5.113)$$

причем  $\psi(t)$  ограничена на  $[0, T]$ . Другими словами, малая вариация управления дает малую вариацию движения системы. Так как  $x(t)$  — решение уравнения (5.100), имеем

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) = \quad (5.114)$$

$$= -x^*(t) - \varepsilon \psi(t) + u^*(t) + \varepsilon \eta(t); \quad (5.115)$$

из уравнения (5.113) найдем

$$\dot{x}(t) = \dot{x}^*(t) + \varepsilon \dot{\psi}(t). \quad (5.116)$$

Следовательно,

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t) + \eta(t) \quad (5.117)$$

или, эквивалентно,

$$\frac{d}{dt} \{\delta x^*(t)\} = -\delta x^*(t) + \delta u^*(t), \quad (5.118)$$

где

$$\delta x^*(t) = \varepsilon \psi(t) \quad (5.119)$$

есть вариация  $x^*(t)$ , соответствующая вариации  $\delta u^*(t)$  управления  $u^*(t)$ .

Потребуем, чтобы возмущенное управление переводило  $x(0) = 1$  в  $x(T) = 0$ , т. е. должно выполняться условие

$$\psi(0) = \psi(T) = 0. \quad (5.120)$$

В силу (5.117) это означает, что

$$\psi(T) = e^{-T} \int_0^T e^t \eta(t) dt = 0, \quad (5.121)$$

и поэтому возмущение  $\varepsilon \eta(t)$  не является совершенно произвольным. Например, можно принять, что  $\eta(t) = e^{-t} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)$ , но  $\eta(t) = e^{-t} \sin\frac{\pi t}{T}$  в качестве возмущения рассматривать нельзя.

Итак, сообщая управлению  $u^*(t)$  малые изменения  $\varepsilon \eta(t)$ , где  $\eta(t)$  принадлежит к  $\mathfrak{F}([0, T], R)$ , т. е. является кусочно-непрерывной функцией из  $[0, T]$  в  $R$ , удовлетворяющей соотношению

$$\int_0^T e^t \eta(t) dt = 0, \quad (5.122)$$

устанавливаем, что соответствующие изменения  $\epsilon\psi(t)$  траектории  $x^*(t)$  являются решениями дифференциального уравнения

$$\dot{\epsilon\psi}(t) = -\epsilon\psi(t) + \epsilon\eta(t), \quad (5.123)$$

причем  $\psi(0) = 0$ .

Эти возмущения показаны на рис. 5.6.

**Шаг 3. Гамильтониан.** Перед тем, как вычислять влияние возмущения на величину функционала преобразования  $J$ , введем скалярную функцию  $H$ , называемую гамильтонианом, которая поможет получить искомые необходимые условия. При этом мы введем дополнительную переменную, которая играет роль, аналогичную множителям Лагранжа в § 5.4. Хотя на данном этапе такой прием может показаться искусственным, важность этого понятия будет ясна из дальнейшего изложения.

Итак, будем считать, что  $p(t)$  — некоторая, пока еще неопределенная кусочно-непрерывная функция, которую будем называть дополнительной переменной (сопряженной переменной, или множителем Лагранжа)<sup>1</sup>. Так как и  $x(t)$ , и  $x^*(t)$  являются решениями уравнения (5.100) в результате воздействия управлений  $u(t)$  и  $u^*(t)$  соответственно, имеем

$$-\dot{x}(t) - x(t) + u(t) = 0; \quad (5.124)$$

$$-\dot{x}^*(t) - x^*(t) + u^*(t) = 0. \quad (5.125)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_0^T p(t) [-x(t) + u(t) - \dot{x}(t)] dt = \\ & = \int_0^T [-p(t)x(t) + p(t)u(t) - p(t)\dot{x}(t)] dt = 0; \end{aligned} \quad (5.126)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T p(t) [-x^*(t) + u^*(t) - \dot{x}^*(t)] dt = \\ & = \int_0^T [-p(t)x^*(t) + p(t)u^*(t) - p(t)\dot{x}^*(t)] dt = 0, \end{aligned} \quad (5.127)$$

откуда

$$J(u) = \int_0^T \left[ \frac{x^2(t)}{2} + \frac{u^2(t)}{2} - p(t)x(t) + p(t)u(t) - p(t)\dot{x}(t) \right] dt \quad (5.128)$$

и

$$\begin{aligned} & J(u^*) = \\ & = \int_0^T \left[ \frac{x^{*2}(t)}{2} + \frac{u^{*2}(t)}{2} - p(t)x^*(t) + p(t)u^*(t) - p(t)\dot{x}^*(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (5.129)$$

<sup>1</sup> Если  $p(t)$  определена, то она будет «отвечать» за ограничения, наложенные уравнением системы (5.100).

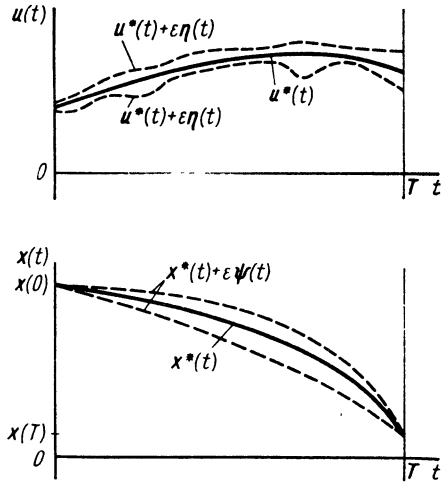


Рис. 5.6. Возмущения управления и соответствующие им возмущения оптимальной траектории

Если определить скалярную функцию  $H(x, p, u)$  на  $R \times R \times R$ , положив

$$H(x, p, u) = L(x, u) + p(-x + u) = \frac{x^2}{2} + \frac{u^2}{2} + p(-x + u), \quad (5.130)$$

то уравнения (5.128) и (5.129) можно записать в виде

$$J(u) = \int_0^T \{H[x(t), p(t), u(t)] - p(t)\dot{x}(t)\} dt; \quad (5.131)$$

$$J(u^*) = \int_0^T \{H[x^*(t), p(t), u^*(t)] - p(t)\dot{x}^*(t)\} dt. \quad (5.132)$$

Функцию  $H$  часто называют функцией Гамильтона (или просто гамильтонианом). Из уравнений (5.131) и (5.132) непосредственно получим

$$J(u) - J(u^*) = \int_0^T \{H[x(t), p(t), u(t)] - H[x^*(t), p(t), u^*(t)]\} dt + \\ + \int_0^T p(t)[\dot{x}^*(t) - \dot{x}(t)] dt. \quad (5.133)$$

**Шаг 4. Вычисление  $J(u) - J(u^*)$ .** Вычислим влияние возмущения на величину  $J$ . Сделаем это, используя различные уравнения возмущений шага 1, определение  $H$ , разложение  $H$  в ряд Тейлора и интегрирование по частям.

Прежде всего заметим, что для малого  $\varepsilon$  справедливо

$$H[x(t), p(t), u(t)] = H[x^*(t), p(t), u^*(t)] + \\ + \frac{\partial H}{\partial x}[x^*(t), p(t), u^*(t)][x(t) - x^*(t)] + \\ + \frac{\partial H}{\partial u}[x^*(t), p(t), u^*(t)][u(t) - u^*(t)] + o(\varepsilon) = \quad (5.134)$$

$$= H[x^*(t), p(t), u^*(t)] + \frac{\partial H}{\partial x}[x^*(t), p(t), u^*(t)]\varepsilon\psi(t) + \\ + \frac{\partial H}{\partial u}[x^*(t), p(t), u^*(t)]\varepsilon\eta(t) + o(\varepsilon), \quad (5.135)$$

где  $o(\varepsilon)$  — член, обладающий свойством  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ ,

и

$$x(t) - x^*(t) = \varepsilon\psi(t); \\ u(t) - u^*(t) = \varepsilon\eta(t) \quad (5.136)$$

по уравнениям (5.110) и (5.113). Далее, так как

$$\dot{x}^*(t) - \dot{x}(t) = -\varepsilon\dot{\psi}(t), \quad (5.137)$$

из уравнения (5.133) следует, что

$$J(u) - J(u^*) = \varepsilon \int_0^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial x}[x^*(t), p(t), u^*(t)]\psi(t) + \right. \\ \left. + \frac{\partial H}{\partial u}[x^*(t), p(t), u^*(t)]\eta(t) \right\} dt - \varepsilon \int_0^T p(t)\dot{\psi}(t) dt + o(\varepsilon). \quad (5.138)$$

**Упражнение 5.9.** Запишите уравнение (5.138) через  $\delta x^*(t)$ ,  $u^*(t)$  и  $\frac{d}{dt} \delta x^*(t)$  и докажите, что в этом уравнении будет отсутствовать член, содержащий  $\frac{\partial H}{\partial p}$ . Почему в уравнении (5.138) можно писать  $\circ(\varepsilon)$  вместо  $\int_0^T \circ(\varepsilon) dt$ , как это следовало бы из (5.124)? Укажите, устанавливается ли  $\circ(\varepsilon)$  членом вида  $\varepsilon^2 f(t)$ , где  $f(t)$  — ограниченная кусочно-непрерывная функция  $t$ ?

Интегрирование по частям последнего слагаемого (5.138) позволяет получить

$$\begin{aligned} & -\int_0^T p(t) \dot{\psi}(t) dt = \\ & = p(0) \psi(0) - p(T) \psi(T) + \int_0^T \dot{p}(t) \psi(t) dt = \end{aligned} \quad (5.139)$$

$$= \int_0^T \dot{p}(t) \psi(t) dt \quad (5.140)$$

по уравнению (5.120).

Итак, имеем

$$\begin{aligned} J(u) - J(u^*) = \varepsilon \left( \int_0^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} [x^*(t), p(t), u^*(t)] + \dot{p}(t) \right\} \psi(t) dt + \right. \\ \left. + \int_0^T \frac{\partial H}{\partial u} [x^*(t), p(t), u^*(t)] \eta(t) dt \right) + \circ(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.141)$$

где функция  $p(t)$  все еще не определена.

Так как  $u^*$  — оптимальное управление, то должно выполняться неравенство

$$J(u) - J(u^*) \geq 0. \quad (5.142)$$

Поскольку  $\varepsilon$  может быть как положительным, так и отрицательным, а членом  $\circ(\varepsilon)$  можно пренебречь (см., например, упражнение 5.2), то получим, что

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} [x^*(t), p(t), u^*(t)] + \dot{p}(t) \right\} \psi(t) dt + \right. \\ & \left. + \int_0^T \frac{\partial H}{\partial u} [x^*(t), p(t), u^*(t)] \eta(t) dt \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Здесь мы впервые воспользовались оптимальностью  $u^*$ , и поэтому уравнение (5.143) является предварительной формой искомого необходимого условия.

**Шаг 5. Дифференциальное уравнение для  $p(t)$ .** Сформулируем условия, которым должна удовлетворять функция  $p(t)$ . Потребуем, чтобы  $p(t)$  удовлетворяла определенному дифференциальному уравнению. Для того чтобы полностью определить  $p(t)$ , останется лишь выбрать начальное условие  $p(0)$ .

\*

Потребуем, чтобы  $p(t)$  было решением линейного дифференциального уравнения вида

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}[x^*(t), p(t), u^*(t)] = \quad (5.144)$$

$$= p(t) - x^*(t). \quad (5.145)$$

Во-первых, мы видим, что однородные части уравнений (5.145) и (5.106) являются сопряженными согласно определению § 3.25. Во-вторых, из уравнений (5.143) и (5.144) следует, что

$$\int_0^T \frac{\partial H}{\partial u}[x^*(t), p(t), u^*(t)] \eta(t) dt = 0, \quad (5.146)$$

когда  $p(t)$  есть решение уравнения (5.144). В-третьих,  $x^*(t)$  есть решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}[x^*(t), p(t), u^*(t)]. \quad (5.147)$$

Таким образом, как  $x^*(t)$ , так и  $p(t)$  являются решениями дифференциальных уравнений, в которые входит гамильтониан  $H$ .

**Шаг 6. Основная лемма.** Итак, получено соотношение (5.146), которое должно выполняться для каждой кусочно-непрерывной функции  $\eta(t)$ , удовлетворяющей соотношению (5.122). Какие условия оно накладывает на  $\frac{\partial H}{\partial u}[x^*(t), p(t), u^*(t)]$ ? Мы сможем ответить на этот вопрос с помощью следующей леммы.

**Лемма 5.1.** Пусть  $h(t)$  — кусочно-непрерывная функция на  $[0, T]$ . Предположим, что

$$\int_0^T h(t) \alpha(t) dt = 0 \quad (5.148)$$

для всех кусочно-непрерывных функций  $\alpha(t)$  на  $[0, T]$ , удовлетворяющих условию

$$\int_0^T \alpha(t) dt = 0. \quad (5.149)$$

В этом случае  $h(t)$  — постоянная величина на  $[0, T]$ , т. е.

$$h(t) = c, \quad t \in [0, T]. \quad (5.150)^1$$

**Доказательство.** Так как  $h(t)$  кусочно-непрерывна, существует  $c$  из  $R$  такое, что

$$\int_0^T h(t) dt = cT. \quad (5.151)$$

Если

$$\int_0^T [h(t) - c] dt = 0, \quad (5.152)$$

то функция  $\alpha(t) = h(t) - c$  кусочно-непрерывна и удовлетворяет условию (5.149).

<sup>1</sup> За исключением, возможно, счетного множества  $A$  точек из  $[0, T]$ .

Таким образом,

$$\int_0^T h(t)[h(t) - c] dt = 0 \quad (5.153)$$

и

$$\int_0^T -c[h(t) - c] dt = 0. \quad (5.154)$$

Из последних двух уравнений следует:

$$\int_0^T [h(t) - c]^2 dt = 0. \quad (5.155)$$

На основании теоремы 3.8е получим

$$h(t) - c = 0 \quad (5.156)$$

(за исключением счетного подмножества  $A$  точек  $t$  из  $[0, T]$ ), что и доказывает лемму.

Если принять

$$\eta(t) = e^{-t}\alpha(t), \quad (5.157)$$

где  $\alpha(t)$  — любая кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая (5.149), то уравнение (5.146) запишется в виде

$$\int_0^T \frac{\partial H}{\partial u} [x^*(t), p(t), u^*(t)] e^{-t}\alpha(t) dt = 0, \quad (5.158)$$

откуда на основании леммы получим

$$\frac{\partial H}{\partial u} [x^*(t), p(t), u^*(t)] = e^t c, \quad (5.159)$$

где  $c = \text{const}$ .

**Шаг 7. Необходимое условие.** Сформулируем искомое необходимое условие. Покажем, что существует решение  $p^*(t)$  уравнения (5.145) такое, что функция  $H[x^*(t), p^*(t), u]$  по  $u$  имеет абсолютный минимум при  $u = u^*$ .

Пусть  $\hat{p}(t)$  — решение уравнения (5.145),

причем  $\hat{p}(t) = 0$ , тогда

$$\hat{p}(t) = -e^t \int_0^t e^{-\tau} x^*(\tau) d\tau. \quad (5.160)$$

Из выражения (5.159) следует, что существует постоянная  $c^*$ , для которой

$$\frac{\partial H}{\partial u} [x^*(t), \hat{p}(t), u^*(t)] = u^*(t) + \hat{p}(t) = e^t c^*. \quad (5.161)$$

Иначе говоря,

$$u^*(t) - e^t \int_0^t e^{-\tau} x^*(\tau) d\tau = e^t c^* \quad (5.162)$$

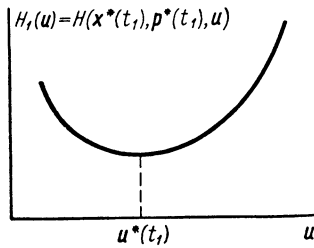
или, эквивалентно,

$$u^*(t) - e^t c^* - e^t \int_0^t e^{-\tau} x^*(\tau) d\tau = 0. \quad (5.163)$$

Будем считать функцию  $p^*(t)$  единственным решением уравнения (5.145) с  $p^*(0) = -c^*$ , т. е.

$$p^*(t) = -e^t c^* - e^t \int_0^t e^{-\tau} x^*(\tau) d\tau. \quad (5.164)$$

В этом случае гамильтониан  $H[x^*(t), p^*(t), u]$ , рассматриваемый как функция  $u$ , имеет абсолютный минимум при  $u = u^*(t)$  для  $t$  из  $[0, T]$ . Это утверждение надо понимать следующим образом: предположим, что  $t_1$  — некоторый элемент из  $[0, T]$ , тогда  $x^*(t_1)$  и  $p^*(t_1)$  — вполне определенные числа, и мы можем рассматривать действительную функцию  $H_1(u)$  действительной переменной  $u$ , определенную как



$$H_1(u) = H[x^*(t_1), p^*(t_1), u] = \quad (5.165)$$

$$= \frac{x^{*2}(t_1)}{2} + \frac{u^2}{2} + p^*(t_1)[-x^*(t_1) + u]. \quad (5.166)$$

Рис. 5.7.  $H_1(u)$  имеет абсолютный минимум при  $u = u^*(t_1)$

Наше утверждение сводится к тому, что  $u = u^*(t_1)$  есть абсолютный минимум  $H_1(u)$ . Это утверждение иллюстрируется с помощью рис. 5.7.

Для доказательства сделанного утверждения прежде всего отметим, что

$$H[x^*(t), p^*(t), u] = \frac{x^{*2}(t)}{2} + \frac{u^2}{2} + p^*(t)[-x^*(t) + u] \quad (5.167)$$

представляет собой параболу, имеющую локальный минимум, являющийся одновременно и абсолютным минимумом. Если  $G(u) = H[x^*(t), p^*(t), u]$ , то

$$\left. \frac{dG(u)}{du} \right|_{u=u^*(t)} = \frac{\partial H}{\partial u} [x^*(t), p^*(t), u^*(t)] = \quad (5.168)$$

$$= u^*(t) + p^*(t) = \quad (5.169)$$

$$= u^*(t) - e^t c^* - e^t \int_0^t e^{-\tau} x^*(\tau) d\tau = \quad (5.170)$$

$$= 0 \quad (5.171)$$

на основании уравнений (5.163) и (5.164). Далее,

$$\left. \frac{d^2G(u)}{du^2} \right|_{u=u^*(t)} = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} [x^*(t), p^*(t), u^*(t)] = 1 > 0, \quad (5.172)$$

так что  $u = u^*(t)$  действительно является минимумом функции  $G(u) = H[x^*(t), p^*(t), u]$ , и наше утверждение доказано. В заключение рассмотрим следующую теорему, которая представляет собой искомые необходимые условия для нашего примера.

**Теорема 5.2.** Пусть  $u^*(t)$  — допустимое управление, переводящее  $x(0) = 1$  в  $x(T) = 0$ . Необходимым условием оптимальности управления  $u^*(t)$  является существование функции  $p^*(t)$  такой, что:

а) если  $x^*(t)$  — траектория, соответствующая  $u^*(t)$ , то  $x^*(t)$  и  $p^*(t)$  являются решениями системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p} [x^*(t), p^*(t), u^*(t)]; \\ \dot{p}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial x} [x^*(t), p^*(t), u^*(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.173)$$

б) функция  $H [x^*(t), p^*(t), u]$ , рассматриваемая как функция  $u$ , имеет абсолютный минимум при  $u = u^*(t)$  для  $t$  из  $[0, T]$ , т. е.

$$\min_u H [x^*(t), p^*(t), u] = H [x^*(t), p^*(t), u^*(t)]. \quad (5.174)$$

Дадим интерпретацию теоремы 5.2. Заданы оптимальное управление  $u^*(t)$  и соответствующая ему оптимальная траектория  $x^*(t)$  для любого  $t$  из  $[0, T]$ . Первая часть теоремы 5.2 гарантирует, что существует функция  $p^*(t)$ , являющаяся решением уравнения (5.173), соответствующая  $x^*(t)$  и  $u^*(t)$ . Таким образом, в каждый заданный момент времени, например,  $t_1$ , на интервале  $[0, T]$ ,  $x^*(t_1)$ ,  $p^*(t_1)$  и  $u^*(t_1)$  — это три вполне определенных числа. Вторая часть теоремы 5.2 утверждает, что число  $H [x^*(t_1), p^*(t_1), u^*(t_1)]$  меньше или равно числу  $H [x^*(t_1), p^*(t_1), r]$ , где  $r$  — любое действительное число. Эта теорема, являющаяся для нашей задачи принципом минимума Понтрягина, в дальнейшем будет обобщена.

Перед тем как подвести некоторые итоги и показать возможности практического использования необходимых условий, рассмотрим функцию  $H [x^*(t), p^*(t), u^*(t)]$ . В частности, имеем

$$\frac{dH [x^*(t), p^*(t), u^*(t)]}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_* \dot{x}^*(t) + \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_* \dot{p}^*(t) + \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_* \dot{u}^*(t), \quad (5.175)$$

где знак  $|_*$  обозначает, что производные должны вычисляться при  $[x^*(t), p^*(t), u^*(t)]$ . Из уравнений (5.168), (5.171) и (5.173) следует, что

$$\frac{dH [x^*(t), p^*(t), u^*(t)]}{dt} = 0, \quad (5.176)$$

и поэтому  $H [x^*(t), p^*(t), u^*(t)]$  есть величина постоянная. Иначе говоря, для данной задачи гамильтониан  $H$  вдоль оптимальной траектории — величина постоянная.

Итак, мы начали с предположения, что оптимум существует; после этого подали возмущение на управление и рассмотрели результат воздействия возмущения на траекторию. Затем мы ввели гамильтониан  $H$  и дополнительную переменную  $p$ , которая в дальнейшем играла роль, аналогичную роли множителя Лагранжа. Далее мы выразили через гамильтониан воздействие возмущения на величину  $J$  и потребовали, чтобы наша дополнительная переменная была решением линейного дифференциального уравнения; доказали лемму о функциях с нулевыми интегралами и, наконец, получили необходимые условия, устанавливающие возможность определения такой дополнительной переменной, при которой оптимальное управление минимизирует гамильтониан  $H$ , рассматриваемый как функцию от  $u$ . Таким образом, мы свели задачу минимизации функционала к обычной задаче отыскания минимума. Очень часто такое сведение имеет большое практическое значение в решении задач управления.

Посмотрим, как можно использовать необходимые условия теоремы 5.2. Прежде всего теорема устанавливает, что оптимум представляет собой решение  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$ ,  $p^*(t)$  уравнений (5.173) и (5.174), т. е.

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p} [x^*(t), p^*(t), u^*(t)] = -x^*(t) + u^*(t); \quad (5.177)$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} [x^*(t), p^*(t), u^*(t)] = p^*(t) - x^*(t); \quad (5.178)$$

$$\min_u H [x^*(t), p^*(t), u] = H [x^*(t), p^*(t), u^*(t)] \quad (5.179)$$

и

$$x^*(0) = 1, \quad x^*(T) = 0. \quad (5.180)$$



По определению  $H$ , уравнение (5.179) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x^{*2}(t) + \frac{1}{2} u^{*2}(t) + p^*(t)[-x^*(t) + u^*(t)] &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} x^{*2}(t) + \frac{1}{2} u^2 + p^*(t)[-x^*(t) + u] \end{aligned} \quad (5.181)$$

для всех  $u$ . Неравенство (5.181) эквивалентно соотношению

$$\frac{1}{2} u^{*2}(t) + p^*(t)u^*(t) \leq \frac{1}{2} u^2 + p^*(t)u, \quad (5.182)$$

откуда, в свою очередь, следует равенство

$$u^*(t) = -p^*(t). \quad (5.183)$$

Отметим, что так как

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} [x^*(t), p^*(t), u^*(t)] = 1, \quad (5.184)$$

уравнение (5.183) можно также получить из соотношения

$$\frac{\partial H}{\partial u} [x^*(t), p^*(t), u^*(t)] = u^*(t) + p^*(t) = 0. \quad (5.185)$$

Таким образом, решения уравнений (5.177), (5.178) и (5.183), удовлетворяющие граничным условиям (5.180), определяют оптимум. Попробуем найти все решения этих уравнений. Иначе говоря, мы хотим знать все три функции  $x(t)$ ,  $p(t)$ ,  $u(t)$ , для которых

$$\dot{x}(t) = -x(t) - u(t); \quad (5.186)$$

$$\dot{p}(t) = p(t) - x(t); \quad (5.187)$$

$$u(t) = -p(t); \quad (5.188)$$

и

$$x(0) = 1, \quad x(T) = 0. \quad (5.189)$$

Итак, мы ищем решения системы

$$\dot{x}(t) = -x(t) - p(t); \quad (5.190)$$

$$\dot{p}(t) = p(t) - x(t)$$

с граничными условиями  $x(0) = 1$  и  $x(T) = 0$ .

Решение такой системы единственно и выражается формулой

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ &x(0) [(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t} + \\ &+ (\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}t}] + p(0)(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}) \}; \end{aligned} \quad (5.191)$$

$$p(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ x(0)(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}) +$$

$$+ p(0)[(\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2} + 1)e^{\sqrt{2}t}] \},$$

где

$$x(0) = 1 \text{ и } p(0) = \frac{(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}T} + (\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}T}}{e^{\sqrt{2}T} - e^{-\sqrt{2}T}}. \quad (5.192)$$

Следовательно, если решение задачи управления существует, то оно должно иметь вид

$$u^*(t) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \left\{ e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t} + \frac{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}T} + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}T}}{e^{\sqrt{2}T} - e^{-\sqrt{2}T}} \times \right. \\ \left. \times [(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}] \right\}. \quad (5.193)$$

Таким образом, если мы докажем, что решение нашей задачи существует, то управление  $u^*(t)$  выражается формулой (5.193). В последующих главах будут приведены другие примеры использования необходимых условий при определении оптимальных управлений.

**Упражнение 5.10.** Требуется показать, что уравнение (5.191) действительно представляет собой решение системы (5.190), удовлетворяющее заданным граничным условиям. Используйте метод преобразования Лапласа, рассмотренный в § 3.23.

**Упражнение 5.11.** В шаге 3 введите функцию  $\hat{H}(x, p, u)$ , заданную как

$$\hat{H}(x, p, u) = -L(x, u) + p(-x + u)$$

вместо  $H(x, p, u)$ , и получите следующие необходимые условия.

Пусть  $u^*(t)$  — допустимое управление, переводящее  $x(0) = 1$  в  $x(T) = 0$ . Для оптимальности  $u^*(t)$  необходимым условием является существование функции  $\hat{p}^*(t)$  такой, что

а) если  $x^*(t)$  — траектория, соответствующая  $u^*(t)$ , то  $\dot{x}^*(t)$  и  $\hat{p}^*(t)$  — решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial p}(x^*(t), \hat{p}^*(t), u^*(t)); \\ \dot{\hat{p}}^*(t) &= -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x}(x^*(t), \hat{p}^*(t), u^*(t)); \end{aligned} \right\} \quad (5.194)$$

б) функция  $\hat{H}[x^*(t), \hat{p}^*(t), u]$  имеет абсолютный максимум по  $u$  при  $u = u^*(t)$  для  $t$  из  $[0, T]$ , т. е.

$$\max_u H[x^*(t), \hat{p}^*(t), u] = H[x^*(t), \hat{p}^*(t), u^*(t)]. \quad (5.195)$$

Таким образом, наши необходимые условия могут быть получены как принцип максимума, а не минимума.

Покажите, что отыскание решений уравнений (5.194) и (5.195) дает управление  $u^*(t)$  в соответствии с формулой (5.193).

## ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

### 5.7. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ С НЕЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

После общих замечаний, высказанных в § 5.5 и примере § 5.6, мы подготовлены к решению задачи управления на основе вариационных методов. Рассмотрим задачу с незакрепленным концом, минимизируя координаты конечного состояния («стоимость»). Мы не встретим трудностей при доказательстве того, что оптимальное управление для этой задачи должно экстремизировать гамильтониан. Затем введем вторую производную и эвристически покажем, что экстремум гамильтониана должен быть минимумом. В следующем параграфе необходимые условия будут усилены для получения локальных достаточных условий, которые окажутся полезными в гл. 9. Далее кратко рассмотрим задачу с закрепленным концом и отметим определенные трудности, возникающие из-за того, что вариации управления должны удовлетворять соотношениям, аналогичным (5.122). Для того, чтобы преодолеть эти трудности, мы должны изменить наше представление о задаче управления, что и приведет нас к принципу мини-

му Понтрягина. Ниже наши рассуждения будут нестрогими. Более строгие доказательства приведены в соответствующей литературе<sup>1</sup>.

Сформулируем поставленную задачу. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (5.196)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{f}$  —  $n$ -мерные векторы и  $\mathbf{u}(t)$  —  $m$ -мерный вектор, причем  $0 < m \leq n$ . Будем считать, что рассматриваем задачу без ограничений (см. § 4.13), т. е., что любая кусочно-непрерывная функция является допустимым управлением. Пусть  $t_0$  — начальное время и

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.197)$$

является исходным состоянием системы. Множество  $S$  имеет вид  $R_n \times \times \{t_1\}$ , где  $t_1$  — заданное время,  $t_1 > t_0$ . Другими словами, конечным состоянием может быть любой элемент из  $R_n$ . Пусть

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \text{ и } K(\mathbf{x}) \quad (5.198)$$

— «достаточно» дифференцируемые действительные функции. Рассмотрим функционал  $J(\mathbf{u})$ , определенный как

$$J(\mathbf{u}) = K[\mathbf{x}(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (5.199)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  — траектория, удовлетворяющая уравнению (5.196), начинающаяся из  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  и произведенная управлением  $\mathbf{u}$ . Итак, задача формулируется следующим образом:

Найти допустимое управление  $\mathbf{u}(t)$ , минимизирующее функционал  $J(\mathbf{u})$ . Такая задача называется задачей с незакрепленным концом и фиксированным временем.

Мы получим необходимые условия, полностью аналогичные условиям теоремы 5.2, и будем двигаться шаг за шагом, точно так же, как и в § 5.6.

**Шаг 1. Предположение существования оптимума.** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — оптимальное управление и  $\mathbf{x}^*(t)$  — соответствующая оптимальная траектория. Другими словами,  $\mathbf{u}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$  удовлетворяют условиям

$$1) \dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]; \quad (5.200)$$

$$2) \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad (5.201)$$

3) если  $\mathbf{u}(t)$  — любое допустимое управление, причем соответствующая ему траектория начинается в точке  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , то

$$\begin{aligned} J^* = J(\mathbf{u}^*) &= K[\mathbf{x}^*(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] dt \leq J(\mathbf{u}) = \\ &= K[\mathbf{x}(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt. \end{aligned} \quad (5.202)$$

**Шаг 2. Возмущение.** Дадим возмущение управлению  $\mathbf{u}^*(t)$ , положив

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t). \quad (5.203)$$

Если  $\mathbf{x}(t)$  — траектория, производимая управлением  $\mathbf{u}(t)$ , то мы можем написать

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \varepsilon \boldsymbol{\phi}(t), \quad (5.204)$$

<sup>1</sup> См. строгие доказательства в [179], [228]. (Прим. ред.).

так как малая вариация управления приводит к малой вариации движения системы. Так как  $\mathbf{x}(t)$  — решение уравнения (5.196), имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] = & (5.205) \\ &= \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t) + \varepsilon \mathbf{g}\mathbf{b}(t), \mathbf{u}^*(t) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t), t]. & (5.206) \end{aligned}$$

Дифференцируя выражение (5.204), получим

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \varepsilon \dot{\mathbf{g}}\mathbf{b}(t). \quad (5.207)$$

Разлагая  $\mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t) + \varepsilon \mathbf{g}\mathbf{b}(t), \mathbf{u}^*(t) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t), t]$  в ряд Тейлора, найдем

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t) + \varepsilon \mathbf{g}\mathbf{b}(t), \mathbf{u}^*(t) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t), t] = \\ &= \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_* \varepsilon \mathbf{g}\mathbf{b}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_* \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.208)$$

где  $\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_*$  — якобиан  $\mathbf{f}$  по  $\mathbf{x}$ , вычисленный при  $[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]$  [см. (3.87)];  $\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_*$  — якобиан  $\mathbf{f}$  по  $\mathbf{u}$ , вычисленный при  $[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]$ , и  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  — вектор, удовлетворяющий условию

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(\varepsilon)}{\varepsilon} = \mathbf{0}. \quad (5.209)$$

Вертикальную черту со звездочкой внизу мы будем в дальнейшем использовать для обозначения того, что функция должна вычисляться вдоль оптимальной траектории. Из уравнений (5.206) и (5.208) следует, что

$$\varepsilon \dot{\mathbf{g}}\mathbf{b}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_* \varepsilon \mathbf{g}\mathbf{b}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_* \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.210)$$

или, эквивалентно,

$$\dot{\mathbf{g}}\mathbf{b}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_* \mathbf{g}\mathbf{b}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_* \boldsymbol{\eta}(t) + \frac{\mathcal{O}(\varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (5.211)$$

Так как траектория  $\mathbf{x}(t)$  начинается в точке  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , то должно быть

$$\mathbf{g}\mathbf{b}(t_0) = \mathbf{0}. \quad (5.212)$$

Предположим, что  $\boldsymbol{\psi}(t)$  — решение линейного уравнения

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_* \boldsymbol{\psi}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_* \boldsymbol{\eta}(t), \quad (5.213)$$

где

$$\boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{0}; \quad (5.214)$$

отсюда следует<sup>1</sup>, что

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \varepsilon \mathbf{g}\mathbf{b}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \varepsilon \boldsymbol{\psi}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.215)$$

и поэтому в дальнейших вычислениях мы часто будем заменять  $\mathbf{x}(t)$  на  $\mathbf{x}^*(t) + \varepsilon \boldsymbol{\psi}(t)$  вместо более строгого выражения  $\mathbf{x}^*(t) + \varepsilon \mathbf{g}\mathbf{b}(t)$ .

**Упражнение 5.12.** Пусть член  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  в уравнении (5.210) имеет вид  $\varepsilon^2 \mathbf{M}(t)$ , где  $\mathbf{M}(t)$  — ограниченная функция. Требуется доказать соотношение (5.215). **У к а з а н и е:** рассмотрите функцию  $\mathbf{g}\mathbf{b}(t) - \boldsymbol{\psi}(t)$ , причем  $\frac{d[\mathbf{g}\mathbf{b}(t) - \boldsymbol{\psi}(t)]}{dt} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_* [\mathbf{g}\mathbf{b}(t) - \boldsymbol{\psi}(t)] + \varepsilon \mathbf{M}(t)$ ;  $\mathbf{g}\mathbf{b}(t_0) - \boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{0}$ . После этого найдите  $\|\mathbf{x}^*(t) + \varepsilon \mathbf{g}\mathbf{b}(t) - [\mathbf{x}^*(t) + \varepsilon \boldsymbol{\psi}(t)]\|$ .

<sup>1</sup> См. [179]. Отметим, что выражение (5.215) может быть строгим без дополнительных предположений (см. упражнение 5.12).

**Шаг 3. Гамильтониан.** Введем в рассмотрение гамильтониан и дополнительную переменную. Пусть  $\mathbf{p}(t)$  — некоторая, пока еще неопределенная, кусочно-непрерывная  $n$ -мерная векторная функция, которую будем называть дополнительным или сопряженным вектором. Так как и  $\mathbf{x}(t)$ , и  $\mathbf{x}^*(t)$  являются решениями уравнения (5.196), имеем

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] - \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}; \quad (5.216)$$

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] - \dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{0}. \quad (5.217)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] - \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt; \end{aligned} \quad (5.218)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] - \dot{\mathbf{x}}^*(t) \rangle dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) \rangle dt \end{aligned} \quad (5.219)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) = & K[\mathbf{x}(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} \{L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] - \\ & - \langle \mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle\} dt \end{aligned} \quad (5.220)$$

и

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}^*) = & K[\mathbf{x}^*(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} \{L[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] + \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] - \\ & - \langle \mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) \rangle\} dt. \end{aligned} \quad (5.221)$$

Если определить скалярную функцию  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t)$ , положив

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \rangle, \quad (5.222)$$

то уравнения (5.220) и (5.221) можно записать в виде

$$J(\mathbf{u}) = K[\mathbf{x}(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} \{H(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t) - \langle \mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle\} dt \quad (5.223)$$

и

$$J(\mathbf{u}^*) = K[\mathbf{x}^*(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} \{H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^*(t)] - \langle \mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) \rangle\} dt. \quad (5.224)$$

Функцию  $H$  называют гамильтонианом. Непосредственно получим, что вариация функционала имеет вид

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}^*) = & \{K[\mathbf{x}(t_1)] - K[\mathbf{x}^*(t_1)]\} + \int_{t_0}^{t_1} \{H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t] - \\ & - H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^*(t)]\} dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (5.225)$$

**Шаг 4. Вычисление разности  $J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}^*)$ .** Вычислим влияние возмущения на величину  $J$ . Для этого используем различные уравнения возмущений шага 1, определение  $H$ , разложение в ряд Тейлора и интегрирование по частям.

Прежде всего, если  $\varepsilon$  мало, то

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t] = H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^*(t), t] + \\ + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{*p}, [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{*p}, [\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*(t)] \right\rangle + o(\varepsilon), \quad (5.226)$$

где  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{*p}$  обозначает градиент  $H$  по  $\mathbf{x}$ , вычисленный при  $[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^*(t), t]$ , и  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{*p}$  — градиент  $H$  по  $\mathbf{u}$ , вычисленный при  $[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^*(t), t]$ . С помощью уравнений (5.203) и (5.215) получим

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t] = H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^*(t), t] + \varepsilon \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{*p}, \Psi(t) \right\rangle + \\ + \varepsilon \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{*p}, \eta(t) \right\rangle + o(\varepsilon). \quad (5.227)$$

Далее из выражения (5.215) найдем

$$K[\mathbf{x}(t_1)] = K[\mathbf{x}^*(t_1)] + \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \Big|_*, \mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}^*(t_1) \right\rangle + o(\varepsilon) = \\ = K[\mathbf{x}^*(t_1)] + \varepsilon \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \Big|_*, \Psi(t_1) \right\rangle + o(\varepsilon), \quad (5.228)$$

где  $\frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \Big|_*$  обозначает градиент  $K$  по  $\mathbf{x}$ , вычисленный при  $\mathbf{x}^*(t_1)$ .

Затем из уравнений (5.210) и (5.213) определим

$$\varepsilon \dot{\mathbf{g}}(t) = \varepsilon \dot{\Psi}(t) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_* [\mathbf{g}(t) - \Psi(t)] + o(\varepsilon). \quad (5.229)$$

Откуда при помощи выражения (5.215) получим

$$\varepsilon \dot{\mathbf{g}}(t) = \varepsilon \dot{\Psi}(t) + o(\varepsilon). \quad (5.230)$$

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) = -\varepsilon \dot{\Psi}(t) + o(\varepsilon). \quad (5.231)$$

Подставляя полученные соотношения в выражение (5.225), получим

$$J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}^*) = \varepsilon \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \Big|_*, \Psi(t_1) \right\rangle + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{*p}, \Psi(t) \right\rangle dt + \\ + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{*p}, \eta(t) \right\rangle dt - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{p}(t), \dot{\Psi}(t) \rangle dt + o(\varepsilon). \quad (5.232)$$

Проинтегрируем член выражения (5.232), содержащий  $\dot{\Psi}(t)$ , по частям:

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{p}(t), \dot{\Psi}(t) \rangle dt = \langle \mathbf{p}(t_1), \Psi(t_1) \rangle - \langle \mathbf{p}(t_0), \Psi(t_0) \rangle - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{\mathbf{p}}(t), \Psi(t) \rangle dt. \quad (5.233)$$

Так как  $\psi(t_0) = \mathbf{0}$ , уравнение (5.233) можно записать в виде

$$J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}^*) = \varepsilon \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \Big|_* - \mathbf{p}(t_1), \psi(t_1) \right\rangle + \\ + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{*p} + \dot{\mathbf{p}}(t), \psi(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{*p}, \eta(t) \right\rangle \right] dt + o(\varepsilon), \quad (5.234)$$

где  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{p}(t)$  все еще не определен.

Так как  $\mathbf{u}^*$  — оптимальное управление, то

$$J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}^*) \geq 0 \quad (5.235)$$

и поэтому по аналогии с § 5.6, получим

$$\left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \Big|_* - \mathbf{p}(t_1), \psi(t_1) \right\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{*p} + \dot{\mathbf{p}}(t), \psi(t) \right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{*p}, \eta(t) \right\rangle \right] dt = 0. \quad (5.236)$$

**Шаг 5. Дифференциальное уравнение для  $\mathbf{p}(t)$ .** Сформулируем условия, которым должна удовлетворять функция  $\mathbf{p}(t)$ . Прежде всего потребуем, чтобы она была решением дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t] = \quad (5.237)$$

$$= - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] - \left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \right]' \mathbf{p}(t), \quad (5.238)$$

где  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$  — якобиан  $f$  по  $\mathbf{x}$ , а штрих (') обозначает транспонированную матрицу. Уравнение (5.238) есть линейное дифференциальное уравнение относительно  $\mathbf{p}(t)$ . Однородные части уравнений (5.238) и (5.213) являются сопряженными (см. определение § 3.25). Далее, из уравнений (5.236) и (5.238) следует:

$$\left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \Big|_* - \mathbf{p}(t_1), \psi(t_1) \right\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{*p}, \eta(t) \right\rangle dt = 0, \quad (5.239)$$

где  $\mathbf{p}(t)$  — решение уравнения (5.238).

Так как  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \langle \mathbf{p}, f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \rangle$ , имеем также

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = f[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^*(t), t]. \quad (5.240)$$

Таким образом, опять обе функции  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}(t)$  являются решениями дифференциальных уравнений, содержащих гамильтониан  $H$ .

В отличие от задачи § 5.6 дополнительную переменную можно определить полностью благодаря наличию в уравнении (5.239) члена, включающего конечную стоимость. Итак, будем считать, что  $\mathbf{p}^*(t)$  является (единственным) решением уравнения (5.238) с граничным условием

$$\mathbf{p}^*(t_1) = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^*(t_1)]. \quad (5.241)$$

Если принять:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_* = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t], \quad (5.242)$$

то из уравнений (5.239) и (5.241) можно заключить, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_*, \boldsymbol{\eta}(t) \right\rangle dt = 0 \quad (5.243)$$

для всех кусочно-непрерывных функций  $\boldsymbol{\eta}(t)$ .

На следующем шаге из уравнения (5.243) мы получим, что  $\mathbf{u}^*(t)$  есть экстремум  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, t]$ , если  $H$  рассматривать как функцию  $\mathbf{u}$ . Далее мы получим, что этот экстремум должен быть минимумом. Для этого нам понадобится вторая вариация  $J$ .

**Шаг 6. Основная лемма.** Докажем теперь следующую лемму.

**Лемма 5.2.** Пусть  $\mathbf{h}(t)$  — кусочно-непрерывная функция на  $[t_0, t_1]$  и предположим, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{h}(t), \boldsymbol{\alpha}(t) \rangle dt = 0 \quad (5.244)$$

для всех кусочно-непрерывных функций  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  на  $[t_0, t_1]$ . Тогда

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{0}, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.245)^1$$

**Доказательство.** Прежде всего из леммы 5.1 следует, что  $\mathbf{h}(t)$  — постоянная, т. е.

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{c}; \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.246)$$

Для доказательства этого заметим, что если  $\alpha_1(t)$  — любая кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{t_0}^{t_1} \alpha_1(t) dt = 0, \quad (5.247)$$

то полагая

$$\boldsymbol{\alpha}^1(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.248)$$

получим

$$\langle \mathbf{h}(t), \boldsymbol{\alpha}^1(t) \rangle = h_1(t) \alpha_1(t) \quad (5.249)$$

и

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{h}(t), \boldsymbol{\alpha}^1(t) \rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} h_1(t) \alpha_1(t) dt = 0. \quad (5.250)$$

Таким образом,  $h_1(t) = \text{const} = c_1$  на  $[t_0, t_1]$  по лемме 5.1. Аналогичным образом можно показать, что каждая компонента  $\mathbf{h}(t)$  есть постоянная величина на  $[t_0, t_1]$ .

Но если  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ , то можно выбрать функцию

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{c} \neq \mathbf{0} \quad (5.251)$$

такой, чтобы получить противоречие

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{h}(t), \boldsymbol{\alpha}(t) \rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}\|^2 dt > 0; \quad (5.252)$$

это и доказывает лемму 5.2.

<sup>1</sup> За исключением, возможно, счетного подмножества  $A$  из  $[t_0, t_1]$ .



Из леммы и уравнения (5.243) непосредственно следует, что

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_* = 0. \quad (5.253)$$

Итак,  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t]$ , рассматриваемая как функция  $\mathbf{u}$ , имеет экстремум при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$  для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ . Последний вывод понимают следующим образом:

Пусть  $\hat{t}$  — некоторый элемент из  $[t_0, t_1]$ , тогда  $\mathbf{x}^*(\hat{t})$  и  $\mathbf{p}^*(\hat{t})$  — вполне определенные векторы, и мы можем рассматривать действительную функцию  $\hat{H}(\mathbf{u})$  от  $m$ -мерного вектора  $\mathbf{u}$ , определенную как

$$\hat{H}(\mathbf{u}) = H[\mathbf{x}^*(\hat{t}), \mathbf{p}^*(\hat{t}), \mathbf{u}, \hat{t}]. \quad (5.254)$$

Тогда  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(\hat{t})$  является экстремумом  $\hat{H}(\mathbf{u})$ .

**Шаг 7. Необходимое условие.** Как мы видели в § 5.5, необходимым условием того, чтобы экстремум функционала являлся его минимумом, служит неотрицательность его второй вариации [см. условие (5.98)]. Используем это обстоятельство. Предположим, что вторая вариация  $\delta^2 J(\mathbf{u}^*)$  существует и

$$\delta^2 J(\mathbf{u}^*) > 0. \quad (5.255)^1$$

Найдем  $\delta^2 J(\mathbf{u}^*)$  в явном виде и используем формулу для получения (эвристическим способом) аналога теоремы 5.2. Во-первых, напомним, что

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t). \quad (5.256)$$

Во-вторых, предположим, что

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \varepsilon \boldsymbol{\psi}(t) + \varepsilon^2 \boldsymbol{\xi}(t) + \circ(\varepsilon^2), \quad (5.257)$$

где  $\boldsymbol{\psi}(t)$  — решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_* \boldsymbol{\psi}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_* \boldsymbol{\eta}(t) \quad (5.258)$$

и

$$\boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\xi}(t_0) = \mathbf{0}. \quad (5.259)$$

В-третьих, напомним, что приращение функционала выражается формулой

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}^*) &= K[\mathbf{x}(t_1)] - K[\mathbf{x}^*(t_1)] + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \{ H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t] - H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \} dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{p}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt, \end{aligned} \quad (5.260)$$

где  $\mathbf{p}^*(t)$  — решение дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = - \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right|_*, \quad (5.261)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\mathbf{p}^*(t_1) = \left. \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \right|_{[\mathbf{x}^*(t_1)]}. \quad (5.262)$$

<sup>1</sup> Далее, при обсуждении принципа минимума, мы увидим, что этого упрощения не требуется для получения искомого результата (см. теорему 5.3).

Теперь докажем, что вторая вариация определяется соотношением

$$\delta^2 J(\mathbf{u}^*)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) = \frac{\varepsilon^2}{2} \left\langle \Psi(t_1), \left. \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_* \Psi(t_1) \right\rangle +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \begin{bmatrix} \Psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_* & \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) \right|_* \\ \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right) \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt,$$

(5.263)

где  $\left. \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_*$  — якобиан  $\frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}$  по  $\mathbf{x}$ , вычисленный при  $\mathbf{x}^*(t_1)$ ;  
 $\left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_*$  — якобиан  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$  по  $\mathbf{x}$ , вычисленный при  $[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]$ ;  
 $\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) \right|_*$  — якобиан  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$  по  $\mathbf{u}$ , вычисленный при  $[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]$ ;  
 $\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right) \right|_*$  — якобиан  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}$  по  $\mathbf{x}$ , вычисленный при  $[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]$  и  
 $\left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_*$  — якобиан  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}$  по  $\mathbf{u}$ , вычисленный при  $[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Для иллюстрации принятых обозначений предположим, что  $n = 3$ ,  $m = 2$ , и запишем в развернутой форме правую часть уравнения (5.263):  
 Выделенные блоки матрицы, содержащей  $H$ , соответствуют различным якобианам, входящим в уравнение (5.263).

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \Psi_1(t_1) \\ \Psi_2(t_1) \\ \Psi_3(t_1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_3} \right|_* \\ \left. \frac{\partial^2 K}{\partial x_2 \partial x_1} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 K}{\partial x_2^2} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 K}{\partial x_2 \partial x_3} \right|_* \\ \left. \frac{\partial^2 K}{\partial x_3 \partial x_1} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 K}{\partial x_3 \partial x_2} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 K}{\partial x_3^2} \right|_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1(t_1) \\ \Psi_2(t_1) \\ \Psi_3(t_1) \end{bmatrix} \right\rangle +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \begin{bmatrix} \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \\ \Psi_3(t) \\ \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_3} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial u_1} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial u_2} \right|_* \\ \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_3} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial u_1} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial u_2} \right|_* \\ \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial x_1} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial x_2} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_3^2} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial u_1} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial u_2} \right|_* \\ \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial x_1} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial x_2} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial x_3} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_* \\ \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u_2 \partial x_1} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u_2 \partial x_2} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u_2 \partial x_3} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u_2 \partial u_1} \right|_* & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} \right|_* \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \\ \Psi_3(t) \\ \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} dt.$$

Следующие вычисления совместно с соотношениями (5.261) и (5.262) и с учетом того, что  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_* = 0$ , доказывают справедливость уравнения (5.263):

$$K[\mathbf{x}(t_1)] - K[\mathbf{x}^*(t_1)] = \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \Big|_*, \varepsilon \Psi(t_1) + \varepsilon^2 \xi(t_1) \right\rangle + \\ + \frac{1}{2} \left\langle \varepsilon \Psi(t_1) + \varepsilon^2 \xi(t_1), \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_* [\varepsilon \Psi(t_1) + \varepsilon^2 \xi(t_1)] \right\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \quad (5.264)$$

$$= \varepsilon \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \Big|_*, \Psi(t_1) \right\rangle + \varepsilon^2 \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \Big|_*, \xi(t_1) \right\rangle + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\langle \Psi(t_1), \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_* \Psi(t_1) \right\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2); \quad (5.265)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt = \langle \mathbf{p}(t_1), \mathbf{x}^*(t_1) - \mathbf{x}(t_1) \rangle - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{\mathbf{p}}(t), \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t) \rangle dt = \quad (5.266)^1$$

$$= \varepsilon \langle -\mathbf{p}(t_1), \Psi(t_1) \rangle + \varepsilon^2 \langle -\mathbf{p}(t_1), \xi(t_1) \rangle + \\ + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{\mathbf{p}}(t), \Psi(t) \rangle dt + \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{\mathbf{p}}(t), \xi(t) \rangle dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2); \quad (5.267)$$

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t] - H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] = \\ = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Big|_*, \varepsilon \Psi(t) + \varepsilon^2 \xi(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_*, \varepsilon \eta(t) \right\rangle + \\ + \frac{1}{2} \left\langle \varepsilon \Psi(t) + \varepsilon^2 \xi(t), \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_* [\varepsilon \Psi(t) + \varepsilon^2 \xi(t)] \right\rangle + \\ + \frac{1}{2} \left\langle \varepsilon \eta(t), \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \Big|_* \varepsilon \eta(t) \right\rangle + \\ + \frac{1}{2} \left\langle \varepsilon \Psi(t) + \varepsilon^2 \xi(t), \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) \Big|_* \varepsilon \eta(t) \right\rangle + \\ + \frac{1}{2} \left\langle \varepsilon \eta(t), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right) \Big|_* [\varepsilon \Psi(t) + \varepsilon^2 \xi(t)] \right\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \quad (5.268)$$

$$= \varepsilon \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Big|_*, \Psi(t) \right\rangle + \varepsilon^2 \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Big|_*, \xi(t) \right\rangle + \varepsilon \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_*, \eta(t) \right\rangle + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \Psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_* & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) \Big|_* \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right) \Big|_* & \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \Big|_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \right\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.269)$$

Так как мы приняли, что  $\delta^2 J(\mathbf{u}) > 0$  и  $\varepsilon^2 > 0$ , то

$$\left\langle \Psi(t_1), \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_* \Psi(t_1) \right\rangle + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \begin{bmatrix} \Psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_* & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) \Big|_* \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right) \Big|_* & \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \Big|_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt > 0 \quad (5.270)$$

<sup>1</sup> Так как  $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ .

для всех  $\eta(t) \neq 0$ . Прежде всего заметим, что в силу уравнения (5.258) и условия  $\psi(t_0) = 0$  малые изменения  $\eta(t)$  будут вызывать малые изменения  $\psi(t)$ . Обратное утверждение несправедливо; иначе говоря, можно выбрать больше изменения  $\eta(t)$ , для которого  $\psi(t)$  будет мало. Причина этого в том, что  $\eta(t)$  есть вход (или управление) системы с переменными параметрами, которая вначале находится в покое и выход которой равен  $\psi(t)$ . Это положение иллюстрируется рис. 5.8. Таким образом, для того чтобы неравенство имело место, члены уравнения (5.270), содержащие  $\eta(t)$ , должны быть положительны. В частности, член

$$\left\langle \eta(t), \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \Big|_* \eta(t) \right\rangle \quad (5.271)$$

«наиболее» зависим от  $\eta(t)$ , и поэтому он должен быть положительным для всех  $\eta(t) \neq 0$ . Очевидно, это возможно лишь в том случае, когда

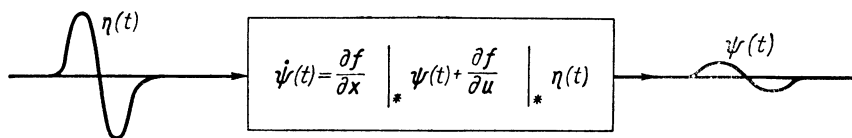


Рис. 5.8. Возмущение управления  $\eta(t)$  воздействует на линейную систему  $\dot{\psi}(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_* \psi(t) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \Big|_* \eta(t)$ . «Большому» сигналу  $\eta(t)$  может соответствовать «малый»  $\psi(t)$

матрица  $\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \Big|_*$  положительно определена<sup>1</sup> для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ . Но если

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \Big|_* \text{ положительно определена,} \quad (5.272)$$

то экстремум  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, t]$ , рассматриваемый как функция от  $\mathbf{u}$ , при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$  является минимумом. Таким образом, эвристически доказана следующая теорема.

**Теорема 5.3.** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — допустимое управление и  $\mathbf{x}^*(t)$  — траектория системы (5.196), соответствующая  $\mathbf{u}^*(t)$ , исходящая из  $\mathbf{x}_0$  [т. е.  $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ ]. Необходимым условием оптимальности  $\mathbf{u}^*(t)$  является существование функции  $\mathbf{p}^*(t)$  такой, что

а)  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$  есть решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]; \\ \dot{\mathbf{p}}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t], \end{aligned} \right\} \quad (5.273)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^*(t_0) &= \mathbf{x}_0; \\ \mathbf{p}^*(t_1) &= \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^*(t_1)]; \end{aligned} \right\} \quad (5.274)$$

б) гамильтониан  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, t]$ , рассматриваемый как функция  $\mathbf{u}$ , имеет минимум (возможно локальный) при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$  для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ .

Прокомментируем эту теорему. Во-первых, мы не доказали ее строго; однако строгое доказательство, опирающееся на вариационные методы, довольно сложно, требует различных предположений (например, соответ-

<sup>1</sup> См. § 2.15.

ствующую дифференцируемость функций) и, во всяком случае, находится вне рамок настоящей книги. Во-вторых, в противоположность теореме 3.2 мы показали лишь, что  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$  является локальным минимумом  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, t]$ . На практике, как мы это увидим при обсуждении принципа минимума,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$  является абсолютным минимумом  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, t]$ . Таким образом, можно обнаружить необходимость другого математического аппарата, помимо основных вариационных принципов. Действительно, в последующем параграфе, где рассматривается задача с закрепленным концом, обнаружится трудность доказательства того, что оптимальное управление экстремизирует  $H$ . Это и определит необходимость искать новый подход к решению подобного рода задач.

Наконец, заметим, что полная производная от  $H$  по времени вдоль оптимальной траектории равна частной производной  $H$  по времени:

$$\begin{aligned} \frac{dH[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]}{dt} &= \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Big|_*, \dot{\mathbf{x}}^*(t) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \Big|_*, \dot{\mathbf{p}}^*(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_*, \dot{\mathbf{u}}^*(t) \right\rangle + \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_* = \end{aligned} \quad (5.275)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_* \quad (5.276)$$

на основании уравнений (5.273) и (5.253). Это означает, что если  $H$  от  $t$  явно не зависит, то  $H$  постоянна вдоль оптимальной траектории [сравните с (5.176)].

**Пример 5.8.** Для иллюстрации характера трудностей, возникающих при проведении строгого доказательства вариационными методами, покажем, что из соотношения (5.270) следует неотрицательная определенность  $\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \Big|_*$  для частного случая  $n = m = 1$ , т. е. случая, когда  $x(t)$  и  $u(t)$  являются скалярными функциями времени. Запишем уравнение системы

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t].$$

Уравнение возмущения (5.258) примет вид

$$\dot{\psi}(t) = a(t)\psi(t) + b(t)\eta(t), \quad (5.277)$$

где для удобства обозначим  $a(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_*$  и  $b(t) = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_*$ . При принятых предположениях уравнение (5.270) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \Big|_* \psi^2(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Big|_* \psi^2(t) + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \Big|_* \psi(t)\eta(t) + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_* \eta^2(t) \right] dt > 0 \quad (5.278)$$

для всех  $\eta(t) \neq 0$ .

Покажем, что из уравнения (5.278) следует

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_* \geq 0. \quad (5.279)$$

Допустим,  $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_* < 0$  при  $t = \hat{t}$ . В силу непрерывности  $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_*$ , можно предположить, что в малой окрестности  $S$  точки  $\hat{t}$  (т. е. на малом интервале около  $\hat{t}$ )

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_* < -\alpha, \quad \alpha > 0. \quad (5.280)$$

Покажем, что  $b(t) \neq 0$  на любом подынтервале из  $S$ . Если  $b(t) = 0$  на подынтервале  $S_1 \subset S$ , то, полагая  $\eta(t) = 0$  на дополнении к  $S_1$  (т. е.  $\eta(t) = 0$  для  $t \in [t_0, t_1] - S_1$ ) и принимая, например,  $\eta(t) = 1$  на  $S_1$ , найдем, что левая часть уравнения (5.278) окажется

отрицательной [так как  $\psi(t)$  при таком выборе  $\eta(t)$  тождественно равно нулю]. Таким образом, можно считать, что  $b(t) \neq 0$  на  $S$ . Из выражения (5.277) следует, что

$$\eta(t) = b^{-1}(t) \dot{\psi}(t) - b^{-1}(t) a(t) \psi(t). \quad (5.281)$$

Ограничим выбор  $\eta(t)$  функциями, которые равны нулю на дополнении к  $S$  (т. е. на  $[t_0, t_1] - S$ ) и для которых  $\psi$  равно нулю в конечных точках  $S$ . Иначе говоря, если  $S = [\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon]$ , то  $\eta(t) = 0$  для  $t_0 \leq t < \hat{t} - \varepsilon$  и  $\hat{t} + \varepsilon < t \leq t_1$ , а  $\psi(\hat{t} - \varepsilon) = \psi(\hat{t} + \varepsilon) = 0$ . Для таких функций  $\eta(t)$  уравнение (5.278) запишется в виде

$$\int_{\hat{t}-\varepsilon}^{\hat{t}+\varepsilon} \left\{ \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_* \psi^2(t) + 2 \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right|_* \psi(t) [b^{-1}(t) \dot{\psi}(t) - b^{-1}(t) a(t) \psi(t)] + \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right|_* \eta^2(t) \right\} dt > 0. \quad (5.282)$$

Принтегрировав по частям член, содержащий  $\dot{\psi}(t)$ , получим неравенство

$$\int_{\hat{t}-\varepsilon}^{\hat{t}+\varepsilon} \left[ Q(t) \psi^2(t) + \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right|_* \eta^2(t) \right] dt > 0, \quad (5.283)$$

где

$$Q(t) = \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_* - \frac{d}{dt} \left[ \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right|_* b^{-1}(t) \right] - 2 \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right|_* b^{-1}(t) a(t). \quad (5.284)$$

Полагая, что  $\varphi(t) = \Phi(t, \hat{t} - \varepsilon)$  есть фундаментальное решение (матрица) уравнения (5.277) и что  $\varphi(t) \neq 0$ , имеем

$$\psi(t) = \varphi(t) \int_{\hat{t}-\varepsilon}^t \varphi^{-1}(\tau) b(\tau) \eta(\tau) d\tau. \quad (5.285)$$

Так как  $\varphi(\hat{t}) \neq 0$  и  $b(\hat{t}) \neq 0$ , то можно считать, что для достаточно малого  $\varepsilon$

$$\frac{\varphi^2(t)}{b^2(t)} > \beta > 0 \quad (5.286)$$

при  $t$  из  $[\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon]$ .

В силу непрерывности, можно также считать, что

$$\max_{t \in [\hat{t}-\varepsilon, \hat{t}+\varepsilon]} |Q(t) \varphi^2(t)| \leq M < \infty. \quad (5.287)$$

Уравнения (5.286) и (5.287) остаются справедливыми и при уменьшении  $\varepsilon$ , выберем  $\varepsilon$  настолько малым, чтобы

$$-\alpha\beta \frac{2\pi^2}{\varepsilon} + 2M\varepsilon < 0, \quad (5.288)$$

где  $\alpha$  определяется уравнением (5.280). Далее положим

$$\bar{\eta}(t) = b^{-1}(t) \varphi(t) \frac{\pi}{\varepsilon} \sin \frac{2\pi(t - \hat{t})}{\varepsilon}. \quad (5.289)$$

Тогда соответствующее решение  $\bar{\psi}(t)$  уравнения (5.277) запишется в виде

$$\bar{\psi}(t) = \varphi(t) \int_{\hat{t}-\varepsilon}^t \frac{\pi}{\varepsilon} \sin \frac{2\pi(\tau - \hat{t})}{\varepsilon} d\tau = \varphi(t) \sin^2 \frac{\pi(t - \hat{t})}{\varepsilon}, \quad (5.290)$$

и поэтому  $\bar{\psi}(\hat{t} - \varepsilon) = \bar{\psi}(\hat{t} + \varepsilon) = 0$ . При таком выборе  $\bar{\eta}(t)$  уравнение (5.283) будет иметь вид

$$\int_{\hat{t}-\varepsilon}^{\hat{t}+\varepsilon} \left[ Q(t) \varphi^2(t) \sin^4 \frac{\pi(t-\hat{t})}{\varepsilon} \right] dt + \\ + \int_{\hat{t}-\varepsilon}^{\hat{t}+\varepsilon} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_* \frac{\varphi^2(t)}{b^2(t)} \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{2\pi(t-\hat{t})}{\varepsilon} \right] dt > 0. \quad (5.291)$$

Левая часть уравнения (5.291) вследствие условий (5.286) и (5.287) меньше, чем

$$2M\varepsilon - \alpha\beta \frac{2\pi^2}{\varepsilon}.$$

Таким образом, приходим к противоречию, которое и доказывает справедливость соотношения (5.279). Иначе говоря, считая, что неравенство (5.280) справедливо, мы оказались в состоянии отыскать управление  $\bar{\eta}(t)$ , для которого неравенство (5.278) не выполняется. Это приводит нас к заключению, что условие (5.280) не может быть справедливо (см. [80]).

### 5.8. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ С НЕЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНЦОМ

Усилим необходимые условия предыдущего параграфа, с тем чтобы получить некоторые локальные достаточные условия, которые будут использоваться нами в гл. 9. Ранее мы предполагали, что оптимальное управление  $\mathbf{u}^*$  существует, и нашли определенные условия, которые при этом должны удовлетворяться. Теперь допустим, что для управления  $\hat{\mathbf{u}}$  удовлетворяются определенные условия. На основании этого докажем оптимальность управления (локальную)  $\hat{\mathbf{u}}$ . Исследования покажут различия между необходимыми и достаточными условиями.

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (5.292)$$

где  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{f}$  —  $n$ -мерные векторы и  $\mathbf{u}$  —  $m$ -мерный вектор, причем  $0 < m \leq n$ .

Будем считать, что  $\mathbf{u}$  не ограничено и  $t_0$  — начальный момент времени, причем

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.293)$$

— начальное состояние. Множество цели  $S$  имеет вид  $R_n \times \{t_1\}$ , где  $t_1$  — фиксировано и  $t_1 > t_0$ . Функционал преобразования имеет вид

$$J(\mathbf{u}) = K[\mathbf{x}(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (5.294)$$

где  $K$  и  $L$  — достаточно дифференцируемые действительные функции и  $\mathbf{x}(t)$  — траектория, удовлетворяющая (5.292), исходящая из  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , являющаяся результатом действия управления  $\hat{\mathbf{u}}$ .

Нашей задачей вновь является:

Найти управление  $\mathbf{u}(t)$ , минимизирующее функционал преобразования  $J(\mathbf{u})$ .

Прежде чем перейти к достаточным условиям, посмотрим, к чему приводят возмущения управления  $\hat{\mathbf{u}}$  (которое может и не быть оптимальным). Обозначим через  $\hat{\mathbf{x}}$  траекторию, удовлетворяющую уравнению (5.292), исходящую из  $\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0$  и произведенную управлением  $\hat{\mathbf{u}}$ .

Если  $\mathbf{u}$  — возмущенное управление  $\hat{\mathbf{u}}$ :

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}}(t) + \varepsilon \eta(t), \quad (5.295)$$

то соответствующую  $\mathbf{u}(t)$  траекторию  $\mathbf{x}(t)$  можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) + \varepsilon \psi(t) + o(\varepsilon), \quad (5.296)$$

где  $\psi(t)$  — решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{\psi}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\wedge} \psi(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\wedge} \eta(t) \quad (5.297)$$

с начальным условием

$$\psi(t_0) = \mathbf{0}, \quad (5.298)$$

где значок  $\left|_{\wedge}$  обозначает, что величина должна вычисляться вдоль  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ . Например,  $\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\wedge}$  — якобиан от  $\mathbf{f}$  по  $\mathbf{x}$ , вычисленный при  $[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t]$ .

Полагая, что  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t)$  — гамильтониан данной задачи, т. е.

$$H[\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t] = L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \rangle, \quad (5.299)$$

и обозначив через  $\hat{\mathbf{p}}(t)$  решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) = - \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\wedge} [\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{p}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] = \quad (5.300)$$

$$= - \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\wedge} - \left( \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\wedge} \right)' \hat{\mathbf{p}}(t), \quad (5.301)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\hat{\mathbf{p}}(t_1) = \left. \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\wedge}, \quad (5.302)$$

мы, как и в предыдущем параграфе, можем заключить

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) - J(\hat{\mathbf{u}}) &= \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\wedge}, \eta(t) \right\rangle dt + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\langle \psi(t_1), \left. \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\wedge} \psi(t_1) \right\rangle + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\wedge} & \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) \right|_{\wedge} \right. \\ \left. \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right) \right|_{\wedge} \right) & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_{\wedge} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \right\rangle + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5.303)$$

где  $\left|_{\wedge}$  обозначает, что величина вычисляется вдоль  $\hat{\mathbf{x}}$ ; например  $\left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\wedge}$  — градиент  $H$  по отношению к  $\mathbf{u}$ , вычисленный при  $[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{p}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t]$ . Итак, имеем

$$\delta J(\hat{\mathbf{u}})(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\wedge}, \eta(t) \right\rangle dt \quad (5.304)$$

и

$$\begin{aligned} \delta^2 J(\hat{\mathbf{u}})(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) &= \frac{\varepsilon^2}{2} \left\langle \psi(t_1), \left. \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\wedge} \psi(t_1) \right\rangle + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\wedge} & \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) \right|_{\wedge} \right. \\ \left. \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right) \right|_{\wedge} \right) & \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_{\wedge} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (5.305)$$



Получив последние выражения, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 5.4.** Пусть  $\hat{\mathbf{u}}$  удовлетворяет условиям:

а)  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\wedge} = \mathbf{0}$  для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ ; (5.306)

б) для  $\mathbf{u}$ , достаточно близкого к  $\hat{\mathbf{u}}$ , существует неотрицательная кусочно-непрерывная функция  $M(t)$  такая, что величина члена  $\circ(\varepsilon^2)$  в уравнении (5.303) удовлетворяет неравенству

$$|\circ(\varepsilon^2)| \leq |\varepsilon|^3 \|\Psi(t_1)\|^3 M(t_1) + |\varepsilon|^3 \int_{t_0}^{t_1} \|\eta(t)\|^3 M(t) dt; \quad (5.307)$$

в) существует положительное число  $k_1$  такое, что

$$\left\langle \mathbf{v}, \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{\wedge} \mathbf{v} \right\rangle \geq k_1 \|\mathbf{v}\|^2 M(t_1) \quad (5.308)$$

для всех векторов  $\mathbf{v}$  из  $R_n$ , т. е. симметричная матрица  $\frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{\wedge}$  положительно определена, если  $M(t_1) > 0$ , и положительно полуопределена, если  $M(t_1) = 0$ <sup>1</sup>;

г) существует положительное число  $k_2$  такое, что

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{\wedge} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) \Big|_{\wedge} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right) \Big|_{\wedge} & \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \Big|_{\wedge} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right\rangle \geq k_2 \|\mathbf{w}\|^2 M(t) \quad (5.309)$$

для всех  $\mathbf{v}$  из  $R_n$ ,  $\mathbf{w}$  из  $R_m$  и для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ . В выражении (5.309) равенство имеет место лишь при  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ . Это означает, что матрица  $\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \Big|_{\wedge}$  положительно определена для  $t$  из  $[t_0, t_1]$  и вся матрица размера  $n + m \times n + m$ , входящая в уравнение (5.309), положительно полуопределена.

В этом случае  $\hat{\mathbf{u}}$  есть локальный минимум  $J$ .

**Доказательство:** Предположим, что условие б) удовлетворяется, если

$$\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\| = \max_{t \in [t_0, t_1]} \|\mathbf{u}(t) - \hat{\mathbf{u}}(t)\| < \delta. \quad (5.310)$$

Тогда, по условию а), для  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющего соотношению (5.310), получим

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) - J(\hat{\mathbf{u}}) &\geq \delta^2 J(\hat{\mathbf{u}})(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) - |\varepsilon|^3 \|\Psi(t_1)\|^3 M(t_1) - \\ &\quad - |\varepsilon|^3 \int_{t_0}^{t_1} \|\eta(t)\|^3 M(t) dt. \end{aligned} \quad (5.311)$$

Используя соотношение (5.305) и условия в) и г), получаем, что

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) - J(\hat{\mathbf{u}}) &\geq k_1 \frac{\varepsilon^2}{2} \|\Psi(t_1)\|^2 M(t_1) + k_2 \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \|\eta(t)\|^2 M(t) dt - \\ &\quad - |\varepsilon|^3 \|\Psi(t_1)\|^3 M(t_1) - |\varepsilon|^3 \int_{t_0}^{t_1} \|\eta(t)\|^3 M(t) dt, \end{aligned} \quad (5.312)$$

<sup>1</sup> См. § 2.15.

откуда

$$J(\mathbf{u}) - J(\hat{\mathbf{u}}) \geq \left[ \frac{k_1}{2} - |\varepsilon| \|\boldsymbol{\psi}(t_1)\| \right] \varepsilon^2 \|\boldsymbol{\psi}(t_1)\|^2 M(t_1) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{k_2}{2} - |\varepsilon| \|\boldsymbol{\eta}(t)\| \right] \varepsilon^2 \|\boldsymbol{\eta}(t)\|^2 M(t) dt. \quad (5.313)$$

Но поскольку  $\boldsymbol{\psi}(t)$  есть решение уравнения (5.297) с начальным условием  $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{0}$ , получим

$$|\varepsilon| \|\boldsymbol{\psi}(t_1)\| \leq N |\varepsilon| \max_{t \in [t_0, t_1]} \|\boldsymbol{\eta}(t)\| = N |\varepsilon| \|\boldsymbol{\eta}\| \quad (5.314)$$

для некоторого  $N > 0$ , которое не зависит от  $\boldsymbol{\eta}$ . Так как  $k_1$  и  $k_2$  положительны, то существует  $\delta_0$  такое, что

$$0 < \delta_0 < \delta \quad (5.315)$$

и

$$\frac{k_1}{2} > N \delta_0, \quad \frac{k_2}{2} > \delta_0. \quad (5.316)$$

Следовательно,

$$J(\mathbf{u}) - J(\hat{\mathbf{u}}) \geq 0 \quad (5.317)$$

для всех  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющих условию  $\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\| < \delta_0$ . Итак, мы показали, что  $\hat{\mathbf{u}}$  есть локальный минимум  $J$ .

**Следствие 5.1.** Предположим, что  $M(t) = 0$ . Для того чтобы  $\hat{\mathbf{u}}$  было локальным минимумом  $J$ , достаточно выполнения условий

а)  $\left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\hat{\mathbf{u}}} = \mathbf{0}$ ;

б)  $\left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_{\hat{\mathbf{u}}}$  положительно определена;

в) матрица размера  $n + m \times n + m$ , входящая в уравнение (5.309), должна быть положительно полуопределена.

**Следствие 5.2.** Предположим, что динамическая система линейна, т. е.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.318)$$

и функционалом преобразования  $J$  является квадратичная форма

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(t_1), \mathbf{F} \mathbf{x}(t_1) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{Q}(t) \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \rangle] dt, \quad (5.319)$$

где  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  и  $\mathbf{R}(t)$  — соответственно  $n \times n$ ,  $n \times n$  и  $m \times m$  матрицы. Для того чтобы управление  $\hat{\mathbf{u}}$  было локальным минимумом функционала  $J$ , достаточно выполнения условий:

а)  $\mathbf{R}(t)$  положительно определена для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ ;

б)  $\mathbf{Q}(t)$  положительно полуопределена для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ ;

в)  $\mathbf{F}$  положительно полуопределена;

г)  $\hat{\mathbf{u}}$  — решение уравнения

$$\mathbf{R}(t) \hat{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}'(t) \hat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0}, \quad (5.320)$$

где  $\hat{\mathbf{p}}(t)$  — решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) = -\mathbf{A}'(t) \hat{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{Q}(t) \hat{\mathbf{x}}(t), \quad (5.321)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\widehat{p}(t_1) = F\widehat{x}(t_1), \quad (5.322)$$

где, в свою очередь,  $\widehat{x}(t)$  — решение уравнения (5.318), соответствующее  $\widehat{u}$ .

Следствие 5.2. будет часто использоваться в гл. 9.

**Упражнение 5.13.** Докажите следствие 5.2.

В § 5.7 мы показали, что если  $u^*$  есть оптимальное управление, то  $\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_* = 0$  и матрица  $\left. \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right|_*$  положительно определена.

Как было принято выше, управление  $\widehat{u}$  удовлетворяет этим двум условиям и, кроме того, дополнительным условиям б), в) и г) теоремы 5.4, а затем доказано, что  $\widehat{u}$  является локальным оптимальным управлением. Поэтому дополнительные условия теоремы 5.4 были названы усиливающими необходимыми условиями § 5.7.

**Упражнение 5.14.** Рассмотрите систему первого порядка

$$\dot{x}(t) = -x(t) - \frac{x^3(t)}{3} + u(t); \quad x(0) = x_0$$

с функционалом стоимости вида

$$J(u) = \frac{1}{2} x^2(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)] dt.$$

Предположим, что  $u^*(t)$  — оптимальное управление,  $x^*(t)$  — соответствующая оптимальная траектория, а возмущенные управление и траектория задаются следующими соотношениями:

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon \eta(t)$$

и

$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon \varphi(t).$$

При этом необходимо:

а) показать, что

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -x^*(t) - \frac{1}{3} x^{*3}(t) + u^*(t) - \varepsilon \varphi(t) [1 + x^{*2}(t)] + \\ & + \varepsilon \eta(t) - \varepsilon^2 \varphi^2(t) x^*(t) - \frac{\varepsilon^3 \varphi^3(t)}{3}; \end{aligned}$$

б) найти в выражении пункта (а) члены, соответствующие следующим членам уравнения (5.208):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_*, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_* \quad \text{и} \quad o(\varepsilon);$$

в) проверить уравнение (5.215) для этого частного случая;

г) показать, что гамильтониан данной задачи является выражение

$$H(x, p, u, t) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} u^2 - xp - \frac{1}{3} x^3 p + up;$$

д) показать, что члены уравнения (5.226) для данной задачи имеют вид

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{*p} = x^*(t) - p(t) - x^{*2}(t) p(t);$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_{*p} = u^*(t) + p(t);$$

$$o(\varepsilon) = \frac{1}{2!} [1 - 2x^*(t) p(t)] [x(t) - x^*(t)]^2 + \frac{1}{2!} [u(t) - u^*(t)]^2 -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3!} 2p(t) [x(t) - x^*(t)]^3 = \\
& = \frac{1}{2!} [1 - 2x^*(t)p(t)] \varepsilon^2 \psi^2(t) + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \eta^2(t) - \frac{2}{3!} p(t) \varepsilon^3 \phi^3(t);
\end{aligned}$$

е) определить члены, соответствующие обозначенным через  $\circ(\varepsilon)$  в уравнениях (5.227), (5.228) и (5.230);

ж) записать условие (5.232) в развернутом виде;

з) показать, что  $p(t)$  должно быть решением линейного дифференциального уравнения

$$\dot{p}(t) = -x^*(t) + [1 + x^{*2}(t)] p(t),$$

а  $p^*(t)$  должно быть единственным решением этого дифференциального уравнения, удовлетворяющим условию

$$p^*(1) = x^*(1);$$

и) используя условие (5.253), показать, что  $u^*(t)$  и  $p^*(t)$  должны быть связаны соотношением

$$u^*(t) = -p^*(t);$$

к) показать, что уравнение (5.263) для данной задачи имеет вид

$$\delta^2 J(u^*)(u - u^*) = \varepsilon^2 \psi^2(1) + \varepsilon^2 \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 - 2x^*(t)p^*(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt;$$

л) показать, что  $x^*(t)$  и  $p^*(t)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{x}^*(t) = -x^*(t) - \frac{x^{*3}(t)}{3} - p^*(t);$$

$$\dot{p}^*(t) = -x^*(t) + p^*(t) + x^{*2}(t)p^*(t)$$

с граничными условиями

$$x^*(0) = x_0; \quad p^*(1) = x^*(1);$$

м) предположив, что  $\hat{u}$  — управление, для которого существует соответствующее  $\hat{p}$ , причем  $\hat{u}$ ,  $\hat{p}$  и  $\hat{x}$  удовлетворяют необходимым условиям и кроме того соотношению

$$\hat{x}(t)\hat{p}(t) \leq \frac{1}{2} \text{ для } t \text{ из } [0, 1],$$

показать, что  $\hat{u}$  должно быть локальным минимумом  $J$ .

**Упражнение 5.15.** Рассмотрите систему

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -x_2(t); & x_1(0) &= \xi_1; \\
\dot{x}_2(t) &= -x_2(t)t^2 + u(t); & x_2(0) &= \xi_2
\end{aligned}$$

с функционалом стоимости

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x_1^2(t)t^2 + x_2^2(t) + u^2(t)] dt$$

и напишите в развернутом виде следующие уравнения: (5.208), (5.211), (5.213), (5.215), (5.225), (5.227), (5.228), (5.230), (5.236), (5.237), (5.239), (5.240)—(5.243), (5.263), (5.271), (5.273), (5.303) и (5.309).

**Упражнение 5.16.** Повторите то же самое для системы

$$\dot{x}(t) = -e^{-x^2(t)}x(t) + u(t)x(t) + u(t); \quad x(0) = x_0$$

с функционалом

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^4(t) + u^2(t)] dt.$$

## 5.9. ЗАДАЧА С ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНЦОМ

Рассмотрим задачу с закрепленным концом, пользуясь вариационными методами. Пытаясь показать, что оптимальное управление должно экстремизировать гамильтониан, мы не можем решить задачу до конца, и это вынуждает нас искать другой подход к задаче управления.

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (5.323)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{f}$  —  $n$ -мерные векторы и  $\mathbf{u}(t)$  —  $m$ -мерный вектор, причем  $0 < m \leq n$ . Будем считать, что управление не ограничено,  $t_0$  — начальный момент времени, т. е.

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.324)$$

и область цели имеет вид

$$S = \{\mathbf{x}_1, t_1\}, \quad (5.325)$$

где  $\mathbf{x}_1$  — заданный элемент из  $R_n$  и  $t_1$  — фиксированное время  $t_1 > t_0$ .

Иначе говоря, мы хотим, чтобы наше движение начиналось в точке  $\mathbf{x}_0$ , а заканчивалось в точке  $\mathbf{x}_1$ . Пусть  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  — «достаточно» дифференцируемая действительная функция и

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (5.326)$$

— функционал, где  $\mathbf{x}(t)$  — траектория, удовлетворяющая уравнению (5.323), начинающаяся в точке  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  и произведенная управлением  $\mathbf{u}(t)$ . Задача формулируется следующим образом: отыскать допустимое управление  $\mathbf{u}(t)$ , переводящее  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  в  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$  и минимизирующее функционал  $J(\mathbf{u})$  относительно всех таких управлений.

Попытаемся получить необходимые условия, подобные тем, которые даются теоремами 5.2 и 5.3 с помощью пошаговых операций (аналогично § 5.6 и 5.7).

**Шаг 1. Предположение существования оптимума.** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — оптимальное управление и  $\mathbf{x}^*(t)$  — соответствующая оптимальная траектория. Функции  $\mathbf{u}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$  удовлетворяют условиям

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]; \quad (5.327)$$

$$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}^*(t_1) = \mathbf{x}_1. \quad (5.328)$$

Если  $\mathbf{u}(t)$  — любое допустимое управление, для которого соответствующая ему траектория начинается в точке  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  и оканчивается в  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ , то

$$\begin{aligned} J^* = J(\mathbf{u}^*) &= \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] dt \leq \\ &\leq J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt. \end{aligned} \quad (5.329)$$

**Шаг 2. Возмущения.** Поступая так же, как и в § 5.7, получим соотношения

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t); \quad (5.330)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \varepsilon \boldsymbol{\psi}(t) + o(\varepsilon); \quad (5.331)$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_* \boldsymbol{\psi}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_* \boldsymbol{\eta}(t), \quad \boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{0}, \quad (5.332)$$

которые связывают возмущения управления с соответствующими им возмущениями траектории. Однако требуется, чтобы возмущенная траектория заканчивалась в точке  $\mathbf{x}_1$  [т. е.  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ ]. Это означает, что

$$\mathbf{0} = \varepsilon \Psi(t_1) + o(\varepsilon). \quad (5.333)$$

Отметим, что  $\Psi(t)$  не зависит от  $\varepsilon$ , так как  $\Psi(t)$  является функцией только  $\eta(t)$  (и оптимальной траектории), и поэтому

$$\Psi(t_1) = \mathbf{0}. \quad (5.334)$$

Следовательно, вариация управления  $\varepsilon \eta(t)$  не может быть совершенно произвольной. Действительно, если  $\Phi(t, t_0)$  — фундаментальная матрица линейной системы (5.332), то  $\eta(t)$  должно удовлетворять уравнению

$$\mathbf{0} = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t, t_0) \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_* \eta(t) dt; \quad (5.335)$$

это условие аналогично условию (5.121).

Теперь можно ввести гамильтониан  $H$  и дополнительную переменную  $\mathbf{p}(t)$ , точно так же, как в § 5.6 и 5.7. Пусть  $\mathbf{p}(t)$  — произвольная кусочно-непрерывная функция и гамильтониан  $H$  дается выражением

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \rangle. \quad (5.336)$$

На основе доказательств, аналогичных предыдущим, заключаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_{*, \mathbf{p}}, \eta(t) \right\rangle dt = 0 \quad (5.337)$$

для всех  $\eta(t)$ , удовлетворяющих (5.335), где  $\mathbf{p}(t)$  есть решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = - \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^*(t), t} = \quad (5.338)$$

$$= - \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t} - \left( \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t} \right)' \mathbf{p}(t). \quad (5.339)$$

Очень трудно показать, что существует решение этого уравнения  $\mathbf{p}^*(t)$ , для которого

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t} = \mathbf{0}. \quad (5.340)$$

Вопрос о существовании такого  $\mathbf{p}^*(t)$  весьма важен, так как он связан с понятиями управляемости и нормальности вариационной задачи, но последний находится вне рамок настоящей книги. Советуем читателю самостоятельно рассмотреть этот вопрос и убедиться в тех трудностях, которые лежат на пути его решения. При этом рекомендуем воспользоваться работами [26] и [158].

Для преодоления этих трудностей примем другой подход к решению задачи, который и приведет нас к принципу минимума Понтрягина. Перед тем, как приступить к детальному исследованию этой новой постановки задачи, посвятим следующий параграф трем вопросам: обзору сделанного ранее, обсуждению общих результатов и рассмотрим другие причины (например, естественные ограничения в задачах и устранение жестких требований в отношении дифференцируемости  $L$ ), служащие основанием для перехода к новой точке зрения.

## 5.10. ОБСУЖДЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА

Основной целью настоящего параграфа является рассмотрение необходимых и достаточных (локальных) условий, полученных в § 5.7 и 5.8. В заключение параграфа мы укажем причины, по которым целесообразно решать задачу управления, основываясь на другом подходе.

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (5.341)$$

где состояние  $\mathbf{x}(t)$  есть  $n$ -мерный вектор и управление  $\mathbf{u}(t)$  —  $m$ -мерный вектор, причем  $0 < m \leq n$ . Будем считать, что управление неограничено, что  $t_0$  — начальное время, при котором

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.342)$$

есть начальное состояние, а область цели имеет вид

$$S = R_n \times \{t_1\}, \quad (5.343)$$

где  $t_1$  — фиксированное время,  $t_1 > t_0$ . Иначе говоря, мы имеем дело с задачей с фиксированным временем и незакрепленным концом. Предположим, что функционал имеет вид

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (5.344)$$

т. е. в него не входит «стоимость» конечного состояния,  $K[\mathbf{x}(t_1)] \equiv 0$ . Итак, задача заключается в том, чтобы отыскать  $\mathbf{u}$ , минимизирующее  $J(\mathbf{u})$ . Так как мы собираемся иллюстрировать необходимые и достаточные условия с помощью «символических графиков», напомним, что:

1.  $\mathbf{u}'(t)$  обозначает величину управления в момент времени  $t$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , т. е.  $\mathbf{u}'(t)$  — элемент из  $R_m$ .

2.  $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$  обозначает всю функцию управления на интервале  $[t_0, t_1]$ . Для упрощения мы часто будем писать просто  $\mathbf{u}$ , имея в виду, что

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{[t_0, t_1]}. \quad (5.345)$$

Имея дело с различными управлениями на  $[t_0, t_1]$ , мы будем для их различия использовать верхний индекс, например,

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}_{[t_0, t_1]}^i, \quad (5.346)$$

что для заданного значения  $i$  будет обозначать конкретную функцию управления, а вектор  $\mathbf{u}^i(t)$  будет обозначать величину этой конкретной функции управления в момент времени  $t$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ .

3. Записывая  $\mathfrak{F}([t_0, t_1], R_m)$ , будем иметь в виду функциональное пространство<sup>1</sup> всех кусочно-непрерывных функций, преобразующих  $[t_0, t_1]$  в  $R_m$ . Так как это множество допустимых управлений, то в дальнейшем вместо символа  $\mathfrak{F}([t_0, t_1], R_m)$  будем пользоваться символом  $\mathcal{U}$ , т. е.

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \text{ есть допустимое управление}\} = \mathfrak{F}([t_0, t_1], R_m). \quad (5.347)$$

Конкретные функции управления  $\mathbf{u}^i$  будем называть точками функционального пространства  $\mathcal{U}$ .

4. Говоря « $\hat{\mathbf{u}}$  близко к  $\mathbf{u}$ », будем иметь в виду, что расстояние в функ-

<sup>1</sup> См. § 3.15, в частности (3.136).

циональном пространстве  $\mathcal{U}$  между  $\hat{u}$  и  $u$  мало. Напомним, что в § 3.15 [уравнение (3.124)] мы определили расстояние  $d(\hat{u}, u)$ , положив

$$d(\hat{u}, u) = \|\hat{u} - u\| = \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|\hat{u}(t) - u(t)\|. \quad (5.348)$$

Функция  $\hat{u}_{[t_0, t_1]}$  на рис. 5.9 «ближе» к функции  $u_{[t_0, t_1]}$ , чем функция  $\tilde{u}_{[t_0, t_1]}$

Если к системе, которая при  $t = t_0$  находится в известном состоянии  $x_0$ , прикладывается управление  $u^i = u^i_{[t_0, t_1]}$ , то в результате получится вполне определенная траектория  $x^i = x^i_{[t_0, t_1]}$ , соответствующая  $u^i$  и, следовательно, вполне определенная (скалярная) величина  $J^i$ . Иначе говоря, имеем

$$J^i = J(u^i) = \int_{t_0}^{t_1} L[x^i(t), u^i(t), t] dt. \quad (5.349)$$

Строго говоря, функционал  $J^i$  зависит от многих обстоятельств, и его следует записать как

$$J^i = J(u^i) = J(u^i, x_0, t_0, t_1, f) \quad (5.350)$$

для того, чтобы отразить зависимость  $J^i$  от следующих факторов: начального состояния  $x_0$ , начального времени  $t_0$ , конечного времени  $t_1$ , системы  $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$  и управляющей функции  $u^i$ .

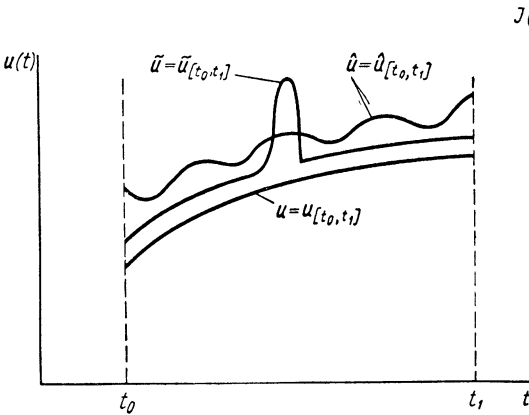


Рис. 5.9. Управление  $\hat{u}$  «ближе» к  $u$ , чем управление  $\tilde{u}$

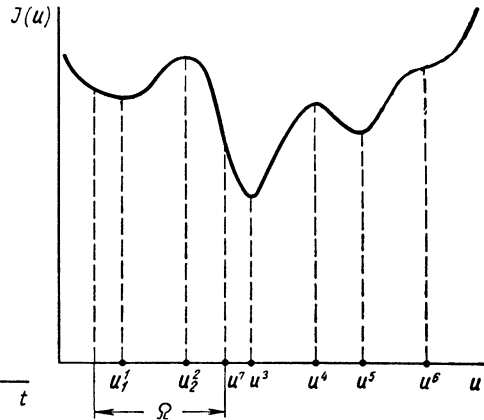


Рис. 5.10. Символический график зависимости функционала  $J(u)$  от  $u$

Однако для фиксированных  $x_0, t_0, t_1$  и  $f$  величина  $J$  является функцией только элемента  $u^i$  из  $\mathcal{U}$ . Таким образом, мы можем нарисовать символический график зависимости  $J(u)$  в функции от  $u$ , как показано на рис. 5.10. Подчеркнем, что «ось»  $\mathcal{U}$  на рис. 5.10 представляет собой функциональное пространство  $\mathcal{U}$  и что каждая «точка»  $u$  на «оси»  $\mathcal{U}$  есть функция  $u_{[t_0, t_1]}$ .

Функционал  $J(u)$ , показанный на графике рис. 5.10, имеет: абсолютный минимум при  $u^3$ , относительные минимумы при  $u^1$  и  $u^5$ , относительные максимумы при  $u^2$  и  $u^4$ ; перегиб при  $u^6$ .

Иначе говоря,  $J(u)$  обладает следующими свойствами:

а) первая вариация  $J(u)$  равна нулю при  $u^1, u^2, u^3, u^4, u^5$  и  $u^6$ ;



б) имеют место неравенства:

$$\left. \begin{aligned} J(\mathbf{u}^1) < J(\hat{\mathbf{u}}^1) & \text{ для всех } \hat{\mathbf{u}}^1 \text{ «близких» } \mathbf{u}^1; \\ J(\mathbf{u}^3) < J(\hat{\mathbf{u}}^3) & \text{ для всех } \hat{\mathbf{u}}^3 \neq \mathbf{u}^3; \\ J(\mathbf{u}^5) < J(\hat{\mathbf{u}}^5) & \text{ для всех } \hat{\mathbf{u}}^5 \text{ «близких» } \mathbf{u}^5; \\ J(\mathbf{u}^2) > J(\hat{\mathbf{u}}^2) & \text{ для всех } \hat{\mathbf{u}}^2 \text{ «близких» } \mathbf{u}^2; \\ J(\mathbf{u}^4) > J(\hat{\mathbf{u}}^4) & \text{ для всех } \hat{\mathbf{u}}^4 \text{ «близких» } \mathbf{u}^4. \end{aligned} \right\} \quad (5.351)$$

Управление  $\mathbf{u}^3$  оптимально глобально, а управления  $\mathbf{u}^1$  и  $\mathbf{u}^5$  называются оптимальными локально.

Рассмотрим теперь поведение гамильтониана  $H$  нашей задачи с функционалом, показанным на рис. 5.10. Сначала мы обсудим свойства  $H$  с аналитической точки зрения, а затем проиллюстрируем эти свойства символическими графиками.

Гамильтониан нашей задачи имеет вид

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \rangle, \quad (5.352)$$

а каноническая система векторных дифференциальных уравнений записывается в форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} [\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t]; \quad (5.353)$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (5.354)$$

со следующими граничными условиями:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad (5.355)$$

$$\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}. \quad (5.356)$$

Нас особенно интересуют решения этих уравнений для управлений  $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^6$ , которые соответствуют экстремумам  $J(\mathbf{u})$  (см. рис. 5.10).

Предположим, что  $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^6$  показаны на рис. 5.11, а и соответствующие им переходные процессы нашей системы (5.323)  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^6$ , исходящие из одного и того же начального состояния  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , изображены на рис. 5.11, б. Так как  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ , траектории  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^6$  не зависят от дополнительной переменной. На рис. 5.11, в показаны решения уравнения (5.354)  $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \dots, \mathbf{p}^6$ , соответствующие управлениям  $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^6$ . Иначе говоря,  $\mathbf{p}^i = \mathbf{p}^i_{[t_0, t_1]}$  есть решение (линейного) дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^i(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (5.357)$$

удовлетворяющее граничному условию  $\mathbf{p}^i(t_1) = \mathbf{0}$  для  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

Так как управления  $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^6$  соответствуют экстремумам  $J(\mathbf{u})$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} [\mathbf{x}^i(t), \mathbf{p}^i(t), \mathbf{u}^i(t), t] = 0 \quad (5.358)$$

для  $i = 1, 2, \dots, 6$  и  $t \in [t_0, t_1]$ . Далее, так как  $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^3$  и  $\mathbf{u}^5$  — минимумы,  $\mathbf{u}^2$  и  $\mathbf{u}^4$  — максимумы  $J(\mathbf{u})$ , а при  $\mathbf{u}^6$  имеет место перегиб  $J(\mathbf{u})$ , можно обнаружить следующие свойства матрицы  $\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2}$  размера  $m \times m$ :

$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2}$  положительно определена при  $[\mathbf{x}^j(t), \mathbf{p}^j(t), \mathbf{u}^j(t), t]$  для  $j = 1, 3, 5$ ; (5.359)

$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2}$  отрицательно определена при  $[\mathbf{x}^k(t), \mathbf{p}^k(t), \mathbf{u}^k(t), t]$  для  $k = 2, 4$ ; (5.360)

$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2}$  не является ни положительно, ни отрицательно определенной

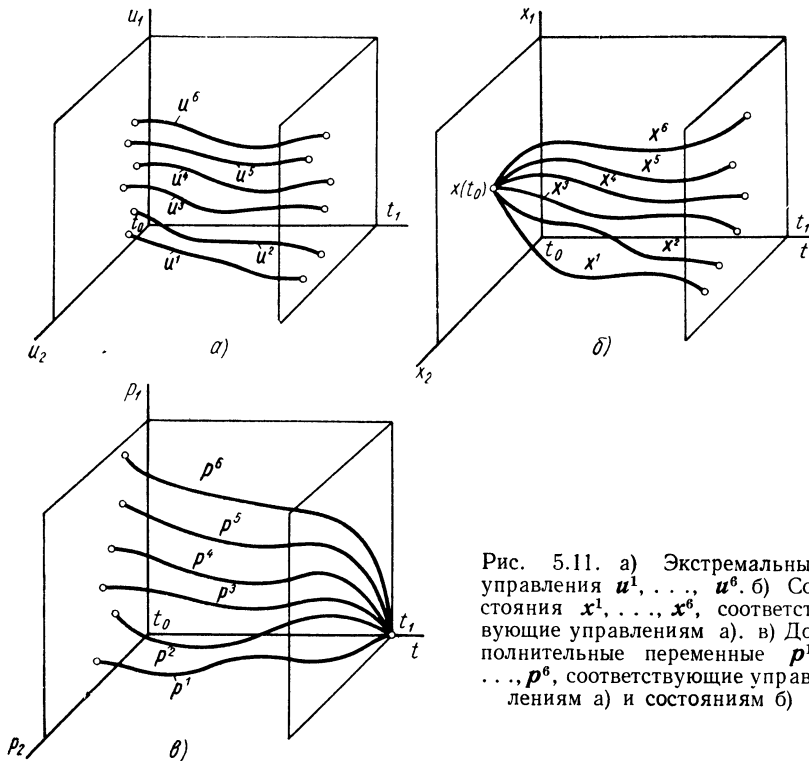


Рис. 5.11. а) Экстремальные управления  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^6$ . б) Состояния  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^6$ , соответствующие управлениям а). в) Дополнительные переменные  $\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^6$ , соответствующие управлениям а) и состояниям б)

при  $[\mathbf{x}^6(t), \mathbf{p}^6(t), \mathbf{u}^6(t); t]$ . (5.361)

Можно отметить, что матрица

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) \quad (5.362)$$

обладает свойствами:

а)  $\mathbf{Q}$  положительно определена при  $[\mathbf{x}^j(t), \mathbf{p}^j(t), \mathbf{u}^j(t), t]$  для  $j = 1, 3, 5$ ; (5.363)

б)  $\mathbf{Q}$  отрицательно определена при  $[\mathbf{x}^k(t), \mathbf{p}^k(t), \mathbf{u}^k(t), t]$  для  $k = 2, 4$ ; (5.364)

в)  $\mathbf{Q}$  не является ни отрицательно, ни положительно определенной для

$$[\mathbf{x}^6(t), \mathbf{p}^6(t), \mathbf{u}^6(t), t]. \quad (5.365)$$

Эти результаты дают основания считать, что для  $t \in [t_0, t_1]$  имеют место неравенства

$$H[\mathbf{x}^1(t), \mathbf{p}^1(t), \mathbf{u}^1(t), t] \leq H[\mathbf{x}^1(t), \mathbf{p}^1(t), \mathbf{u}^\alpha(t), t] \quad (5.366)$$

для  $\alpha = 2, 3, 4, 5, 6$ ;

$$H[\mathbf{x}^3(t), \mathbf{p}^3(t), \mathbf{u}^3(t), t] \leq H[\mathbf{x}^3(t), \mathbf{p}^3(t), \mathbf{u}^\beta(t), t] \quad (5.367)$$

для  $\beta = 1, 2, 4, 5, 6$ ;

$$H[\mathbf{x}^5(t), \mathbf{p}^5(t), \mathbf{u}^5(t), t] \leq H[\mathbf{x}^5(t), \mathbf{p}^5(t), \mathbf{u}^\gamma(t), t] \quad (5.368)$$

для  $\gamma = 1, 2, 3, 4, 6$ ;

$$H[\mathbf{x}^2(t), \mathbf{p}^2(t), \mathbf{u}^2(t), t] \geq H[\mathbf{x}^2(t), \mathbf{p}^2(t), \mathbf{u}^\delta(t), t] \quad (5.369)$$

для  $\delta = 1, 3, 4, 5, 6$ ;

$$H[\mathbf{x}^4(t), \mathbf{p}^4(t), \mathbf{u}^4(t), t] \geq H[\mathbf{x}^4(t), \mathbf{p}^4(t), \mathbf{u}^\epsilon(t), t] \quad (5.370)$$

для  $\epsilon = 1, 2, 3, 5, 6$ .

На рис. 5.12 для иллюстрации неравенств (5.366) показана зависимость  $H[\mathbf{x}^1(t), \mathbf{p}^1(t), \mathbf{u}(t), t]$  от  $\mathbf{u}(t)$ . Плоскость  $u_1 u_2$  на рис. 5.12 представляет собой пространство  $R_m$ .  $H[\mathbf{x}^1(t), \mathbf{p}^1(t), \mathbf{u}(t), t]$  имеет минимум при  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^1(t)$ . Несмотря на то, что  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^3(t)$  является глобальным минимумом  $J(\mathbf{u})$ , гамильтониан  $H[\mathbf{x}^1(t), \mathbf{p}^1(t), \mathbf{u}(t), t]$  при управлении  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^3(t)$  минимума не имеет.

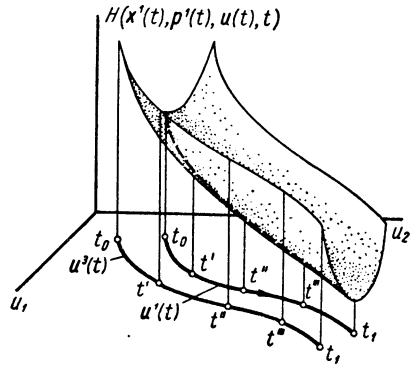


Рис. 5.12. Гамильтониан  $H[\mathbf{x}^1(t), \mathbf{p}^1(t), \mathbf{u}(t), t]$  имеет минимум при  $\mathbf{u}^1(t)$  и не имеет минимума при  $\mathbf{u}^3(t)$

На рис. 5.13 показано, что  $H[\mathbf{x}^4(t), \mathbf{p}^4(t), \mathbf{u}(t), t]$  имеет максимум при  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^4(t)$  [см. неравенство (5.370)], а с помощью рис. 5.14 иллюстрируется перегиб  $H[\mathbf{x}^6(t), \mathbf{p}^6(t), \mathbf{u}(t), t]$ , имеющий место при  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^6(t)$ .

Эти символические графики иллюстрируют локальность необходимых условий теоремы 5.3. Минимум функционала имеет место как в случае глобально оптимального управления, так и для управлений, локально минимизирующих функционал. Они иллюстрируют также то, что соответствующие

условия могут быть установлены для управления локально минимизирующим функционал. Эти символические изображения подчеркивают локальный характер необходимых условий, которые не дают достаточной информации для определения оптимального управления. Например, все три управления  $\mathbf{u}^1$ ,  $\mathbf{u}^3$  и  $\mathbf{u}^5$  удовлетворяют необходимым условиям теоремы 5.3. К выводу о том, что  $\mathbf{u}^3$  оптимально глобально, можно прийти, лишь вычислив  $J(\mathbf{u}^1)$ ,  $J(\mathbf{u}^3)$  и  $J(\mathbf{u}^5)$  и выбрав наименьшее из полученных чисел.

Еще раз вернемся к рис. 5.10. Если ограничить допустимые управления замкнутым множеством  $\Omega$ , показанным на рис. 5.10, то легко видеть, что

$$J(\mathbf{u}^7) \leq J(\mathbf{u}) \quad \text{для всех } \mathbf{u} \text{ из } \Omega. \quad (5.371)$$

Однако  $\mathbf{u}^7$  не является экстремумом  $H$ , т. е.  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}[\mathbf{x}^7(t), \mathbf{p}^7(t), \mathbf{u}^7(t), t] \neq 0$  и матрица  $\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2}[\mathbf{x}^7(t), \mathbf{p}^7(t), \mathbf{u}^7(t), t]$  может не быть положительно определенной. Таким образом, если разыскивается минимум функционала  $J(\mathbf{u})$  на множестве  $\Omega$ , необходимые условия не имеют места,

и использовавшиеся ранее вариационные методы оказываются бесполезными. Читатель должен иметь в виду, что  $u^7$  является граничной точкой  $\Omega$  и рассматривать это положение в свете результатов, полученных в § 5.2 и 5.3 с учетом замечаний § 5.5.

Мы уже отмечали, что при получении соответствующих необходимых условий для задачи с закрепленным концом на базе вариационных методов, использовавшихся в задаче со свободным концом, возникают значительные трудности. Эти трудности возникают прежде всего из-за отсутствия уверенности в том, что имеется достаточное количество вариаций [см. уравнение (5.335)]. Необходимо указать на дальнейшие причины, по которым следует вести рассмотрение с другой точки зрения.

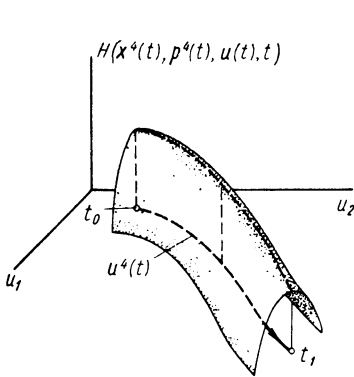


Рис. 5.13. Гамильтониан  $H [x^4(t), p^4(t), u(t), t]$  имеет максимум при  $u^4(t)$

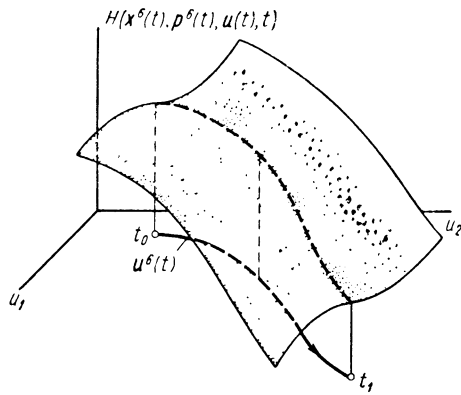


Рис. 5.14. Гамильтониан  $H [x^6(t), p^6(t), u(t), t]$  имеет перегиб при  $u^6(t)$

Во-первых, мы требовали, чтобы  $L$  и  $f$  были «достаточно» дифференцируемыми, и, в частности, чтобы  $\frac{\partial L}{\partial u}$  была определена. Это исключает критерий

$$\int_{t_0}^{t_1} |u|(t) dt, \quad (5.372)$$

который, как мы увидим в гл. 8, весьма важен. Поэтому ищем подход, не накладывающий жестких требований к дифференцируемости  $L$  и  $f$ .

Во-вторых, рассмотрев поведение  $J(u)$  на  $\Omega$  (см. рис. 5.10), найдем что наши необходимые условия неприменимы в случае замкнутого ограничивающего множества<sup>1</sup>. Таким образом, ограничения управления типа

$$|u_i(t)| \leq M \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.373)$$

далеко не элементарны. Далее, если  $\Omega$  состоит из конечного числа точек, то вариационный подход вообще неприменим. Так как ограничения имеют исключительно большое практическое значение, следует попытаться найти метод, позволяющий легко их учитывать. Наконец, мы рассматривали только такие задачи, в которых множество  $S$  представляло собой либо все пространство  $R_n$ , либо единственную точку. Однако во многих задачах множество  $S$  является «гладким» и поэтому нужен метод, позволяющий рассматривать такие задачи. Всем этим требованиям удовлетворяет принцип минимума Понтрягина, который требует относительно слабых предположений о дифференцируемости и очень хорошо подходит для задач с ограничениями, а также позволяет легко учитывать «гладкие» множества конечных состояний.

<sup>1</sup> Вариационные методы можно распространить и на случай таких ограничений [54], однако доказательства этого очень сложны.

\*

## ПРИНЦИП МИНИМУМА ПОНТРЯГИНА

### 5.11. ВВЕДЕНИЕ

Приступим к изучению знаменитого принципа минимума Понтрягина (см. [179]). При его изучении поставим перед собой следующие основные цели:

1. Дать строгую и точную формулировку принципа минимума.
2. Дать эвристическое доказательство, основанное на доказательстве, приведенном в [179], и тем самым подойти к строгому доказательству.
3. Интерпретировать принцип минимума различными способами для того, чтобы показать глубину его содержания.

В последующих главах книги рассматривается, как можно использовать принцип минимума для решения различных задач управления. Прежде всего еще раз сформулируем общую постановку задачи управления. Далее мы выделим два частных случая задачи управления и сформулируем необходимые условия оптимальности, которые в этих двух случаях составляют принцип минимума. Затем с помощью различных замен переменных будет показано, как принцип минимума для общего случая может быть получен на основе результатов для частных случаев. После этого производится эвристическое доказательство, основанное на строгом доказательстве из работы [179]. Наконец, прокомментируем полученные результаты и затем обсудим некоторые достаточные условия оптимальности.

### 5.12. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Сформулируем задачу управления (см. определение 4.9) в том виде, в котором к ней можно приложить необходимые условия оптимальности. Читатель может найти этот параграф довольно формальным. Однако, необходимо точно сформулировать предположения, при которых устанавливается принцип минимума. Предположим, что нам задана динамическая система порядка  $n$ , которая на интервале  $(T_1, T_2)$  описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, t). \quad (5.374)$$

Будем считать, что  $\Omega$  — заданное подмножество из  $R_m$  и что область допустимых управлений  $U$  есть множество всех ограниченных кусочно-непрерывных функций  $u(t)$  на  $(T_1, T_2)$  таких, что

$$u(t) \in \Omega \text{ для любого } t \text{ из } (T_1, T_2); \quad (5.375)$$

$$u(t-) = u(t) \text{ для любого } t \text{ из } (T_1, T_2). \quad (5.376)^1$$

Как обычно, переходную функцию системы будем обозначать через

$$\phi(t; u_{(t_0, t]}, x_0). \quad (5.377)$$

Пусть  $L(x, u, t)$  — действительная функция на  $R_n \times R_m \times (T_1, T_2)$  и  $K(x, t)$  — действительная функция на  $R_n \times (T_1, T_2)$ . Наконец, предположим, что  $S$  — заданное подмножество из  $R_n \times (T_1, T_2)$ , так что элементами  $S$  являются пары  $(x, t)$ , состоящие из состояния системы  $x$  и точки  $t$  на интервале определения системы.

<sup>1</sup> См. определение 3.24. Мы делаем это предположение, чтобы избежать необходимости добавлять фразу «за исключением, возможно, счетного подмножества» ко многим утверждениям. Любая ограниченная кусочно-непрерывная функция на  $(T_1, T_2)$ , удовлетворяющая условию (5.375), эквивалентна, в смысле § 3.15, функции, удовлетворяющей этому предположению.

Сделаем теперь следующие предположения:

I. Если  $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \dots, f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  обозначают компоненты  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ , будем считать, что функции

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \frac{\partial f_i}{\partial t}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.378)$$

а также функции

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \frac{\partial L}{\partial t}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (5.379)$$

непрерывны на  $R_n \times \bar{\Omega} \times (T_1, T_2)$ , где  $\bar{\Omega}$  обозначает замыкание  $\Omega$  в  $R_m$  (см. определение 3.9). Отметим, что мы не требуем непрерывности частных производных  $f_i$  и  $L$  по компонентам  $\mathbf{u}$ .

II. Если  $S$  — заданное подмножество из  $R_n \times (T_1, T_2)$ , то будем считать, что  $S$  относится к одному из видов:

а)  $S = \{\mathbf{x}_1\} \times T$ , где  $\mathbf{x}_1$  — фиксированный элемент из  $R_n$  и  $T$  — подмножество из  $(T_1, T_2)$ ;

б)  $S = R_n \times T$ , где  $T$  — подмножество из  $(T_1, T_2)$ ;

в)  $S = S_1 \times T$ , где  $S_1$  — гладкое  $k$ -мерное многообразие,  $1 \leq k \leq n - 1$ , из  $R_n$  (см. определение 3.30) и  $T$  — подмножество из  $(T_1, T_2)$ ;

г)  $S = \{(\mathbf{g}(t), t) : t \in (T_1, T_2)\}$ , где  $\mathbf{g}(t)$  — непрерывно дифференцируемая функция из  $(T_1, T_2)$  в  $R_n$ , т. е.  $\mathbf{g}(t)$  — кривая в  $R_n$  с непрерывно вращающейся касательной;

д)  $S$  — гладкое  $k + 1$ -мерное многообразие,  $1 \leq k \leq n - 1$  в  $R_n \times (T_1, T_2)$ , непрерывно дифференцируемое по  $t$ . Иначе говоря, имеется  $n - k$  функций  $g_1(\mathbf{x}, t), g_2(\mathbf{x}, t), \dots, g_{n-k}(\mathbf{x}, t)$  на  $R_n \times (T_1, T_2)$  таких, что:

$$1. S = \{(\mathbf{x}, t) : g_1(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ и } g_2(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ и } \dots \text{ и } g_{n-k}(\mathbf{x}, t) = 0\};$$

2. функции  $g_i(\mathbf{x}, t), \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)$  и  $\frac{\partial g_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$  непрерывны на  $R_n \times (T_1, T_2)$  для  $i = 1, 2, \dots, n - k$ ;

3. векторы  $\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), i = 1, 2, \dots, n - k$  — линейно независимы в каждой точке из  $S$ .

III. Если  $K(\mathbf{x}, t)$  — заданная действительная функция, определенная на  $R_n \times (T_1, T_2)$ , то будем считать, что:

а) если  $S$  имеет вид IIа, то  $K(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ ;

б) если  $S$  имеет вид IIб, то  $K(\mathbf{x}, t)$  не зависит от  $t$  [т. е.  $K(\mathbf{x}, t) \equiv K(\mathbf{x})$ ] и функции  $K(\mathbf{x}), \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}), \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x})$  непрерывны;

в) если  $S$  имеет вид IIв, то  $K(\mathbf{x}, t)$  не зависит от  $t$  [т. е.  $K(\mathbf{x}, t) = K(\mathbf{x})$ ] и функции  $K(\mathbf{x}), \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}), \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x})$  непрерывны;

г) если  $S$  имеет вид IIг, то  $K(\mathbf{x}, t)$  не зависит от  $\mathbf{x}$  [т. е.,  $K(\mathbf{x}, t) = K(t)$ ] и функции  $K(t), \frac{dK}{dt}(t), \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(t)$  непрерывны;

д) если  $S$  имеет вид IIд, то функции  $K(\mathbf{x}, t), \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial K}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x} \partial t}(\mathbf{x}, t)$  и  $\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t)$  непрерывны.

При этих предположениях будем называть  $S$  множеством цели (множеством конечных состояний) и  $K$  — функцией конечной стоимости. Мы подготовлены теперь дать определение, приводящее к формальной постановке задачи управления.

**Определение 5.8.** Пусть  $t_0$  — элемент из  $(T_1, T_2)$  и  $\mathbf{x}_0$  — элемент из  $R_n$ , тогда допустимое управление  $\mathbf{u}$  переводит  $\mathbf{x}_0$  в  $S$  [или, точнее, переводит  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S$ ], где  $S$  — множество цели, если множество

$$\{(\mathcal{G}(t; \mathbf{u}_{(t_0, t)}, \mathbf{x}_0), t) : t \geq t_0\} \quad (5.380)$$

встречает (или пересекает) множество  $S$ . Если  $\mathbf{u}$  переводит  $\mathbf{x}_0$  в  $S$  и  $t_1$  — первый момент времени после  $t_0$ , когда движение  $\mathbf{x}(t) = \mathcal{G}(t; \mathbf{u}_{(t_0, t_1)}, \mathbf{x}_0)$  вступает в  $S$ , а

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1) = \mathcal{G}(t_1; \mathbf{u}_{(t_0, t_1)}, \mathbf{x}_0), \quad (5.381)$$

то вполне определенное число:

$$J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}) = K(\mathbf{x}_1, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt = \quad (5.382)$$

$$= K[\mathcal{G}(t_1; \mathbf{u}_{(t_0, t_1)}, \mathbf{x}_0), t_1] + \int_{t_0}^{t_1} L[\mathcal{G}(t; \mathbf{u}_{(t_0, t_1)}, \mathbf{x}_0), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (5.383)$$

называется величиной функционала (или, просто, стоимостью) управления  $\mathbf{u}$ ,  $t_1$  — конечным временем и  $\mathbf{x}_1$  — конечным состоянием. Если  $\mathbf{u}$  не переводит  $\mathbf{x}_0$  в  $S$ , то полагают

$$J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}) = \infty. \quad (5.384)$$

**Определение 5.9.** Задачей оптимального управления (или просто задачей управления) для системы (5.374) при предположениях 1, 2 и 3 относительно множества  $S$ , для функционала  $J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$ , области допустимых управлений  $U$  и первоначального состояния  $\mathbf{x}_0$  в начальный момент времени  $t_0$  является отыскание управления  $\mathbf{u}$  из  $U$ , минимизирующего функционал преобразования  $J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$ . Часто не указывают в явном виде зависимость  $J$  от  $\mathbf{x}_0$  и  $t_0$  и записывают  $J(\mathbf{u})$  вместо  $J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$ .

Поставив общую задачу управления, выделим два специальных случая, которые будем называть «частным случаем 1» и «частным случаем 2».

Укажем теперь дополнительные предположения, которые должны быть сделаны при определении каждого из случаев, и предоставим читателю самому их детально сформулировать.

**Частный случай 1. Список дополнительных предположений:**

а. Уравнение системы (5.374) от  $t$  явно не зависит, т. е. уравнение системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (5.385)$$

б. Множество  $S$  определяется как

$$S = \{\mathbf{x}_1\} \times (T_1, T_2), \quad (5.386)$$

где  $\mathbf{x}_1$  — фиксированный элемент из  $R_n$ . Таким образом, частный случай 1 представляет собой задачу с закрепленным концом и нефиксированным временем.

в. Функция  $L$  явно от  $t$  не зависит (см. условия 3а), и функционал дается соотношением

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] dt, \quad (5.387)$$

где  $t_1$  не зафиксировано.

**Частный случай 2. Список дополнительных предположений:**

а. Уравнение системы (5.374) явно от  $t$  не зависит:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (5.388)$$

б. Множество имеет вид

$$S = S_1 \times (T_1, T_2), \quad (5.389)$$

где  $S$  — или гладкое подпространство размерности  $k$  из  $R_n$ , или все  $R_n$ .

Таким, образом, частный случай 2 также представляет собой задачу с нефиксированным временем.

в. Функция  $L$  явно от  $t$  не зависит, а функция  $K$  тождественно равна нулю [т. е.  $K(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ ]. Функционал дается соотношением

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] dt. \quad (5.390)$$

Эти два случая отличаются друг от друга лишь видом множества  $S$ . В следующем параграфе для них будет сформулирован принцип минимума.

**Упражнение 5.17.** Необходимо детально сформулировать частные случаи 1 и 2.

### 5.13. ПРИНЦИП МИНИМУМА ПОНТРЯГИНА

Сформулируем принцип минимума Понтрягина. Будем считать, что все предположения § 5.12 остаются в силе. Прежде чем сформулировать теорему, введем некоторую дополнительную терминологию и обозначения.

**Определение 5.10.** Пусть  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$  — действительная функция  $n$ -мерного вектора  $\mathbf{x}$ ,  $n$ -мерного вектора  $\mathbf{p}$  и  $m$ -мерного вектора  $\mathbf{u}$ :

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle, \quad (5.391)$$

где  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  — функция, определяющая систему [т. е.  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  — правая часть уравнения состояния], и  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  — подынтегральное выражение функционала;  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$  называют гамильтонианом задачи и  $\mathbf{p}$  — дополнительным вектором.

В силу предположения 1 из § 5.12 функции  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$  и  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$  непрерывны на  $R_n \times R_n \times \bar{\Omega}$ , где  $\bar{\Omega}$  есть замыкание  $\Omega$  в  $R_m$ . Далее,  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$  является вполне определенной функцией и равна

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (5.392)$$

Предположим теперь, что  $\mathbf{x}_0$  — начальное состояние и  $t_0$  — начальное время. Если  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  — некоторое допустимое управление, а  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  — траектория системы, исходящая из  $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}(t_0)$  и полученная за счет управления  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ , то тогда для любой функции  $\mathbf{p}(t)$  получим

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}[\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)] = \mathbf{f}[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)]. \quad (5.393)$$

В дополнение к этому, если  $\boldsymbol{\pi}$  — любой  $n$ -мерный вектор, то линейное дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)] = \\ &= -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)] - \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)] \right)' \mathbf{p}(t) \end{aligned} \quad (5.394)$$

имеет единственное решение  $\mathbf{p}(t, \boldsymbol{\pi})$ , удовлетворяющее начальному условию

$$\mathbf{p}(t_0, \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi}. \quad (5.395)$$

Эти обстоятельства позволяют дать следующее определение:



**Определение 5.11.** Система дифференциальных уравнений порядка  $2n$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\right)' \mathbf{p} \end{aligned} \right\} \quad (5.396)$$

называется канонической системой, связанной с основной задачей. Если  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  — допустимое управление и  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  — соответствующая траектория, то говорят, что любое решение  $\hat{\mathbf{p}}(t)$  системы (5.394) соответствует  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  и  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ . Иначе говоря,  $\hat{\mathbf{p}}(t)$  соответствует  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ , если  $\hat{\mathbf{p}}(t)$  и  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  — решения канонической системы.

**Теорема 5.5. Принцип минимума для частного случая 1.** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — допустимое управление, переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S = \{\mathbf{x}_1\} \times (T_1, T_2)$ . Пусть  $\mathbf{x}^*(t)$  — траектория по (5.385), соответствующая  $\mathbf{u}^*(t)$ , исходящая из  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  и встречающая  $S$  (в первый раз) при  $(\mathbf{x}_1, t_1)$ , т. е.  $\mathbf{x}^*(t_1) = \mathbf{x}_1$ . Необходимым условием оптимальности  $\mathbf{u}^*(t)$  (для частного случая 1) является существование функции  $\mathbf{p}^*(t)$ , удовлетворяющей условиям:

а)  $\mathbf{p}^*(t)$  соответствует  $\mathbf{u}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$ , т. е.  $\mathbf{p}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$  являются решениями канонической системы:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)]; \\ \dot{\mathbf{p}}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] \end{aligned} \right\} \quad (5.397)$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}^*(t_1) \in S_1; \quad (5.398)$$

б) функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}]$ , рассматриваемая как функция  $\mathbf{u}$  на  $\Omega$ , имеет абсолютный минимум при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$  для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ , т. е.

$$\min_{\mathbf{u} \in \Omega} H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}] = H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] \quad (5.399)$$

или, эквивалентно,

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] \leq H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}] \quad (5.400)$$

для всех  $\mathbf{u}$  из  $\Omega$ ;

в) функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)]$  равна нулю для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ :

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] = 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.401)$$

**Теорема 5.6. Принцип минимума для частного случая 2.** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — допустимое управление, переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S = S_1 \times (T_1, T_2)$ , и  $\mathbf{x}^*(t)$  — траектория, удовлетворяющая уравнению (5.388), соответствующая  $\mathbf{u}^*(t)$ , исходящая из  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  и встречающая  $S$  (в первый раз) при  $t_1$  (т. е.  $\mathbf{x}^*(t_1) = \mathbf{x}_1$ ). Необходимым условием оптимальности управления  $\mathbf{u}^*(t)$  (для частного случая 2) является существование функции  $\mathbf{p}^*(t)$ , удовлетворяющей условиям:

а)  $\mathbf{p}^*(t)$  соответствует  $\mathbf{u}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$ , т. е.  $\mathbf{p}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$  являются решениями канонической системы:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)]; \quad (5.402)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] \quad (5.403)$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}^*(t_1) \in S; \quad (5.404)$$

б) функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}]$ , рассматриваемая как функция  $\mathbf{u}$  на  $\Omega$ , имеет абсолютный минимум при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$  для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ , т. е.

$$\min_{\mathbf{u} \in \Omega} H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}] = H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] \quad (5.405)$$

или, эквивалентно,

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] \leq H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}] \quad (5.406)$$

для всех  $\mathbf{u}$  из  $\Omega$ ;

в) функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)]$  равна нулю для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ :

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] = 0; \quad t \in [t_0, t_1]; \quad (5.407)$$

г) если  $S_1$  — гладкое подпространство из  $R_n$  размерности  $k$ , то вектор  $\mathbf{p}^*(t_1)$  трансверсален к  $S_1$  в точке  $\mathbf{x}^*(t_1)$ :

$$\langle \mathbf{p}^*(t_1), \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t_1) \rangle = 0 \text{ для всех } \mathbf{x} \text{ из } M[\mathbf{x}^*(t_1)]; \quad (5.408)$$

где  $M[\mathbf{x}^*(t_1)]$  — плоскость, касательная к  $S_1$  в точке  $\mathbf{x}^*(t_1)$ , т. е.

$$M[\mathbf{x}^*(t_1)] = \left\{ \mathbf{x} : \left\langle \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t_1)], \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t_1) \right\rangle = 0 \right. \\ \left. \text{для } i = 1, 2, \dots, n - k \right\},$$

где  $g_1(\mathbf{x}) = 0, g_2(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_{n-k}(\mathbf{x}) = 0$  — уравнения  $S_1$  (см. § 3.13). Итак, вектор  $\mathbf{p}^*(t_1)$  нормален к множеству цели  $S_1$  в точке  $\mathbf{x}^*(t_1)$ . Если  $S_1 = R_n$ , вектор  $\mathbf{p}^*(t_1)$  будет нулевым вектором,  $\mathbf{p}^*(t_1) = \mathbf{0}$ .

Нетрудно заметить, что вторая теорема отличается от первой дополнительным предположением г), где отмечается трансверсальность дополнительной переменной к множеству цели. Пункт б) каждой из теорем можно сформулировать следующим образом.

В любой конкретный момент времени, допустим  $\hat{t}$ , из интервала  $[t_0, t_1]$ ,  $\mathbf{x}^*(\hat{t})$ ,  $\mathbf{u}^*(\hat{t})$  и  $\mathbf{p}^*(\hat{t})$  являются вполне определенными векторами. Пункт б) теоремы утверждает, что число  $H[\mathbf{x}^*(\hat{t}), \mathbf{p}^*(\hat{t}), \mathbf{u}^*(\hat{t})]$  меньше или равно числу  $H[\mathbf{x}^*(\hat{t}), \mathbf{p}^*(\hat{t}), \boldsymbol{\omega}]$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  — любой вектор из  $\Omega$ .

Мы сформулировали теоремы в том виде, в котором они будут использоваться в последующих главах. Для того чтобы иметь возможность рассматривать исключения, введем в формулировку теорем дополнительную постоянную  $\rho_0^*$ . Будем рассматривать функцию  $\S(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$  вместо функции  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$ , убедившись в том, что существует неотрицательная постоянная  $\rho_0^*$ ,  $\rho_0^* \geq 0$  и вектор  $\mathbf{p}^*(t)$  такие, что

$$\dot{\rho}_0^*(t) = - \frac{\partial \S}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*] = \\ = -\rho_0^* \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] - \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] \right)' \mathbf{p}^*(t).$$

Все остальные утверждения теорем 5.5 и 5.6 удовлетворяются при замене  $H$  на  $\S$ . Исключения имеют место при  $\rho_0^* = 0$ . Если  $\rho_0^* \neq 0$ , то можно выбрать  $\rho_0^* = 1^1$ .

<sup>1</sup> Мы можем это сделать, так как уравнение относительно  $\mathbf{p}(t)$  линейно.

Задачи, которые мы будем рассматривать ниже, не являются исключениями. Поэтому в дальнейшем не упоминается  $\rho_0^*$  (за исключением § 5.15 и 5.16, где приводится эвристическое доказательство принципа минимума, и § 6.21 и 6.22, в которых и рассматриваются вырожденные задачи).

#### 5.14. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

С помощью различных замен переменных покажем, как можно вывести принцип минимума для общей задачи управления из теорем 5.5 и 5.6. Предположения и обозначения § 5.12 снова остаются в силе.

Начнем с того, что снимем требование, касающееся независимости системы и функционала от времени; затем рассмотрим случай, когда конечное время фиксировано и в заключение рассмотрим задачу, в которой имеется конечная «стоимость». В каждом случае мы укажем дополнительные предположения и затем выполним замену переменных, которая сведет нашу задачу к одному из частных случаев.

**а. Система и функционал зависят от времени.** Предположим, что уравнение системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]. \quad (5.409)$$

Предположим, для начала, что множество цели  $S$  имеет вид

$$S = \{\mathbf{x}_1\} \times (T_1, T_2), \quad (5.410)$$

где  $\mathbf{x}_1$  — фиксированный элемент из  $R_n$ ; и что  $L$  имеет вид

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (5.411)$$

Функционал определяется соотношением

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (5.412)$$

где  $t_1$  — нефиксированно.

Как обычно,  $\mathbf{x}_0$  и  $t_0$  обозначают начальное состояние и время.

Мы хотим свести задачу управления для системы [см. уравнение (5.409)] и функционала (5.412), зависящих от времени, к одному из частных случаев — в данном примере, как это станет ясно из дальнейшего, к частному случаю 2. Мы сделаем это, введя дополнительные фазовую координату и уравнение состояния и применив затем принцип минимума к этой новой задаче.

Пусть  $x_{n+1}$  обозначает вспомогательную переменную. Рассмотрим систему порядка  $n + 1$  вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), x_{n+1}(t)]; \\ \dot{x}_{n+1}(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.413)$$

и задачу управления для этой системы.

Даны начальное время  $t_0$  и начальное условие  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ t_0 \end{bmatrix}$  [т. е.,  $x_{n+1}(t_0) = t_0$ ] в пространстве  $R_{n+1}$ . Пусть  $S = S_1 \times (T_1, T_2)$  — множество  $S$  в  $[R_{n+1} \times (T_1, T_2)]$ , где  $S_1$  — прямая (одномерная), определенная уравнениями  $x_1 - x_{1,1} = 0$ ,  $x_2 - x_{1,2} = 0$ , ...,  $x_n - x_{1n} = 0$ , где  $x_{1j}$  — компоненты вектора  $\mathbf{x}_1$  из уравнения (5.410). Найдем допустимое управление  $\mathbf{u}$ , переводящее  $\left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ t_0 \end{bmatrix}, t_0 \right)$  в  $S_1 \times (T_1, T_2)$  и минимизирующее при этом функционал  $J_1(\mathbf{u})$ :

$$J_1(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), x_{n+1}(t)] dt, \quad (5.414)$$

Мы видим, что эта задача эквивалентна исходной задаче [для системы (5.409)] в том смысле, что если управление оптимально для одной из них, то оно будет оптимальным и для другой. Новая задача имеет точно такой же вид, как и частный случай 2. Таким образом, можно применить теорему 5.6 для доказательства того, что если  $\mathbf{u}^*(t)$  оптимально, то существуют функции  $\mathbf{p}^*(t)$  и  $p_{n+1}^*(t)$ , для которых удовлетворяются следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} 1) \dot{\mathbf{x}}^*(t) &= \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{p}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), x_{n+1}^*(t), p_{n+1}^*(t)]; \\ \dot{\mathbf{p}}^*(t) &= -\frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), x_{n+1}^*(t), p_{n+1}^*(t)]; \end{aligned} \right\} \quad (5.415)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{n+1}^*(t) &= \frac{\partial H_1}{\partial p_{n+1}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), x_{n+1}^*(t), p_{n+1}^*(t)]; \\ \dot{p}_{n+1}^*(t) &= -\frac{\partial H_1}{\partial x_{n+1}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), x_{n+1}^*(t), p_{n+1}^*(t)], \end{aligned} \right\} \quad (5.416)$$

где  $H_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, x_{n+1}, p_{n+1})$  дается соотношением

$$\begin{aligned} H_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, x_{n+1}, p_{n+1}) &= \\ &= L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, x_{n+1}) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, x_{n+1}) \rangle + p_{n+1} \cdot 1 \end{aligned} \quad (5.417)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^*(t_0) &= \mathbf{x}_0 \quad x_{n+1}^*(t_0) = t_0; \\ \mathbf{x}^*(t_1) &= \mathbf{x}_1 \quad x_{n+1}^*(t_1) = t_1; \end{aligned} \right\} \quad (5.418)$$

2) гамильтониан  $H_1[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, x_{n+1}^*(t), p_{n+1}^*(t)]$ , рассматриваемый как функция от  $\mathbf{u}$  на  $\Omega$ , имеет абсолютный минимум при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$  для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ ;

3)  $H_1[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), x_{n+1}^*(t), p_{n+1}^*(t)] = 0$  для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ ;

4)  $n+1$  — мерный вектор

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}^*(t_1) \\ p_{n+1}^*(t_1) \end{bmatrix}$$

трансверсален к  $S_1$  при  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ t_1 \end{bmatrix}$ , так что

$$p_{n+1}^*(t) = 0. \quad (5.419)$$

Полученные результаты можно использовать для решения исходной задачи. При этом достаточно заметить, что вспомогательная переменная  $x_{n+1}$  представляет собой просто время  $t$ . Для исходной задачи определим функцию  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t)$   $n$ -мерных векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{p}$ ,  $m$ -мерного вектора  $\mathbf{u}$  и времени  $t$ , положив

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \rangle. \quad (5.420)$$

Здесь  $H$  называют гамильтонианом задачи, а функцию  $\mathbf{p}$  — дополнительной переменной.

**Теорема 5.7. Принцип минимума для задачи с закрепленным концом, зависящей от времени.** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — допустимое управление, переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S = \{\mathbf{x}_1\} \times (T_1, T_2)$ , и  $\mathbf{x}^*(t)$  — траектория, удовлетворяющая уравнению (5.409), соответствующая  $\mathbf{u}^*(t)$ , исходящая из  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  и встречающая  $S$  в первый раз в точке  $t_1$  [т. е.  $\mathbf{x}^*(t_1) = \mathbf{x}_1$ ]. Для того

чтобы  $\mathbf{u}^*(t)$  было оптимально [для функционала (5.412)], необходимо существование функции  $\mathbf{p}^*(t)$ , удовлетворяющей условиям:

а)  $\mathbf{p}^*(t)$  соответствует  $\mathbf{u}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$ , т. е.  $\mathbf{p}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$  являются решениями канонической системы

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]; \quad (5.421)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \quad (5.422)$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}^*(t_1) = \mathbf{x}_1; \quad (5.423)$$

б)  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, t]$ , рассматриваемая как функция  $\mathbf{u}$  на  $\Omega$ , имеет абсолютный минимум при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$  для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ :

$$\min_{\mathbf{u} \in \Omega} H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, t] = H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \quad (5.424)$$

или, эквивалентно,

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \leq H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, t] \quad (5.425)$$

для всех  $\mathbf{u}$  из  $\Omega$ ;

в) функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]$  удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} & H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] = \\ & = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t} [\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{p}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \tau] d\tau; \end{aligned} \quad (5.426)$$

$$H[\mathbf{x}^*(t_1), \mathbf{p}^*(t_1), \mathbf{u}^*(t_1), t_1] = 0, \quad (5.427)$$

где  $t_1$  — незаданное конечное время.

Прежде всего существенное отличие теоремы 5.7 от 5.5 заключено в поведении гамильтониана вдоль оптимальной траектории. В задаче, не зависящей от времени (теорема 5.5), гамильтониан равен нулю вдоль оптимальной траектории, в то время как для задачи, зависящей от времени, он со временем изменяется вдоль оптимальной траектории по уравнению (5.426). Отметим далее, что при  $x_{n+1}(t) = t$  основным соотношением, позволяющим вывести теорему 5.7 из условий 1—4, соответствующих оптимуму новой (дополненной) задачи, является

$$H_1[\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t, p_{n+1}] = H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) + p_{n+1}. \quad (5.428)$$

Это соотношение предполагает, что для данных значений  $\mathbf{x}, \mathbf{p}$  и  $t$  величина  $\mathbf{u}$  из  $\Omega$ , минимизирующая  $H$ , минимизирует также и  $H_1$  (независимо от величины  $p_{n+1}$ ) и наоборот.

Приведенное выше соотношение вместе с условием

$$\dot{p}_{n+1}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial t} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t], \quad p_{n+1}^*(t_1) = 0 \quad (5.428a)^1$$

позволяет вывести условие в) теоремы 5.7.

Для того чтобы проиллюстрировать эти положения, рассмотрим следующий простой пример.

<sup>1</sup> Так как  $\frac{\partial H_1}{\partial x_{n+1}} = \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}}$ .

**Пример 5.9.** Предположим, что уравнение системы имеет вид  $\dot{x} = x + ut$ , где  $t_0 = 0$  — начальное время и  $x(0) = a$  является исходным состоянием. Пусть  $x_1 = b$  — желаемое конечное состояние [т. е.  $S = \{b\} \times (T_1, T_2)$ ] и пусть функционал преобразования  $J(u)$  определяется соотношением

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + t^2) dt,$$

т. е.  $L(x, u, t) = x^2 + t^2$ . Выведем дополнительную переменную  $x_{n+1}$  и рассмотрим новую систему  $\dot{x} = x + ux_{n+1}$ ;  $\dot{x}_{n+1} = 1$ . Для этой новой системы исходным состоянием будет

$$\begin{cases} x(0) = a \\ x_{n+1}(0) = 0 \end{cases}$$

и множество  $S$  превращается в прямую  $x - b = 0$  на плоскости  $xx_{n+1}$  [см. рис. 5.15, где новое  $S = S_1 \times (T_1, T_2)$ ], а  $S_1$  — прямая  $x - b = 0$ . Функционал стоимости  $J_1(u)$  принимает вид

$$J_1(u) = \int_0^{t_1} (x^2 + x_{n+1}^2) dt,$$

и мы получим

$$H_1(x, p, u, x_{n+1}, p_{n+1}) = x^2 + x_{n+1}^2 + p(x + ux_{n+1}) + p_{n+1};$$

$$H(x, p, u, t) = x^2 + t^2 + p(x + ut).$$

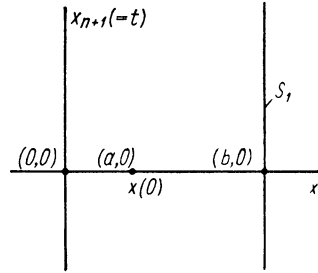


Рис. 5.15. Область цели  $S_1$  в пространстве  $xx_{n+1}$

Перечислим, сопоставляя друг с другом, необходимые условия новой задачи (основанной на теореме 5.6) и исходной задачи (основанной на теореме 5.7) (см. табл. 5.1). Подстановка  $x_{n+1}^*(t) = t$  в условия новой задачи приводит к условиям исходной задачи.

Предположим теперь, что множество  $S$  имеет вид

$$S = \{(g(t), t) : t \in (T_1, T_2)\}, \quad (5.429)$$

где  $g(t)$  — непрерывно дифференцируемая функция  $t$  (т. е.  $S$  имеет вид 2г § 5.12). Таким образом, мы пытаемся попасть в движущуюся, а не в фиксированную точку, минимизируя при этом функционал (5.412). Введя вспомогательную переменную  $x_{n+1}$ , получим другую задачу типа частного случая 2. Из теоремы 5.6 способом, аналогичным использованному при выводе теоремы 5.7, может быть получена следующая теорема.

**Теорема 5.8. Принцип минимума для задачи с подвижным концом, зависящей от времени.** Пусть  $u^*(t)$  — допустимое управление, переводящее  $(x_0, t_0)$  в  $S = \{(g(t), t) : t \in (T_1, T_2)\}$ . Пусть  $x^*(t)$  — траектория, удовлетворяющая уравнению (5.409), соответствующая  $u^*(t)$ , начинающаяся в  $(x_0, t_0)$  и встречающаяся  $S$  при  $t_1$ . Необходимым условием оптимальности  $u^*(t)$  [для функционала стоимости (5.412)], является существование функции  $p^*(t)$ , удовлетворяющей условиям:

а) то же, что и пункт а [см. уравнения (5.421) и (5.422)] теоремы 5.7, за исключением граничных условий

$$x^*(t_0) = x_0, \quad x^*(t_1) = g(t_1); \quad (5.430)$$

б) то же, что и пункт б [уравнения (5.421) и (5.425)] теоремы 5.7;

в) функция  $H[x^*(t), p^*(t), u^*(t), t]$  удовлетворяет соотношениям

$$H[x^*(t), p^*(t), u^*(t), t] = \left\langle p^*(t_1), \frac{dg}{dt} \Big|_{t_1} \right\rangle - \int_t^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t} [x^*(\tau), p^*(\tau), u^*(\tau), \tau] d\tau; \quad (5.431)$$

$$H[x^*(t_1), p^*(t_1), u^*(t_1), t_1] = \left\langle p^*(t_1), \frac{dg}{dt} \Big|_{t_1} \right\rangle, \quad (5.432)$$

где  $t_1$  — не заданный наперед конечный момент времени.

Новая задача	Исходная задача
<p>1) <math>\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H_1}{\partial p} [x^*(t), p^*(t), u^*(t), x_{n+1}^*(t), p_{n+1}^*(t)] = x^*(t) + u^*(t) x_{n+1}^*(t)</math></p> <p><math>\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial x} [x^*(t), p^*(t), u^*(t), x_{n+1}^*(t), p_{n+1}^*(t)] = -2x^*(t) - p^*(t)</math></p> <p><math>\dot{x}_{n+1}^*(t) = 1</math></p> <p><math>\dot{p}_{n+1}^*(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial x_{n+1}} [x^*(t), p^*(t), u^*(t), x_{n+1}^*(t), p_{n+1}^*(t)] = -2x_{n+1}^*(t) - p^*(t) u^*(t)</math></p>	<p>1) <math>\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p} [x^*(t), p^*(t), u^*(t), t] = x^*(t) + u^*(t) t;</math></p> <p><math>\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} [x^*(t), p^*(t), u^*(t), t] = -2x^*(t) - p^*(t)</math></p>
<p>2) <math>\min_u H_1 [x^*(t), p^*(t), u, x_{n+1}^*(t), p_{n+1}^*(t)] = H_1 [x^*(t), p^*(t), u^*(t), x_{n+1}^*(t), p_{n+1}^*(t)] = \{x^{*2}(t) + x_{n+1}^{*2}(t) + p^*(t) [x^*(t) + u^*(t) x_{n+1}^*(t)] + p_{n+1}^*(t)\}</math></p>	<p>2) <math>\min_u H [x^*(t), p^*(t), u, t] = H [x^*(t), p^*(t), u^*(t), t] = x^{*2}(t) + t^2 + p^*(t) [x^*(t) + u^*(t) t]</math></p>
<p>3) <math>H_1 [x^*(t), p^*(t), u^*(t), x_{n+1}^*(t), p_{n+1}^*(t)] = 0;</math></p> <p><math>x^{*2}(t) + x_{n+1}^{*2}(t) + p^*(t) [x^*(t) + u^*(t) x_{n+1}^*(t)] = -p_{n+1}^*(t)</math></p>	<p>3) <math>H [x^*(t), p^*(t), u^*(t), t] = -\int_t^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t} [x^*(\tau), p^*(\tau), u^*(\tau), \tau] d\tau = -\int_t^{t_1} [2\tau + p^*(\tau) u^*(\tau)] d\tau;</math></p> <p><math>H [x^*(t_1), p^*(t_1), u^*(t_1), t_1] = 0</math></p>
<p>4) <math>p_{n+1}^*(t_1) = 0</math></p>	<p>—</p>

Существенным отличием этой теоремы от теоремы 5.7 является различное поведение гамильтониана вдоль оптимальной траектории. Величина  $\frac{d\mathbf{g}}{dt}\Big|_{t_1}$  есть в точности «касательный» вектор к кривой  $\mathbf{g}(t)$  при  $t_1$ , и поэтому конечная величина гамильтониана (вдоль оптимальной траектории) есть скалярное произведение конечного значения дополнительной переменной и этого касательного вектора.

Мы можем, наконец, предположить, что множеством  $S$  является или гладкое подмножество из  $R_n \times (T_1, T_2)$  размерности  $(k+1)$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , непрерывно дифференцируемое по  $t$  (вида г, д § 5.12), или все пространство  $R_n \times (T_1, T_2)$ . В этом случае может быть доказана следующая теорема.

**Теорема 5.9. Принцип минимума для задачи, зависящей от времени, с движущимся множеством цели  $S$ .** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — допустимое управление, переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в гладкое подмножество  $S$  размерности  $k+1$  из  $R_n \times (T_1, T_2)$  или в множество  $S = R_n \times (T_1, T_2)$ . Пусть  $\mathbf{x}^*(t)$  — оптимальная траектория (5.409), соответствующая  $\mathbf{u}^*(t)$ , начинающаяся в  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  и встречающая  $S$  при  $t_1$ . Необходимым условием оптимальности  $\mathbf{u}^*(t)$  по отношению к функционалу (5.412) является существование функции  $\mathbf{p}^*(t)$ , удовлетворяющей условиям:

а) то же, что и пункт а [см. условия (5.421) и (5.422)] теоремы 5.7 за исключением граничных условий (5.423), для данного случая имеющих вид

$$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0, (\mathbf{x}^*(t_1), t_1) \in S; \quad (5.433)$$

б) то же, что и пункт б [уравнения (5.424) и (5.425)] теоремы 5.7.

в) 1. Если  $S$  — гладкое подмножество размерности  $k+1$  из  $R_n \times (T_1, T_2)$ , то функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]$  удовлетворяет соотношениям

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial t} [\mathbf{x}^*(t_1), t_1] - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t} [\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{p}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \tau] d\tau; \quad (5.434)$$

$$H[\mathbf{x}^*(t_1), \mathbf{p}^*(t_1), \mathbf{u}^*(t_1), t_1] = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial t} [\mathbf{x}^*(t_1), t_1], \quad (5.435)$$

где  $t_1$  — конечное время,  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n-k$  — постоянные, и уравнениями  $S$  являются

$$g_1(\mathbf{x}, t) = 0, g_2(\mathbf{x}, t) = 0, \dots, g_{n-k}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (5.436)$$

2. Если  $S = R_n \times (T_1, T_2)$ , то функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]$  удовлетворяет соотношениям

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t} [\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{p}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \tau] d\tau \quad (5.437)$$

и

$$H[\mathbf{x}^*(t_1), \mathbf{p}^*(t_1), \mathbf{u}^*(t_1), t_1] = 0. \quad (5.438)$$

г) 1. Если  $S$  — гладкое подмножество размерности  $k+1$  из  $R_n \times (T_1, T_2)$ , то вектор  $\mathbf{p}^*(t_1)$  трансверсален к гладкому подмножеству  $S_{t_1}$  из  $R_n$ , определенному уравнениями

$$g_1(\mathbf{x}, t_1) = 0, g_2(\mathbf{x}, t_1) = 0, \dots, g_{n-k}(\mathbf{x}, t_1) = 0 \quad (5.439)$$



в точке  $\mathbf{x}^*(t_1)$ , т. е.

$$\langle \mathbf{p}^*(t_1), \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t_1) \rangle = 0 \text{ для всех } \mathbf{x} \text{ из } M[\mathbf{x}^*(t_1)], \quad (5.440)$$

где  $M[\mathbf{x}^*(t_1)]$  — касательная плоскость к  $S_{t_1}$  в точке  $\mathbf{x}^*(t_1)$ ;

$$M[\mathbf{x}^*(t_1)] = \left\{ \mathbf{x} : \left\langle \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t_1), t_1], \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t_1) \right\rangle = 0, i = 1, 2, \dots, n - k \right\}$$

(см. § 3.13).

Таким образом,  $\mathbf{p}^*(t_1)$  нормален к  $S_{t_1}$  в точке  $\mathbf{x}^*(t_1)$  и, следовательно, является линейной комбинацией векторов  $\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t_1), t_1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - k$ .

2. Если  $S = R_n \times (T_1, T_2)$ , то  $\mathbf{p}^*(t_1)$  — нулевой вектор:

$$\mathbf{p}^*(t_1) = \mathbf{0}.$$

Конкретный пример, иллюстрирующий эту теорему, рассматривается в § 6.3. При формулировке различных теорем неизбежны повторения, но мы идем на это с тем, чтобы в дальнейшем можно было точно указать формулировку принципа минимума в том виде, который нам нужен.

**б) Конечное время фиксировано.** До сих пор мы рассматривали лишь такие задачи, где конечное время не было задано. Исключим это ограничение. Вновь будем считать, что уравнение системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (5.441)$$

и  $\mathbf{x}_0$  и  $t_0$  — начальные состояние и время. Предположим далее, что множество  $S$  относится к одному из видов

$$S = \{\mathbf{x}_1\} \times \{t_1\} = (\mathbf{x}_1, t_1); \quad (5.442)$$

$$S = S_1 \times \{t_1\}; \quad (5.443)$$

$$S = R_n \times \{t_1\}, \quad (5.444)$$

где  $t_1$  — фиксированный элемент из  $(T_1, T_2)$ ,  $t_1 > t_0$ ;  $\mathbf{x}_1$  — заданный элемент из  $R_n$  и  $S_1$  — гладкое подмножество размерности  $k$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ , из  $R_n$ . Иначе говоря, мы хотим перевести  $\mathbf{x}_0$  в заданное подмножество из  $R_n$  за заданное время. Предположим также, что функционал  $J(\mathbf{u})$  выражается соотношением

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt, \quad (5.445)$$

где  $t_1$  — фиксировано.

Сведем задачу управления системой (5.441) с функционалом (5.445) и множеством  $S$ , определенным одним из соотношений (5.442)—(5.444), к одному из частных случаев, а именно, к случаю 1. Для этого обозначим через  $x_{n+1}$  вспомогательную переменную и рассмотрим следующую систему порядка  $n + 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), x_{n+1}(t)]; \\ \dot{x}_{n+1}(t) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.446)$$

Нетрудно убедиться, что задача перевода точки  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ t_0 \end{bmatrix}$  [т. е.  $x_{n+1}(t_0) = t_0$ ], в точку  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ t_1 \end{bmatrix}$  [или  $x_{n+1}(t_1) = t_1$ ] вдоль траектории, удовлетворяющей уравнениям (5.446) таким образом, чтобы минимизировать функционал

$$J_1(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), x_{n+1}(t)] dt, \quad (5.447)$$

где  $T$  не фиксировано, эквивалентна нашей исходной задаче (для системы 5.441) в том смысле, что управление оптимально для одной из них в том и только в том случае, если оно оптимально для другой. Так как новая задача имеет вид, аналогичный частному случаю 1, можно использовать теорему 5.5 и вывести, как и прежде, вариант принципа минимума, применимый к нашей исходной задаче. В этом случае справедлива теорема.

**Теорема 5.10. Принцип минимума для задачи с фиксированным временем.** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — допустимое управление, переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$

а) во множество цели  $S = \{\mathbf{x}_1\} \times \{t_1\}$ , или

б) во множество цели  $S = S_1 \times \{t_1\}$ , или

в) во множество цели  $S = R_n \times \{t_1\}$ .

Пусть  $\mathbf{x}^*(t)$  — траектория, начинающаяся из  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ , удовлетворяет уравнению (5.441), соответствует  $\mathbf{u}^*(t)$ , и встречается с  $S$  при  $t_1^1$ . Необходимым условием оптимальности  $\mathbf{u}^*(t)$  [по отношению к функционалу (5.445)] является существование функции  $\mathbf{p}^*(t)$ , удовлетворяющей условиям:

1) то же, что и пункт а) [уравнения (5.421) и (5.422)] теоремы 5.7, за исключением граничных условий (5.423), которые для каждого из случаев будут:

$$\text{а) } \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^*(t_1) = \mathbf{x}_1; \quad (5.448)$$

$$\text{б) } \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^*(t_1) \in S_1; \quad (5.449)$$

$$\text{в) } \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^*(t_1) \text{ — любое}; \quad (5.450)$$

2) то же, что и пункт б) [уравнения (5.424) и (5.425)] теоремы 5.7.

4) вектор  $\mathbf{p}^*(t_1)$ ;

б) трансверсален к  $S_1$  в точке  $\mathbf{x}^*(t_1)$  (см. пункт г теоремы 5.6);

в) есть нулевой вектор;  $\mathbf{p}^*(t_1) = 0$ , если множество цели  $S$  имеет вид 1б или 1в.

Заметим, что условие 3 отсутствует. В предыдущих теоремах условие 3 связывалось с поведением гамильтониана вдоль оптимальной траектории. Однако в данном случае соотношение

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] = H[\mathbf{x}^*(t_1), \mathbf{p}^*(t_1), \mathbf{u}^*(t_1), t_1] - \int_{t_1}^t \frac{\partial H}{\partial t}[\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{p}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \tau] d\tau, \quad (5.451)$$

соответствующее условию 3, удовлетворяется автоматически и не дает дополнительной информации.

в) **Присутствует конечная «стоимость».** До сих пор мы полагали, что функционал не содержит члена, выражающего конечную стоимость (т. е. функция  $K$  была равна нулю). Снимем теперь это ограничение.

Вновь будем считать, что уравнение системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (5.452)$$

и  $\mathbf{x}_0$  и  $t_0$  — начальное состояние и время. Пусть множество  $S$  имеет вид

$$S = R_n \times (T_1, T_2), \quad (5.453)$$

т. е. мы рассматриваем задачу с незакрепленным концом и нефиксированным временем. Будем считать, что  $K(\mathbf{x}, t)$  — действительная функция на  $R_n \times (T_1, T_2)$ , причем

$$K(\mathbf{x}, t), \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial K}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x} \partial t}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \quad (5.454)$$

<sup>1</sup> Мы будем рассматривать все три множества  $S$  одновременно, указывая результат для каждого из них, если эти результаты различны.

непрерывны. Предположим, что функционал  $J(\mathbf{u})$  выражается формулой

$$J(\mathbf{u}) = K[\mathbf{x}(t_1), t_1] + \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt. \quad (5.455)$$

Сведем задачу управления системой (5.452) с функционалом (5.455) и множеством  $S$  (5.453) к задаче, в которой конечной стоимости нет. После этого мы сможем применить теорему 5.9 и получить соответствующую форму принципа минимума. Прежде всего отметим, что так как  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , то

$$K[\mathbf{x}(t_1), t_1] = K(\mathbf{x}_0, t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \{K[\mathbf{x}(t), t]\} dt. \quad (5.456)$$

Известно, однако, что

$$\frac{d}{dt} \{K[\mathbf{x}(t), t]\} = \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}(t), t], \dot{\mathbf{x}}(t) \right\rangle + \frac{\partial K}{\partial t}[\mathbf{x}(t), t] = \quad (5.457)$$

$$= \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}(t), t], \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \right\rangle + \frac{\partial K}{\partial t}[\mathbf{x}(t), t]. \quad (5.458)$$

Следовательно, функционал  $J(\mathbf{u})$  можно выразить также соотношением

$$J(\mathbf{u}) = K(\mathbf{x}_0, t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}(t), t], \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \right\rangle + \frac{\partial K}{\partial t}[\mathbf{x}(t), t] \right\} dt. \quad (5.459)$$

Так как  $\mathbf{x}_0$  и  $t_0$  заданы, а  $K(\mathbf{x}_0, t_0)$  — известная константа, то задача перевода  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S$  вдоль траектории, удовлетворяющей (5.452), решается таким образом, чтобы минимизировать функционал  $J_1(\mathbf{u})$

$$J_1(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}(t), t], \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \right\rangle + \frac{\partial K}{\partial t}[\mathbf{x}(t), t] \right\} dt. \quad (5.460)$$

Она эквивалентна нашей исходной задаче в том смысле, что управление оптимально для одной из них только в том случае, если оно оптимально для другой.

Так как теорема 5.9 применима к этой новой задаче, можно заключить, что если  $\mathbf{u}^*(t)$  оптимально, то существует функция  $\mathbf{p}_1^*(t)$  такая, что

$$1) \quad \dot{\mathbf{p}}_1^*(t) = - \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}_1^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] = \quad (5.461)$$

$$= - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[ \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\rangle - \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x} \partial t}(\mathbf{x}, t) \right] \Big|_{[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]} - \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \right)' \mathbf{p}_1^*(t); \quad (5.462)$$

$$2) \quad \mathbf{p}_1^*(t_1) = \mathbf{0}; \quad (5.463)$$

$$3) \quad \min_{\mathbf{u} \in \Omega} H_1[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}_1^*(t), \mathbf{u}, t] = H_1[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}_1^*(t), \mathbf{u}^*(t), t], \quad (5.464)$$

где  $H_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, \mathbf{u}, t)$  дается соотношением

$$\begin{aligned} H_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, \mathbf{u}, t) &= \\ &= \left[ L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\rangle + \frac{\partial K}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right] + \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \rangle = \\ &= L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \left\langle \mathbf{p}_1 + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\rangle + \frac{\partial K}{\partial t}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (5.465)$$

Рассмотрим функцию  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) =$

$$= L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \rangle. \quad (5.466)$$

Если принять, что

$$\mathbf{p}^*(t) = \mathbf{p}_1^*(t) + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), t], \quad (5.467)$$

то в силу выражений (5.462) и (5.458) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}^*(t) &= -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] - \left\{ \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2}[\mathbf{x}^*(t), t] \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \right)' \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), t] + \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x} \partial t}[\mathbf{x}^*(t), t] \right\} - \\ &- \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \right)' \left\{ \mathbf{p}^*(t) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), t] \right\} + \\ &+ \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x}^2}[\mathbf{x}^*(t), t] \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] + \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{x} \partial t}[\mathbf{x}^*(t), t] = \end{aligned} \quad (5.468)$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] - \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \right)' \mathbf{p}^*(t) = \quad (5.469)$$

$$= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]. \quad (5.470)$$

Так как  $\frac{\partial K}{\partial t}[\mathbf{x}^*(t), t]$  явно от  $\mathbf{u}$  не зависит, из выражения (5.464) следует, что

$$\min_{\mathbf{u} \in \Omega} H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, t] = H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]. \quad (5.471)$$

Наконец, из выражений (5.463) и (5.467) получим

$$\mathbf{p}^*(t_1) = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t_1), t_1]. \quad (5.472)$$

Для других видов множества цели доказательство проводится аналогично. В результате сформулируем следующую теорему.

**Теорема 5.11. Принцип минимума для задачи с конечной «стоимостью».** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — допустимое управление, переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ :

а) в множество  $S = R_n \times (T_1, T_2)$ ;

б) в множество  $S$ , являющееся гладким подпространством размерности  $k+1$  из  $R_n \times (T_1, T_2)$ <sup>1</sup>. Пусть  $\mathbf{x}^*(t)$  — траектория, удовлетворяющая уравнению (5.452), соответствующая  $\mathbf{u}^*(t)$ , исходящая из  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  и встречающая  $S$  при  $t_1$ . Необходимым условием оптимальности

<sup>1</sup> Разбор других случаев мы предоставляем читателю.

$\mathbf{u}^*(t)$  [по отношению к функционалу (5.445)] является существование функции  $\mathbf{p}^*(t)$ , удовлетворяющей условиям:

1. То же, что и пункт а [уравнения (5.421) и (5.422)] теоремы 5.7, за исключением граничных условий (5.423), которые в данном случае имеют вид:

$$\text{а) } \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}^*(t_1) \text{ не задано;} \quad (5.473)$$

$$\text{б) } \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}^*(t_1) \in S. \quad (5.474)$$

2. То же, что и пункт б [уравнения (5.424) и (5.425)] теоремы 5.7.

3а. Если  $S = R_n \times (T_1, T_2)$ , то функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]$  удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] &= -\frac{\partial K}{\partial t}[\mathbf{x}^*(t_1), t_1] - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial H}{\partial t}[\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{p}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \tau] + \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}[\mathbf{x}^*(\tau), \tau] \right\} d\tau; \end{aligned} \quad (5.475)$$

$$H[\mathbf{x}^*(t_1), \mathbf{p}^*(t_1), \mathbf{u}^*(t_1), t_1] = -\frac{\partial K}{\partial t}[\mathbf{x}^*(t_1), t_1]. \quad (5.476)$$

3б. Если  $S$  — гладкое подмножество размерности  $k+1$  из  $R_n \times (T_1, T_2)$ , то гамильтониан удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] &= \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial t}[\mathbf{x}^*(t_1), t_1] - \frac{\partial K}{\partial t}[\mathbf{x}^*(t_1), t_1] - \\ &- \int_t^{t_1} \left\{ \frac{\partial H}{\partial t}[\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{p}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \tau] + \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}[\mathbf{x}^*(\tau), \tau] \right\} d\tau; \end{aligned} \quad (5.477)$$

$$H[\mathbf{x}^*(t_1), \mathbf{p}^*(t_1), \mathbf{u}^*(t_1), t_1] = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial t}[\mathbf{x}^*(t_1), t_1] - \frac{\partial K}{\partial t}[\mathbf{x}^*(t_1), t_1], \quad (5.478)$$

где  $t_1$  — конечное время;  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n-k$  — постоянные, а уравнения множества  $S$  имеют вид

$$g_1(\mathbf{x}, t) = 0, \quad g_2(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \dots, \quad g_{n-k}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (5.479)$$

4а. Если  $S = R_n \times (T_1, T_2)$ , то

$$\mathbf{p}^*(t_1) = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t_1), t_1]. \quad (5.480)$$

4б. Если  $S$  — гладкое подмножество размерности  $k+1$  из  $R_n \times (T_1, T_2)$ , то вектор  $\mathbf{p}^*(t_1) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t_1), t_1]$  трансверсален к гладкому подмножеству  $S_{t_1}$  из  $R_n$ , определяемому уравнениями

$$g_1(\mathbf{x}, t_1) = 0, \quad g_2(\mathbf{x}, t_1) = 0, \quad \dots, \quad g_{n-k}(\mathbf{x}, t_1) = 0 \quad (5.481)$$

в точке  $\mathbf{x}^*(t_1)$  (сравните с теоремой 5.9).

Мы видим, что наличие конечной стоимости сказывается прежде всего на поведении гамильтониана вдоль оптимальной траектории и на величине дополнительной переменной в конечный момент времени.

**Пример 5.10.** Предположим, что  $K(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ , где  $\mathbf{c}$  — заданный ненулевой вектор из  $R_n$ . Тогда для задачи со свободным концом [т. е. для  $S = R_n \times (T_1, T_2)$ ] условия 3 и 4 теоремы 5.11 примут вид

$$3. H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] = - \int_t^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t} [\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{p}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \tau] d\tau; \quad (5.482)$$

$$H[\mathbf{x}^*(t_1), \mathbf{p}^*(t_1), \mathbf{u}^*(t_1), t_1] = 0; \quad (5.483)$$

$$4. \mathbf{p}^*(t_1) = \mathbf{c}. \quad (5.484)$$

**Пример 5.11.** Предположим, что  $K(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i x_i^2$ , где  $c_i$  — постоянные и  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — компоненты  $\mathbf{x}$ . Тогда для задачи со свободным концом [т. е.  $S = R_n \times (T_1, T_2)$ ] условия 3 и 4 теоремы 5.11 принимают вид

$$3. H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] = - \int_t^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t} [\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{p}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \tau] d\tau; \quad (5.485)$$

$$H[\mathbf{x}^*(t_1), \mathbf{p}^*(t_1), \mathbf{u}^*(t_1), t_1] = 0;$$

$$4. \mathbf{p}^*(t_1) = \mathbf{C}\mathbf{x}^*(t_1), \quad (5.486)$$

где  $\mathbf{C}$  — диагональная матрица с элементами  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , расположенными на главной диагонали.

Отметим, что мы включили конечную стоимость в минимизируемый интеграл. Вводя вспомогательную переменную

$$\dot{x}_0(t) = L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] x_0(t_0) = 0, \quad (5.487)$$

можно свести задачи, содержащие интеграл, который надо минимизировать, к задачам, имеющим только конечную стоимость.

Этот прием и использовался Л. С. Понтрягиным. Его мы также будем применять в последующих двух параграфах.

г) **Таблица результатов** (табл. 5.2). Все полученные нами результаты и некоторые дополнительные случаи собраны в табл. 5.2. Предполагается, что  $t_0$  и  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  — начальные время и состояние; явные ссылки на эти величины в таблице опущены. Звездочка \* везде используется для обозначения оптимальных величин. При составлении таблицы применены следующие понятия и обозначения:

1) ссылка на  $t$  часто опускается, например вместо  $\mathbf{x}^*(t)$  записывается  $\mathbf{x}^*$ , вместо  $\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^*$ ;

2) функционал  $J(\mathbf{u})$  для конкретных задач выражается через конкретные  $K$  и  $L$ ;

3) знаком  $|_*$  обозначены величины, которые должны вычисляться вдоль оптимальной траектории; например,  $\left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right|_*$  есть градиент гамильтониана  $H$  по  $\mathbf{x}$ , вычисленный при  $[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]$ ;

4) знаком  $|_{*t_1}$  обозначены величины, которые должны вычисляться в конечный момент времени для оптимальных значений переменных.

Например,  $\left. \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \right|_{*t_1}$  — градиент  $K$  по  $\mathbf{x}$  при  $[\mathbf{x}^*(t_1), t_1]$ ;

5)  $H^*$  — гамильтониан, вычисленный вдоль оптимальной траектории. Обозначение  $H^*(t)$  используется с целью подчеркнуть то обстоятельство, что интерес представляет поведение гамильтониана вдоль оптимальной траектории в зависимости от времени.

При дальнейших ссылках на таблицу мы будем часто использовать столбцы и строки для того, чтобы отыскать нужный элемент таблицы.

№ по пор.	Постановка задачи					1	2
	Система	Функционал	Время	Область конечных состояний*	гамма-тоннан		
1	$\dot{x} = f(x, u)$	$L = L(x, u),$ $K = 0$	$t_1$ не задано	$x_1$	$H = H(x, p, u) + \langle p, f(x, u) \rangle$	$\dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial p} \Big _*$ $\dot{p}^* = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big _*$	$H^* =$ $= H(x^*, p^*, u^*) =$ $= \min_{u \in \Omega} H(x^*, p^*, u)$ или $H(x^*, p^*, u^*) \leq$ $\leq H(x^*, p^*, u)$ для всех $u$ из $\Omega$
2				$S_1:$ $g_i(x) = 0,$ $i = 1, 2, \dots,$ $n - k$			
3				$L = L(x, u),$ $K = K(x)$			
4		$L = L(x, u),$ $K = 0$		$x_1$			
5		$L = L(x, u),$ $K = K(x)$		$t_1$ фиксировано			
6	$\dot{x} = f(x, u, t)$	$L = L(x, u, t),$ $K = 0$	$t_1$ не задано	$x_1$	$H = H(x, p, u, t) + \langle p, f(x, u, t) \rangle$	$\dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial p} \Big _*$ $\dot{p}^* = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big _*$	$H^* =$ $= H(x^*, p^*, u^*, t) =$ $= \min_{u \in \Omega} H(x^*, p^*, u, t)$ или $H(x^*, p^*, u^*, t) \leq$ $\leq H(x^*, p^*, u, t)$ для всех $u$ из $\Omega$
7				$g(t)$			
8		$L = L(x, u, t),$ $K = K(x, t)$		$S_1:$ $g_i(x, t) = 0,$ $i = 1, 2, \dots,$ $n - k$			
	A	B	C	D	E	F	G

\*  $x_1$  — фиксированная конечная точка;  $R_n$  — свободная конечная точка;  $S_1$  — подпространство размерности  $k + 1$ .

Таблица 5.2

Необходимые условия		Номер теоремы
3	4	
$H^*(t) = H^*(t_1) = 0$	$p^*(t_1)$ — условий нет	5.5
	$p^*(t_1)$ нормален к $S_1$ в точке $x^*(t_1)$ $p^*(t_1) = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial x} \Big _{x^*(t_1)};$	5.6
	$p^*(t_1) = \frac{\partial K}{\partial x} \Big _{x^*(t_1)}$	5.6 5.11
$H^*(t) = H^*(t_1) = \text{const}$	$p^*(t_1)$ — условий нет	5.10
	$p^*(t_1) = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial x} \Big _{x^*(t_1)} + \frac{\partial K}{\partial x} \Big _{x^*(t_1)}$	5.10 5.11
$H^*(t) = - \int_t^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t} \Big _* d\tau$ $H^*(t_1) = 0$	$p^*(t_1)$ — условий нет	5.7
$H^*(t) = \left\langle p^*(t_1), \frac{dg}{dt} \Big _{*t_1} \right\rangle - \int_t^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t} \Big _* d\tau;$ $H^*(t_1) = \left\langle p^*(t_1), \frac{dg}{dt} \Big _{*t_1} \right\rangle;$		5.8
$H^*(t) = H^*(t_1) - \int_t^{t_1} \left[ \frac{\partial H}{\partial t} \Big _* + \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \Big _* \right] d\tau;$ $H^*(t_1) = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial t} \Big _{*t_1} - \frac{\partial K}{\partial t} \Big _{*t_1};$	$p^*(t_1) = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial x} \Big _{*t_1} + \frac{\partial K}{\partial x} \Big _{*t_1}$	5.11 5.9
$H$	$I$	$J$

из  $R_n$  размерности  $k$ ;  $g(t)$  — движущаяся конечная точка;  $S$  — подпространство из  $R_n \times (T_1, T_2)$ .



№ по пор.	Постановка задачи					1	2
	Система	Функционал	Время	Область конечных состояний*	гамма-тоннан		
9	$\dot{x} = f(x, u, t)$	$L = L(x, u, t),$ $K = K(x, t)$	$t_1$ не задано	$R_n$	$H = H(x, p, u, t) +$ $L(x, u, t) +$ $p^* = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big _*$	$H^* =$ $= H(x^*, p^*, u^*, t) =$ $= \min_{u \in \Omega} H(x^*, p^*, u, t)$ или $H(x^*, p^*, u^*, t) \leq$ $\leq H(x^*, p^*, u, t)$ для всех $u$ из $\Omega$	
10		$L = L(x, u, t),$ $K = 0$	$t_1$ фиксировано	$x_1$			
11				$S_1:$ $g_i(x) = 0,$ $i = 1, 2, \dots,$ $n - k$			
12		$L = L(x, u, t),$ $K = K(x)$	$t_1$ фиксировано	$R_n$			
	A	B	C	D	E	F	G

\*  $x_1$  — фиксированная конечная точка;  $R_n$  — свободная конечная точка;  $S_1$  — подпространство размерности  $k+1$ .

### 5.15. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРИНЦИПА МИНИМУМА. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Дадим эвристическое доказательство принципа минимума, основанное на строгом доказательстве, приведенном в работе [179]<sup>1</sup>. Основными нашими целями будет дать соответствующее введение и обосновать строгое доказательство, а также убедить читателя в справедливости принципа минимума. Короче говоря, мы хотим показать справедливость принципа минимума, не доказывая его формально.

В этом параграфе будут тщательно сформулированы две теоремы, относящиеся к частным случаям 1 и 2 (см. § 5.12 и 5.13), которые требуется «доказать». Понимание теоремы и ее доказательства состоит главным образом не в том, чтобы следовать за каждым утверждением теоремы и отдельными этапами обоснования доказательства, а в понимании результатов и основных идей доказательства в целом. Этот процесс в высшей степени индивидуален и часто, в случае сложных доказательств, отнимает много времени. Поэтому советуем, чтобы, во-первых, заинтересованный читатель обращался непосредственно к книге Л. С. Понтрягина [179] и, во-вторых, пусть его не обескураживает, если некоторые из наших замечаний вначале покажутся «не имеющими никакого смысла». В конце концов, мы пытаемся изложить лишь наше понимание доказательства принципа минимума, и если оно покажется читателю трудным, то он может его опустить.

<sup>1</sup> См. также [228].

Необходимые условия		Номер зада- чи
3	4	
$H^*(t) = H^*(t_1) - \int_t^{t_1} \left[ \frac{\partial H}{\partial t} \Big _* + \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \Big _* \right] d\tau;$ $H^*(t_1) = - \frac{\partial K}{\partial t} \Big _{*t_1};$	$p^*(t_1) = \frac{\partial K}{\partial x} \Big _{*t_1}$	5.9 5.11
$H^*(t) = H^*(t_1) - \int_t^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t} \Big _* d\tau$	$p^*(t_1) \text{ — условий нет}$	5.10
	$p^*(t_1) \text{ нормален к } S_1 \text{ при } x^*(t_1)$ $p^*(t_1) = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial x} \Big _{x^*(t_1)}$	5.10
	$p^*(t_1) = \frac{\partial K}{\partial x} \Big _{x^*(t_1)}$	5.10 5.11
<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>

из  $R_n$  размерности  $k$ ;  $g(t)$  — движущаяся конечная точка;  $S$  — подпространство из  $R_n(T_1, T_2)$ .

Сформулируем теоремы, которые должны быть «доказаны». Будем считать, что предположения, сделанные в § 5.12, остаются в силе, и используем обозначения этого параграфа. Мы будем рассматривать только частные случаи 1 и 2 [см. уравнения (5.385)—(5.390)].

**Теорема 5.5П.<sup>1</sup> Принцип минимума для частного случая 1.** Пусть  $u^*(t)$  — допустимое управление, переводящее  $(x_0, t_0)$  в  $S = \{x_1\} \times (T_1, T_2)$ ;  $x^*(t)$  — траектория, удовлетворяющая (5.385), соответствующая  $u^*(t)$ , начинающаяся в  $x_0$  и встречающая  $S$  при  $t_1$ . Необходимым условием оптимальности  $u^*(t)$  (в частном случае 1), является существование неотрицательной константы  $p_0^*$  ( $p_0^* \geq 0$ ) и функции  $p^*(t)$  таких, что а)  $p^*(t)$  и  $x^*(t)$  являются решениями канонической системы

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p} [x^*(t), p^*(t), u^*(t), p_0^*]; \tag{5.488}$$

$$\dot{p}^*(t) = - \frac{\partial H}{\partial x} [x^*(t), p^*(t), u^*(t), p_0^*], \tag{5.489}$$

с граничными условиями

$$x^*(t_0) = x_0, \quad x^*(t_1) = x_1, \tag{5.490}$$

где гамильтониан  $H(x, p, u, p_0)$  имеет вид

$$H(x, p, u, p_0) = p_0 L(x, u) + \langle p, f(x, u) \rangle; \tag{5.491}$$

<sup>1</sup> Все теоремы, относящиеся к доказательству принципа минимума Л. С. Понтрягина, имеют в виде дополнительного обозначения букв: П.

б) функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, \rho_0^*]$  от  $\mathbf{u}$  на  $\Omega$  — имеет абсолютный минимум при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$  для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ , т. е.

$$\min_{\mathbf{u} \in \Omega} H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, \rho_0^*] = H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*]; \quad (5.492)$$

в) функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*]$  равна нулю для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ :

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*] = 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.493)$$

**Теорема 5.6П. Принцип минимума для частного случая 2.** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — допустимое управление, переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S = S_1 \times (T_1, T_2)$ ;  $\mathbf{x}^*(t)$  — траектория по (5.388), соответствующая  $\mathbf{u}^*(t)$ , начинающаяся из  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  и встречающая  $S$  при  $t_1$ . Необходимым условием оптимальности  $\mathbf{u}^*(t)$  (в частном случае 2), является существование неотрицательной константы  $\rho_0^*$  ( $\rho_0^* \geq 0$ ) и функции  $\mathbf{p}^*(t)$  таких, что

а)  $\mathbf{p}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$  являются решениями канонической системы

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*]; \quad (5.494)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*] \quad (5.495)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}^*(t_1) \in S_1, \quad (5.496)$$

где гамильтониан  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, \rho_0)$  имеет вид

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, \rho_0) = \rho_0 L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle; \quad (5.497)$$

б) функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, \rho_0^*]$  от  $\mathbf{u}$  на  $\Omega$  имеет абсолютный минимум при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$  для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ :

$$\min_{\mathbf{u} \in \Omega} H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}, \rho_0^*] = H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*]; \quad (5.498)$$

в) функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*]$  равна нулю для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ :

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*] = 0, \quad t \in [t_0, t_1]; \quad (5.499)$$

г) если  $S_1$  — гладкое подмножество размерности  $k$  из  $R_n$ , то вектор  $\mathbf{p}^*(t_1)$  трансверсален к  $S_1$  в точке  $\mathbf{x}^*(t_1)$  (см. § 3.13). Если  $S_1 = R_n$ , то  $\mathbf{p}^*(t_1)$  есть нулевой вектор:

$$\mathbf{p}^*(t_1) = \mathbf{0}.$$

Эти две теоремы отличаются от теорем 5.5 и 5.6, во-первых, наличием дополнительной постоянной  $\rho_0^*$ , необходимой для того, чтобы можно было рассматривать исключения (см. обсуждение в конце § 5.13). Во-вторых, отметим, что отличие теоремы 5.6П от теоремы 5.5П состоит в дополнительном предложении (пункт г) теоремы 5.6П, где отмечается трансверсальность дополнительной переменной к множеству  $S$ . В следующем параграфе мы «докажем» обе эти теоремы.

## 5.16. ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРИНЦИПА МИНИМУМА

Приведем доказательство принципа минимума, основываясь на геометрических представлениях. Прежде чем перейти к его подробному доказательству, рассмотрим порядок изложения. Разделим этот параграф на отдельные части, каждая из которых соответствует шагу доказательства. Поэтому план доказательства будет представлять собой список этих частей с кратким описанием содержания последних.

1. **Замена переменной.** Введем вспомогательную переменную  $x_0$  такую, что  $\dot{x}_0(t) = L[x(t), y(t)]$  и заменим нашу задачу эквивалентной задачей в  $R_{n+1}$ .

2. **Принцип оптимальности.** Покажем, что любая часть оптимальной траектории должна быть оптимальной траекторией, и дадим геометрическую интерпретацию этого принципа.

3. **Малые изменения начальных условий и их последствия.** Будем в малых пределах изменять начальные условия и обнаружим, что будущий результат этих изменений описывается (приближенно) некоторой однородной линейной системой. Геометрически это будет рассматриваться как движение вектора вдоль оптимальной траектории. Построим «трубку», в пределах которой управление остается (приблизительно) оптимальным.

4. **Движущаяся гиперплоскость.** Рассмотрим систему, которая является сопряженной с однородной линейной системой, описывающей эффект малых изменений начальных условий. Геометрически будем рассматривать эту сопряженную систему как гиперплоскость, движущуюся вдоль оптимальной траектории, и обнаружим, что дополнительный вектор будет нормален к некоторой гиперплоскости, движущейся вдоль оптимальной траектории. Этой гиперплоскостью окажется опорная плоскость выпуклого конуса, построенного на основе результатов возмущения оптимального управления.

5. **Временные вариации оптимального управления.** Будем изменять (в малых пределах) временной интервал, в течение которого прикладывается оптимальное управление, и покажем, что результат этого можно рассматривать геометрически как луч, проходящий через конечную точку.

6. **Местные вариации оптимального управления.** Рассмотрим управления, отличающиеся от оптимального лишь на малом отрезке времени и постоянные на этом отрезке времени. Эффекты, вызванные такого рода управлениями, приводят к определению конуса с вершиной в конечной точке.

7. **Конечный конус.** На основе временных и местных вариаций оптимального управления построим выпуклый конус, вершиной которого является конечная точка. Покажем, что элементы этого конуса соответствуют вариациям оптимального управления.

8. **Доказательство теоремы 5.5П.** «Докажем» теорему 5.5П. Для этого вначале покажем, что луч в направлении уменьшения функционала не встречается внутренней части конечного конуса. После этого определим гиперплоскость, отделяющую этот луч от конечного конуса. Эта гиперплоскость определяет дополнительный вектор.

9. **Условия трансверсальности.** Изменим доказательство теоремы 5.5П. таким образом, чтобы была принята во внимание плоскость, касательная к множеству  $S$ .

По сути дела, мы повторим пошаговый процесс доказательства теорем в § 5.6 и 5.7, с той лишь разницей, что в данном случае задача будет сложнее предыдущих. Иначе говоря, начнем с предположения, что оптимальное управление существует. Далее, для упрощения заменим рассматриваемую задачу эквивалентной в  $R_{n+1}$  (1). После этого установим свойство оптимальных траекторий, известное, как принцип оптимальности (2). Пройдя это, рассмотрим эффекты возмущений оптимального управления (3÷7). И, наконец, «докажем» принцип минимума (8) и (9).

В основном наше доказательство состоит в следующем:

1. Покажем, что имеется «достаточно» возмущений оптимального управления, позволяющих построить конус (с вершиной в конечной точке), обладающий свойством, выражающимся в том, что луч в направлении уменьшения функционала не встречается его внутренней части.

2. Покажем, что нормаль к гиперплоскости, отделяющей этот луч от конуса, можно «двигать назад» вдоль оптимальной траектории таким образом, чтобы определить дополнительный вектор, существование которого было принято при доказательстве теоремы.

1. **Замена переменной.** Начнем с введения вспомогательной переменной  $x_0$ :

$$\dot{x}_0(t) = L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)], \quad x_0(t_0) = 0. \quad (5.500)$$

Непосредственно видно, что

$$J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] dt = \quad (5.501)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}_0(t) dt = x_0(t_1). \quad (5.502)$$

Если рассматривать следующую систему порядка  $n + 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]; \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)], \end{aligned} \right\} \quad (5.503)$$

то частный случай 1 (см. § 5.12) можно перефразировать следующим образом: Дана система порядка  $n + 1$  [уравнения (5.503)], начальное время  $t_0$  и начальное условие  $(0, \mathbf{x}_0)$  [т. е.  $x_0(t_0) = 0$ ] в  $R_{n+1}$ . Пусть  $S = S' \times (T_1, T_2)$  — множество цели [в  $R_{n+1} \times (T_1, T_2)$ ], где  $S'$  — прямая в  $R_{n+1}$ , проходящая через точку  $(0, \mathbf{x}_1)$  параллельно оси  $x_0$ , и определяемая соотношениями

$$x_1 - x_{11} = 0, \quad x_2 - x_{12} = 0, \dots, \quad x_n - x_{1n} = 0, \quad (5.504)$$

где  $x_{1j}$  — компоненты вектора  $\mathbf{x}_1$ . Требуется найти допустимое управление  $\mathbf{u}$ , переводящее  $([x_0], t_0)$  в  $S' \times (T_1, T_2)$  и минимизирующее при этом  $x_0$  в конечный момент времени.

Другими словами, мы хотим найти траекторию системы (5.503), исходящую из точки  $(0, \mathbf{x}_0)$  и пересекающую прямую  $S'$  в точке, где координата  $x_0$  минимальна.

Напомним читателю, что необходимо попасть в заданную точку в фазовом пространстве, причем время прибытия не задано.

Геометрический смысл задачи показан на рис. 5.16, где изображена оптимальная (\*) траектория в  $R_{n+1}$ . Пространство состояний (фазовое пространство) системы часто будем изображать в виде плоскости  $x_i x_j$ , а ось функционала  $x_0$  считать направленной вверх, чтобы установить понятия «вверх» и «вниз». Рис. 5.16, б аналогичен рис. 5.16, а за исключением того, что мы «сжали» пространство состояний в единственную ось. Стрелки показывают направление движения точки в  $R_n$  или в  $R_{n+1}$  с возрастанием времени.

Часто будем изображать ось времени в явном виде. В этом случае одна ось будет осью «стоимости», другая — осью пространства состояний и третья — осью времени. Далее мы будем иметь дело как с векторами из  $R_{n+1}$ , так и с векторами из  $R_n$ . Условимся обозначать элемент из  $R_{n+1}$  через  $\mathbf{y}$  и считать, что  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  являются компонентами  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (5.505)$$

Можно определить  $(n + 1)$ -мерную векторную функцию  $\mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  с компонентами  $g_0, g_1, \dots, g_n$ , положив

$$\left. \begin{aligned} g_0(y_0, y_1, \dots, y_n, \mathbf{u}) &= L(y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbf{u}); \\ g_1(y_0, y_1, \dots, y_n, \mathbf{u}) &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbf{u}); \\ &\dots \dots \dots \\ g_n(y_0, y_1, \dots, y_n, \mathbf{u}) &= f_n(y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbf{u}), \end{aligned} \right\} \quad (5.506)$$

и записать систему уравнений (5.503) в виде

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)]. \quad (5.507)$$

При обсуждении решений систем уравнений (5.503) и (5.507) будем сопоставлять векторы  $\mathbf{y}(t)$  и  $(x_0(t), \mathbf{x}(t))$  и использовать те обозначения, которые наиболее удобны при рассмотрении. Подчеркнем лишний раз, что в данном параграфе  $\mathbf{y}$  обозначает вектор размерности  $n + 1$  и  $\mathbf{x}$  — вектор размерности  $n$ .

Так как принцип минимума является необходимым условием, будем считать, что  $\mathbf{u}^*(t)$  — оптимальное управление и  $\mathbf{x}^*(t)$  — соответствующая ему оптимальная траектория в  $R_n$ . Пусть  $t^*$  обозначает конечное время:

$$\mathbf{x}^*(t^*) = \mathbf{x}_1 \quad (5.508)$$

(см. рис. 5.16),  $x_0^*(t)$  — «стоимость», или значение функционала вдоль оптимальной траектории, т. е.

$$x_0^*(t) = \int_{t_0}^t L[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] dt, \quad t_0 \leq t \leq t^*. \quad (5.509)$$

Итак, в соответствии с принятыми обозначениями,  $\mathbf{y}^*(t)$  представляет собой траекторию в пространстве  $R_{n+1}$  решения системы уравнений (5.507), начинающуюся из  $(0, \mathbf{x}_0)$  и произведенную управлением  $\mathbf{u}^*(t)$  (см. рис. 5.16). Таким образом, имеем

$$\mathbf{y}^*(t_0) = \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix}; \quad (5.510)$$

$$\mathbf{y}^*(t) = \begin{bmatrix} x_0^*(t) \\ \mathbf{x}^*(t) \end{bmatrix} \quad (5.511)$$

и

$$\mathbf{y}^*(t^*) = \begin{bmatrix} J^* \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^*(t^*) \\ \mathbf{x}^*(t^*) \end{bmatrix} \quad (5.512)$$

где  $J^*$  представляет собой минимум «стоимости», т. е.

$$J^* = J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}^*). \quad (5.513)$$

В этом случае траектория  $\mathbf{y}^*(t)$  в  $R_{n+1}$  оптимальна. Она соответствует нашей задаче в ее новой формулировке.

Заметим, что ничего не изменится при сдвиге начала отсчета времени, так как ни система, ни функционал явно от времени не зависят. Иначе говоря, если принять  $t_0 + \tau$  за начальный момент времени, то управление  $\mathbf{u}^\tau$ , определенное как

$$\mathbf{u}^\tau(s + \tau) = \mathbf{u}^*(s), \quad s \in [t_0, t^*], \quad (5.514)$$

будет оптимально и произведет «ту же» траекторию, что и  $u^*$  (где траектория рассматривается как множество точек в  $R_{n+1}$ ). На рис. 5.17, а показаны управления  $u^*$  и  $u^\tau$ , а на рис. 5.17, б — движение в пространстве, образованном функционалом, пространством состояний и временем. Траектории, произведенные управлениями  $u^*$  и  $u^\tau$ , имеют одну и ту же проекцию на плоскость функционал  $\times$  пространство состояний.

**2. Принцип оптимальности.** Покажем, что любая часть оптимальной траектории также является опти-

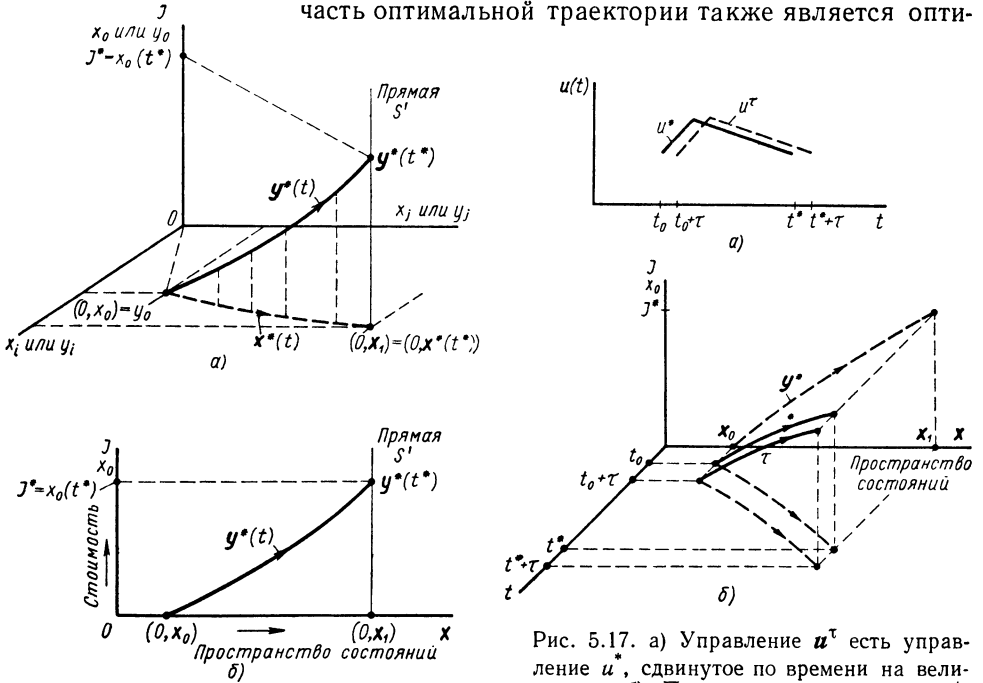


Рис. 5.16. а) Иллюстрация к задаче в пространстве  $R_{n+1}$ . Плоскость  $x_i x_j$  представляет собой пространство состояний (фазовое пространство) системы, ось  $x_0$  — стоимость. Оптимальной траекторией в  $R_{n+1}$  является  $y^*(t)$ . Проекцией  $y^*(t)$  на пространство состояний ( $x_i x_j$ ) является траектория  $x^*(t)$ . б) На этом рисунке пространство состояний сжато в одну ось  $x$

Рис. 5.17. а) Управление  $u^\tau$  есть управление  $u^*$ , сдвинутое по времени на величину  $\tau$ . б) Показано движение в  $n + 2$ -мерном пространстве; добавлена ось времени, чтобы показать влияние сдвига по времени. Траектория, отмеченная звездочкой (\*), получена от действия управления  $u^*$ , а траектория, отмеченная индексом  $\tau$ , — от сдвинутого управления  $u^\tau$ . Проекция обеих траекторий на плоскость  $x_0 x$  одинаковы и представляют собой траекторию, обозначенную  $y^*$

мальной<sup>1</sup>. Начнем с того, что докажем оптимальность управления  $u^*$  для любой точки оптимальной траектории. Для этого предположим, что  $y_i^* = y^*(t) = (x_0^*(t), x^*(t))$  есть точка на оптимальной траектории, причем  $t_0 < t < t^*$ . В этом случае управление  $u_{(t, t^*)}^*$  переведет эту точку в  $S'$ . Если  $\tilde{u}$  — другое допустимое управление, переводящее  $y_i^*$  в  $S'$ , то обозначив через  $y(\tau)$  решение системы уравнений (5.507), удовлетворяющее начальному условию

$$\tilde{y}(0) = y_i^*, \quad (5.515)^2$$

и полагая, что  $\tilde{\tau}$  — момент встречи с  $S'$ , можно обнаружить

$$\tilde{y}_0(\tilde{\tau}) \geq J^* = x_0^*(t^*). \quad (5.516)$$

<sup>1</sup> Это утверждение часто называют принципом оптимальности (см. [20]).

<sup>2</sup> Можно принять за начало  $\tau = 0$ , так как явная зависимость от времени отсутствует.

В противном случае [если условие (5.516) не удовлетворяется] управление  $u^*$  не было бы оптимальным. Последнее нетрудно увидеть из рис. 5.18, где цифрой II обозначена траектория  $\tilde{y}(\tau)$ .

Убедимся теперь, что, как это показано на рис. 5.19, все траектории системы (5.507), начинающиеся из  $y_0 = (0, x_0)$  и встречающие  $S'$ , должны

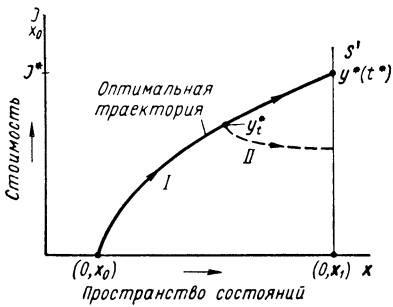


Рис. 5.18. Траектория не может состоять из двух сегментов I и II, так как это противоречит предположению о том, что  $u^*$  есть оптимальное управление

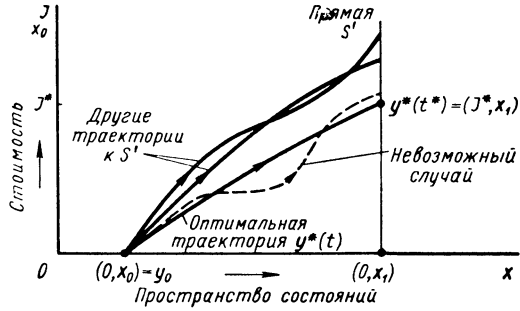


Рис. 5.19. Иллюстрация возможных и невозможных траекторий в  $R_{n+1}$

лежать «выше» оптимальной траектории. Проверим это утверждение, показав, что любая часть оптимальной

траектории также является оптимальной в следующем смысле.

Предположим, точки  $y_{t_1}^*$  и  $y_{t_2}^*$  принадлежат к оптимальной траектории, показанной на рис. 5.20, а  $S''$  — прямая, проходящая через точку  $y_{t_2}^*$  параллельно оси функционала. Управление  $u_{[t_1, t_2]}^*$  переводит  $y_{t_1}^*$  в  $S''$ .

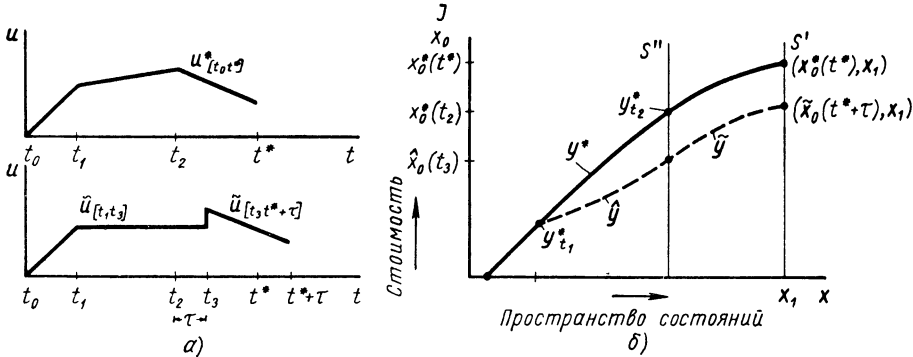


Рис. 5.20. а) Два управления, переводящие начальное состояние в прямую  $S'$ . Управление  $\tilde{u}_{[t_3, t^*+\tau]}$  сдвинуто относительно управления  $u_{[t_2, t^*]}^*$  на  $\tau$  сек. б) Траектория, состоящая из  $\hat{y}$  и  $\tilde{y}$ , невозможна, так как это противоречит оптимальности  $y^*$

Если  $\hat{u}_{(t_1, t_2)}$  — любое другое допустимое управление, переводящее  $y_{t_1}^*$  в  $S''$ , то при этом должно выполняться условие  $\hat{x}_0(t_3) \geq y_0^*(t_2)$  (где через  $t_3$  обозначен момент времени, в который траектория  $\hat{y}_{(t_1, t_3)}$ , произведенная управлением  $\hat{u}$ , встречается  $S''$ ). Другими словами, предполагаем, что  $u_{(t_0, t^*)}^*$  есть оптимальное управление (рис. 5.20, а) и  $y_{(t_0, t^*)}^*$  — соответствующая ему оптимальная траектория (рис. 5.20, б). Будем считать, что  $t_0 \leq t_1 < t_2 \leq t^*$



и

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{t_1}^* &= \mathbf{y}^*(t_1) = \begin{bmatrix} x_0^*(t_1) \\ \mathbf{x}^*(t_1) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{y}_{t_2}^* &= \mathbf{y}^*(t_2) = \begin{bmatrix} x_0^*(t_2) \\ \mathbf{x}^*(t_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.517)$$

— две точки на оптимальной траектории. Предположим, что  $S''$  — прямая, проходящая через точку  $\mathbf{y}_{t_2}^*$  параллельно оси функционала; пусть  $\mathbf{u}_{(t_1, t_3)}$  — любое допустимое управление (рис. 5.20, а), переводящее  $\mathbf{y}_{t_1}^*$  в  $S''$ , т. е. траектория  $\hat{\mathbf{y}}_{(t_1, t_3)}$  (рис. 5.20, б) обладает свойством

$$\mathbf{y}(t_3) = \begin{bmatrix} \hat{x}_0(t_3) \\ \mathbf{x}(t_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0(t_3) \\ \mathbf{x}^*(t_2) \end{bmatrix} \quad (5.518)$$

или, эквивалентно,

$$\mathbf{x}(t_3) = \mathbf{x}^*(t_2). \quad (5.519)$$

Покажем, что

$$\hat{x}_0(t_3) \geq x_0^*(t_2). \quad (5.520)$$

Если уравнение (5.520) не удовлетворяется, то тогда

$$\hat{x}_0(t_3) < x_0^*(t_2). \quad (5.521)$$

Если  $\tau$  (см. рис. 5.20) определено соотношением

$$t_3 = t_2 + \tau, \quad (5.522)$$

то уравнения (5.519) и (5.521) запишутся соответственно

$$\hat{\mathbf{x}}(t_2 + \tau) = \mathbf{x}^*(t_2); \quad (5.523)$$

$$\hat{x}_0(t_2 + \tau) < x_0^*(t_2). \quad (5.524)$$

Предположим, что в момент времени  $t_3$  мы приложим управление

$$\tilde{\mathbf{u}}_{(t_3, t_3+\tau)} = \tilde{\mathbf{u}}_{(t_2+\tau, t_2+\tau)} \quad (5.525)$$

(см. рис. 5.20, а). Управление  $\tilde{\mathbf{u}}$  имеет тот же вид, что и  $\mathbf{u}^*$ , но сдвинуто по времени:

$$\tilde{\mathbf{u}}(s + \tau) = \mathbf{u}^*(s), \quad s \in (t_2, t_3]. \quad (5.526)$$

Тогда управление  $\tilde{\mathbf{u}}$  производит траекторию  $\tilde{\mathbf{y}}$ , исходящую из точки  $[\hat{x}_0(t_2 + \tau), \mathbf{x}^*(t_2)]$  и встречающую прямую  $S'$  при  $t^* + \tau$ . Иначе говоря, если  $\tilde{\mathbf{y}}(s + \tau) = (\tilde{x}_0(s + \tau), \tilde{\mathbf{x}}(s + \tau))$  для  $s \in (t_2, t_3]$ , то

$$\tilde{\mathbf{x}}(t^* + \tau) = \mathbf{x}^*(t^*) = \mathbf{x}_1. \quad (5.527)$$

Мы имеем

$$\tilde{x}_0(t^* + \tau) = \tilde{x}_0(t_2 + \tau) + \int_{t_2+\tau}^{t^*+\tau} L[\tilde{\mathbf{x}}(s + \tau), \tilde{\mathbf{u}}(s + \tau)] d(s + \tau) = \quad (5.528)$$

$$= \tilde{x}_0(t_2 + \tau) + \int_{t_2}^{t^*} L[\mathbf{x}^*(s), \mathbf{u}^*(s)] ds = \quad (5.529)$$

$$= \tilde{x}_0(t_2 + \tau) + x_0^*(t^*) - x_0^*(t_2) = \quad (5.530)$$

$$= \hat{x}_0(t_3) + x_0^*(t^*) - x_0^*(t_2); \quad (5.531)$$

на основании условия (5.521) заключаем

$$\tilde{x}_0(t^* + \tau) < x_0^*(t^*), \quad (5.532)$$

что противоречит оптимальности  $u^*$ . Таким образом, утверждение (5.520) доказано. Мы показали тем самым эквивалентность оптимальности  $u^*$  геометрическому свойству, состоящему в том, что все траектории  $y$ , встречающие  $S'$ , должны лежать выше траектории, производимой оптимальным управлением  $u^*$  (см. рис. 5.19).

Геометрическая интерпретация оптимальности поможет нам построить вокруг оптимальной траектории «трубку», внутри которой управление  $u^*$  приблизительно оптимально. Введение этой «трубки» позволит нам преодолеть трудности, связанные с тем, что наши возмущенные траектории должны проходить через  $x_1$  (см. § 5.9).

**3. Малые изменения начальных условий и их последствия.** Имея в виду построение «трубки», в которой  $u^*$  приблизительно оптимально, изменим на малую величину исходное состояние  $(0, x_0)$  и посмотрим, как это изменение «распространится» вдоль оптимальной траектории. Иначе говоря, рассмотрим новую начальную точку в  $R_{n+1}$ :

$$(0, x_0) + \varepsilon(v_0, v) + O(\varepsilon), \quad (5.533)$$

где  $\varepsilon$  — малое положительное число и, как обычно,  $O(\varepsilon)$  — вектор

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|O(\varepsilon)\|}{\varepsilon} = 0. \quad (5.534)$$

Заметим, что решение системы (5.507), начинающееся из точки, определяемой выражением (5.533), и произведенное управлением  $u^*$ , имеет вид

$$(x_0^*(t), x^*(t)) + \varepsilon(\chi_0(t), \chi(t)) + O(\varepsilon), \quad (5.535)$$

где  $(\chi_0(t), \chi(t))$  — решение линейной системы порядка  $n + 1$  вида

$$\dot{\chi}_0(t) = \left\langle \frac{\partial L}{\partial x} [x^*(t), u^*(t)], \chi(t) \right\rangle; \quad (5.536)$$

$$\dot{\chi}(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} [x^*(t), u^*(t)], \chi(t) \right) \quad (5.537)$$

с начальными условиями

$$\chi_0(t_0) = v_0; \quad (5.538)$$

$$\chi(t_0) = v. \quad (5.539)$$

Отметим также, что систему (5.536), (5.537) можно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_0(t) \\ \dot{\chi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \left| \frac{\partial L}{\partial x_1} \right|_* & \left| \frac{\partial L}{\partial x_2} \right|_* & \cdots & \left| \frac{\partial L}{\partial x_n} \right|_* \\ \mathbf{0} & \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_* & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_0(t) \\ \chi(t) \end{bmatrix}, \quad (5.540)$$

где символ  $|_*$  указывает, что функция должна вычисляться вдоль оптимальной траектории. Если через  $A^*(t)$  обозначить матрицу размера  $n + 1 \times n + 1$ , входящую в уравнение (5.540), а именно:

$$A^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & \left| \frac{\partial L}{\partial x_1} \right|_* & \left| \frac{\partial L}{\partial x_2} \right|_* & \cdots & \left| \frac{\partial L}{\partial x_n} \right|_* \\ \mathbf{0} & \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_* & & & \end{bmatrix}, \quad (5.541)$$

и через  $\psi(t)$  обозначить  $n + 1$ -мерный вектор  $(\chi_0(t), \chi(t))$ , а через  $\xi$   $n + 1$ -мерный вектор  $(v_0, v)$ , то  $\psi(t)$  будет решением однородной линейной системы порядка  $n + 1$

$$\dot{\psi}(t) = A_*(t)\psi(t), \quad (5.542)$$

удовлетворяющим начальному условию

$$\psi(t_0) = \xi = \begin{bmatrix} v_0 \\ v \end{bmatrix}. \quad (5.543)$$

Это означает, что наша новая траектория в  $R_{n+1}$  имеет вид

$$y^*(t) + \varepsilon\psi(t) + O(\varepsilon). \quad (5.544)$$

Если считать, что вектор  $\xi$  «приставлен» к начальной точке  $y_0 = (0, x_0)$ , то, как показано на рис. 5.21, вектор  $\psi(t)$  можно считать «приставленным» к точке  $y^*(t)$ . Таким образом, вектор  $\psi(t)$  можно рас-

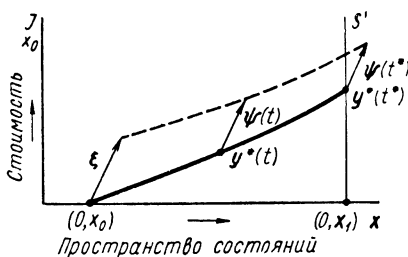


Рис. 5.21. Результат малых возмущений начальных условий. Эффект малого возмущения  $\varepsilon\xi$  может быть приблизительно описан с помощью распространения вектора  $\varepsilon\psi(t)$ , приставленного к траектории  $y^*(t)$ . Малые возмущения опущены для упрощения чертежа. Вектор  $\psi(t)$  есть решение линейной системы (5.542) с начальным условием (5.543)

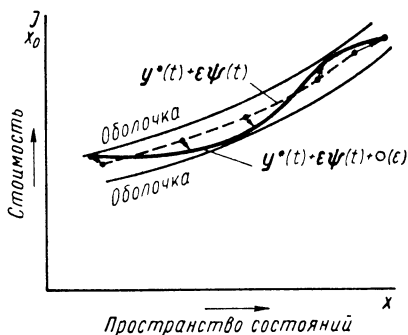


Рис. 5.22. «Ширина» оболочки значительно изменяется в зависимости от времени и приблизительно равна  $\varepsilon^2$

следует писать  $O(\varepsilon, t)$ . Однако, ввиду предположения относительно гладкости функций, можно убедиться в том, что

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left\{ \frac{\|O(\varepsilon, t)\|}{\varepsilon} \right\} = 0. \quad (5.545)$$

Это означает, что зависимостью вектора  $O(\varepsilon, t)$  от  $t$  можно пренебречь. Геометрическая интерпретация последнего замечания показана на рис. 5.22, из которого видно, что траектория  $y^*(t) + \varepsilon\psi(t) + O(\varepsilon)$  всегда лежит в узкой полосе [ограниченной кривыми (оболочкой) на рис. 5.22] вблизи кривой  $y^*(t) + \varepsilon\psi(t)$ . Интерпретация этого замечания сводится к тому, что «ширина» полосы не изменяется значительно со временем; порядок величины ее не превышает  $\varepsilon$  вдоль всей траектории.

Если  $\Phi_*(t, t_0)$  обозначает фундаментальную матрицу системы (5.542) размера  $n + 1 \times n + 1$ , то нетрудно заметить, что

$$\psi(t) = \Phi_*(t, t_0)\xi \quad (5.546)$$

и

$$\psi(t^*) = \Phi_*(t^*, t_0)\xi. \quad (5.547)$$

Таким образом, мы можем считать, что система (5.542) определяет линейное преобразование пространства  $n + 1$  векторов, «приставленных»

к  $y_0$ , в пространство  $n + 1$  векторов, «приставленных» к  $y^*(t)$ . Так как матрица  $\Phi_*(t, t_0)$  — невырожденная, то и это линейное преобразование невырожденное.

Любая часть оптимальной траектории есть оптимальная траектория. Если  $t_1$  и  $t_2$  — элементы из  $[t_0, t^*]$ , то точно так же можно определить линейное преобразование пространства  $n + 1$  векторов, «приставленных» к  $y^*(t_1)$ , в пространство  $n + 1$  векторов, «приставленных» к  $y^*(t_2)$ . Действительно, если  $\xi_1$  — вектор размерности  $n + 1$ , «приставленный» к  $y^*(t_1)$ , то его изображение, полученное с помощью линейного преобразования, есть вектор

$$\Phi_*(t_2, t_1)\xi_1. \quad (5.548)$$

Таким образом, можно считать, что однородная линейная система (5.542) описывает будущий эффект малых изменений оптимальной траектории в данный момент времени. Малое положительное число  $\varepsilon$  мы будем в дальнейшем рассматривать в качестве параметра. Иначе говоря, рассматривая некоторые определенные величины, будем предполагать  $\varepsilon$  выбранным настолько малым, что выполняются требования, предъявляемые к этим величинам. Например, если  $\xi$  и  $\hat{\xi} - n + 1$ -мерные векторы, «приставленные» к  $y_0$ , то  $\varepsilon$  считается «достаточно» малым для того, чтобы  $y^*(t) + \varepsilon\psi(t)$  и  $y^*(t) + \varepsilon\hat{\psi}(t)$  были «близки» к  $y^*(t)$ , где  $\psi(t)$  и  $\hat{\psi}(t)$  — решения системы уравнений (5.542), удовлетворяющие начальным условиям  $\psi(t_0) = \xi$  и  $\hat{\psi}(t_0) = \hat{\xi}$  соответственно.

Так как незначительные изменения начальных условий вызывают малые изменения решений дифференциального уравнения, то можно убедиться, что все траектории системы (5.507), начинающиеся из точки (5.533) и встречающие  $S'$  также внутри области порядка  $\varepsilon$ , лежат «приблизительно выше» траектории, произведенной  $u^*$ . Иначе говоря, если  $\hat{u}$  — допустимое управление, производящее траекторию  $\hat{y}$ , которая начинается из точки (5.533) и для некоторого  $\hat{t}$  удовлетворяет условиям

$$\hat{x}(\hat{t}) = x_1 + \varepsilon x_1, \quad (5.549)$$

и

$$\hat{y}(\hat{t}) = [\hat{x}_0(\hat{t}), \hat{x}(\hat{t})],$$

то

$$\hat{x}_0(\hat{t}) - x_0^*(t^*) - \varepsilon\psi_0(t^*) \geq -|\circ(\varepsilon)|. \quad (5.550)$$

Таким образом, с точностью до членов высшего порядка относительно  $\varepsilon$  управление  $u^*$  оптимально для новой исходной точки (5.533). Действительно, как показано на рис. 5.23, управление  $u^*$  оптимально (в пределах первой степени относительно  $\varepsilon$ ) в «трубке» около оптимальной траектории. Возмущения  $u$  управления  $u^*$ , которые рассматриваются,

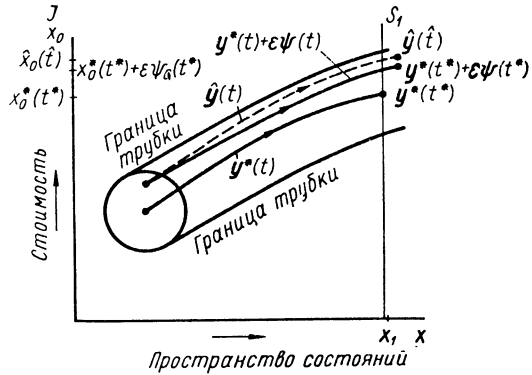


Рис. 5.23. Траектория  $\hat{y}(\hat{t})$  от действия допустимого управления  $\hat{u}$  «приблизительно выше» траектории  $y^*(t) + \varepsilon\psi(t)$ , так как управление  $u^*$  оптимально в пределах первой степени  $\varepsilon$  в трубке относительно  $y^*(t)$

не выведут нас из этой «трубки», и поэтому мы вправе предполагать, что  $J(\mathbf{u})$  приблизительно больше функционала  $J(\mathbf{u}^*)$  для любой точки в «трубке». Отметим, что эта трубка строится только для геометрической интерпретации.

**4. Движущиеся гиперплоскости.** Рассмотрим систему, сопряженную с однородной линейной системой  $\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \mathbf{A}_*(t)\boldsymbol{\psi}(t)$ , [уравнение (5.542)] с целью выяснить, не имеет ли она полезной геометрической интерпретации (см. § 3.25, определение сопряженной системы).

Так как матрица  $-\mathbf{A}'_*(t)$  дается соотношением

$$-\mathbf{A}'_*(t) = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{*} & \vdots & -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{*}\right)' \end{bmatrix} = \quad (5.551)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial L}{\partial x_1} \Big|_{*} & \vdots & -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{*} & -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{*} & \dots & -\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Big|_{*} \\ -\frac{\partial L}{\partial x_2} \Big|_{*} & \vdots & -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{*} & -\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{*} & \dots & -\frac{\partial f_n}{\partial x_2} \Big|_{*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial L}{\partial x_n} \Big|_{*} & \vdots & -\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_{*} & -\frac{\partial f_2}{\partial x_n} \Big|_{*} & \dots & -\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Big|_{*} \end{bmatrix}, \quad (5.552)$$

непосредственно получаем, что система, сопряженная с (5.542), имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_0(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{*} & \vdots & -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{*}\right)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix} \quad (5.553)$$

или, эквивалентно,

$$\dot{p}_0(t) = 0; \quad (5.554)$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{*} \mathbf{p}_0(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{*}\right)' \mathbf{p}(t). \quad (5.555)$$

С одной стороны, из уравнения (5.554) непосредственно вытекает, что  $p_0(t) = \text{const}$  для любого  $t$ , с другой — гамильтониан  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, p_0)$  определяется как

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, p_0) = p_0 L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle. \quad (5.556)$$

Поэтому соотношение (5.555) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^*(t), p_0]. \quad (5.557)$$

Заметим также, что если  $p_0 = \text{const}$  и  $\mathbf{p}(t)$  — решение (5.557), то скалярное произведение

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle = \text{const} \quad (5.558)$$

для любого решения  $\boldsymbol{\psi}(t)$  уравнения (5.542).

Если считать, что  $P_0$  — гиперплоскость, проходящая через  $\mathbf{y}_0$  и удовлетворяющая уравнению

$$\left\langle \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix}, \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \right\rangle = 0, \quad (5.559)^1$$

<sup>1</sup>  $\begin{bmatrix} \pi_0 \\ \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix}$  нормален к гиперплоскости  $P_0$ .

и принять, что  $\mathbf{y}_0 + \varepsilon \xi$  — вектор размерности  $n + 1$ , то решение уравнения (5.553), удовлетворяющее начальному условию

$$p_0(t_0) = \pi_0, \quad \mathbf{p}(t_0) = \boldsymbol{\pi}, \quad (5.560)$$

определяет гиперплоскость  $P_t$ , описываемую уравнением

$$\left\langle \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{y} - \mathbf{y}^*(t) \right\rangle = 0. \quad (5.561)$$

Эта гиперплоскость проходит через точку  $\mathbf{y}^*(t)$  и имеет то же скалярное произведение с вектором  $\boldsymbol{\psi}(t)$ , приложенным в точке  $\mathbf{y}^*(t)$ , что и вектор  $\xi$  в точке  $\mathbf{y}_0$  с гиперплоскостью  $P_0$ . В частности, если  $P_0$  перпендикулярна  $\xi$ , то  $P_t$  перпендикулярна  $\boldsymbol{\psi}(t)$ . Гиперплоскость  $P_t$  можно рас-

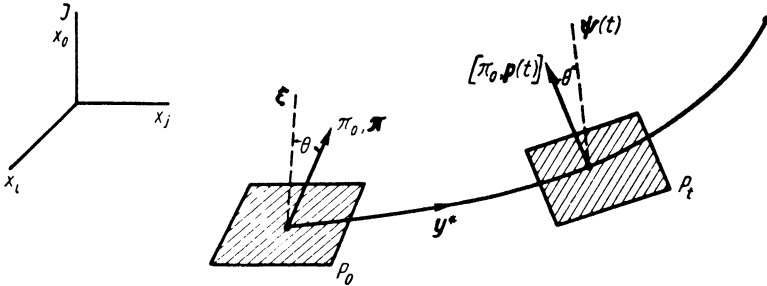


Рис. 5.24. Изображение движущейся гиперплоскости  $P_t$ . Вектор  $(\pi_0, \boldsymbol{\pi})$  перпендикулярен к гиперплоскости  $P_0$  в точке  $\mathbf{y}^*(t_0)$ . Вектор  $\xi$  (или  $\varepsilon \xi$ ) изображает возмущение начального условия  $\mathbf{y}^*(t_0)$ . В момент времени  $t$  вектор  $(\pi_0, \mathbf{p}(t))$  перпендикулярен к гиперплоскости  $P_t$  в точке  $\mathbf{y}^*(t)$ . Система координат показана слева сверху.

смагивать как результат движения (передачи) гиперплоскости  $P_0$  вдоль оптимальной траектории, как это показано на рис. 5.24.

Заметим, что если  $\pi_0 = 0$ , то уравнение  $P_t$  имеет вид

$$\langle \mathbf{p}(t), \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t) \rangle = 0, \quad (5.562)$$

и, следовательно, не зависит от координаты функционала (5.562) в  $R_{n+1}$ , т. е.  $P_t$  параллельна оси  $x_0$ . Это положение поясняет смысл исключения  $p_0^* = 0$ .

Если сравнить соотношение (5.557) с (5.489), то можно заметить, что сопряженные переменные соответствуют движению некоторой гиперплоскости вдоль оптимальной траектории. Таким образом, можно сформулировать следующий основной вопрос: Как можно определить гиперплоскость, которая позволила бы доказать теорему?

Прежде чем изложить ответ на этот вопрос, рассмотрим, каков общий путь определения гиперплоскостей, проходящих через данную точку  $\mathbf{y}$ ?

Если предположить, что  $\mathbf{y}$  — граничная точка выпуклого множества  $S$ , то существует опорная гиперплоскость, проходящая через  $\mathbf{y}$  (см. теорему 3.5). Поэтому введем в рассмотрение подходящее выпуклое множество  $S_t^*$ , имеющее  $\mathbf{y}^*(t^*) = (J^*, \mathbf{x}_1)$  своей граничной точкой, а также опорную гиперплоскость, которая будет использована для доказательства теоремы. По сути дела, мы определим выпуклые конусы  $S_t$  с вершинами в  $\mathbf{y}^*(t)$ , рассматривая особый класс вариаций или возмущений управления  $\mathbf{u}^*$ . Эти конусы всегда лежат с одной и той же стороны гиперплоскостей, определенных дополнительными переменными, и назы-

ваются конусами достижимости. Лучи конуса  $C_{t^*}$  соответствуют возмущениям  $\mathbf{u}^*$ , которые будут рассматриваться.

В дальнейшем сосредоточим внимание на описании вариаций  $\mathbf{u}^*$ .

**5. Временные вариации оптимального управления.** Первый основной тип вариаций, который будем называть временными вариациями, состоит в изменении на малую величину конечного времени  $t^*$ . В этом случае рассматривается результат приложения оптимального управления  $\mathbf{u}^*$  в течение нового временного интервала. Строго говоря, если  $\tau$  — произ-

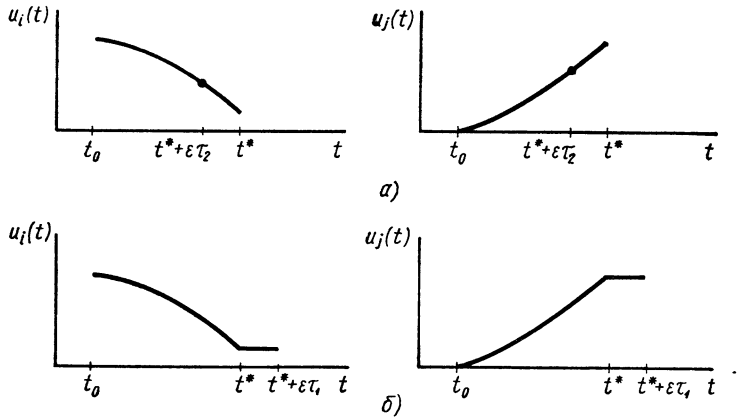


Рис. 5.25. Типичные временные вариации двух компонент ( $u_i$  и  $u_j$ ) оптимального управления  $\mathbf{u}^*(t)$ : а)  $\tau_2$  отрицательно; б)  $\tau_1$  положительно, компоненты  $\mathbf{u}[\tau](t)$  постоянны на интервале  $(t^*, t^* + \varepsilon\tau_1]$  и равны компонентам  $\mathbf{u}^*(t^*)$

вольное действительное число, то временная вариация  $\mathbf{u}(\tau)$  управления  $\mathbf{u}^*$  определяется соотношениями

$$\mathbf{u}[\tau](t) = \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \mathbf{u}^*(t), \quad t_0 \leq t \leq t^* + \varepsilon\tau, \quad \tau < 0 \\ \mathbf{u}^*(t), \quad t_0 \leq t \leq t^*; \\ \mathbf{u}^*(t^*), \quad t^* < t \leq t^* + \varepsilon\tau \end{array} \right\} \tau \leq 0 \\ \left. \begin{array}{l} \mathbf{u}^*(t), \quad t_0 \leq t \leq t^* + \varepsilon\tau, \quad \tau > 0 \\ \mathbf{u}^*(t), \quad t_0 \leq t \leq t^*; \\ \mathbf{u}^*(t^*), \quad t^* < t \leq t^* + \varepsilon\tau \end{array} \right\} \tau \geq 0 \end{array} \right\} \quad (5.563)$$

Две типичные временные вариации управления  $\mathbf{u}^*$  показаны на рис. 5.25, где  $\tau_1 > 0$  и  $\tau_2 < 0$ .

Если  $\varepsilon$  мало, то решение  $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}(t))$  системы (5.507), начинающееся из  $\mathbf{y}_0 = (0, \mathbf{x}_0)$  и произведенное управлением  $\mathbf{u}(\tau)$ , обладает свойством

$$\mathbf{y}^*(t^* + \varepsilon\tau) = \mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon\delta[\tau] + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.564)$$

где  $\delta[\tau] — n + 1$ -мерный вектор, не зависящий от  $\varepsilon$ .

Действительно, в силу предположения о дифференцируемости переменных и малости  $\varepsilon$  можно показать, что

$$\delta[\tau] = \mathbf{g}[\mathbf{y}^*(t^*), \mathbf{u}^*(t^*)]\tau = \quad (5.565)$$

$$= \begin{bmatrix} L[\mathbf{x}^*(t^*), \mathbf{u}^*(t^*)] \\ \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t^*), \mathbf{u}^*(t^*)] \end{bmatrix} \tau = \quad (5.566)$$

$$= \begin{bmatrix} L[\mathbf{x}_1, \mathbf{u}^*(t^*)] \\ \mathbf{f}[\mathbf{x}_1, \mathbf{u}^*(t^*)] \end{bmatrix} \tau. \quad (5.567)$$

Уравнения (5.564) и (5.565) можно истолковать как точную форму записи утверждения, что «дифференциал» есть лучшая аппроксимация первого порядка для приращений функции<sup>1</sup>.

Будем рассматривать вектор  $\delta(\tau)$  [или  $\varepsilon\delta(\tau)$ ] «приставленным» к точке  $y^*(t^*)$ , как показано на рис. 5.26. Из уравнения (5.566) непосредственно следует, что векторы  $\delta(\tau)$  для различных величин  $\tau$  расположены на одном и том же луче (прямой)  $\vec{\rho}$ , проходящем через точку

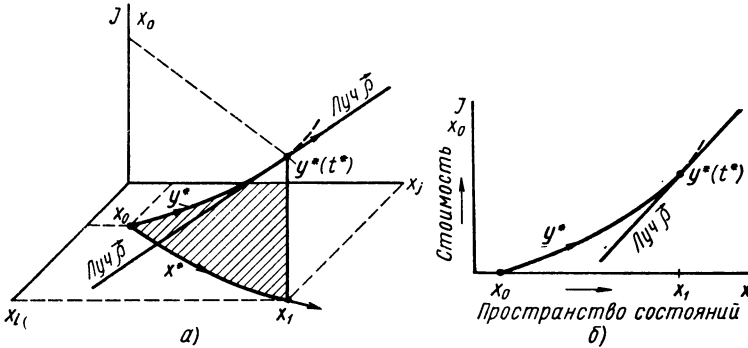


Рис. 5.26. Иллюстрация луча  $\vec{\rho}$ , производимого временными вариациями управления. Луч  $\vec{\rho}$  проходит через точку  $y^*(t^*)$ . Его направление определяется наклоном  $y^*(t)$  в точке  $y^*(t^*)$

$y^*(t^*)$  и, по сути дела, они «заполняют» эту прямую. Далее, из (5.566) видно, что  $\delta(\tau)$  есть линейная функция  $\tau$ , причем

$$\delta[\alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2] = \alpha_1\delta[\tau_1] + \alpha_2\delta[\tau_2] \quad (5.568)$$

для всех действительных чисел  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Наконец, на основании выражения (5.566) можно заключить, что любому вектору  $\delta$  вида

$$\delta = \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta[\tau_i] \quad (5.569)$$

соответствует возмущение  $u_\delta$  управления  $u^*$  (т. е.  $u_\delta = u \left[ \sum_{i=1}^M \alpha_i \tau_i \right]$ ), такое, что вектор  $\varepsilon\delta$  представляет собой разность (в пределах первого порядка относительно  $\varepsilon$ ) между концом возмущенной траектории от действия  $u_\delta$  и конечной точкой оптимальной траектории. Здесь принято, что  $M$  — произвольное конечное число,  $\alpha_i$  — неотрицательные и  $\tau_i$  — произвольные действительные числа.

**6. Местные вариации оптимального управления.** Вторым основным типом вариаций, которые мы будем называть местными вариациями, являются управления, отличающиеся от  $u^*$  на очень малом отрезке времени и постоянные в пределах этого отрезка. Физически такая вариация представляет собой маленький импульс энергии управления. Более точно, если  $\omega$  — элемент из ограниченного множества  $\Omega$  и  $I = (b - \varepsilon a, b)$  — полуоткрытый (слева) подынтервал из  $[t_0, t^*]$ , правая точка которого не является разрывом  $u^*$  и не есть  $t^*$ , то местная вариация  $u[\omega, I]$  управления  $u^*$  определяется как

$$u[\omega, I](t) = \begin{cases} u^*(t), & t \notin I; \\ \omega, & t \in I. \end{cases} \quad (5.570)$$

<sup>1</sup> Иначе говоря, мы утверждаем, что  $y(t^* + \varepsilon\tau) - y^*(t^*) \approx \varepsilon \dot{y}^*(t^*) \tau$ .



Типичный вид  $u[\omega, I]$  показан на рис. 5.27. Рассмотрим, что получится, если управление  $u[\omega, I]$  приложить к системе (5.507). Обозначим решение системы (5.507), начинающееся из  $y_0 = (0, x_0)$  и произведенное управлением  $u[\omega, I]$ , через  $y(t) = (x_0(t), x(t))$ . Как показано на рис. 5.28,  $y(t)$  будет совпадать с оптимальной траекторией для  $t_0 \leq t \leq b - \varepsilon a$ , а затем мало отличаться от нее. Действительно, из предположения о дифференцируемости и о малости интервала  $I$  следует

$$y(b) = y^*(b) + \varepsilon \{\dot{y}(b) - \dot{y}^*(b)\} a + o(\varepsilon). \quad (5.571)$$

Но так как  $y$  и  $y^*$  являются решениями системы уравнений (5.507), имеем

$$\dot{y}(b) = g[y(b), \omega] = \begin{bmatrix} L[x(b), \omega] \\ f[x(b), \omega] \end{bmatrix}; \quad (5.572)$$

$$\dot{y}^*(b) = g[y^*(b), u^*(b)] = \begin{bmatrix} L[x^*(b), u^*(b)] \\ f[x^*(b), u^*(b)] \end{bmatrix}. \quad (5.573)$$

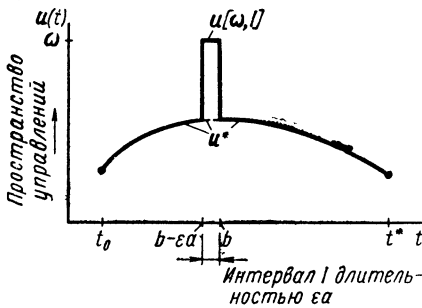


Рис. 5.27. Типичный вид местной вариации управления. Управление  $u[\omega, I]$  отличается от оптимального управления  $u^*$  на бесконечно малом интервале времени

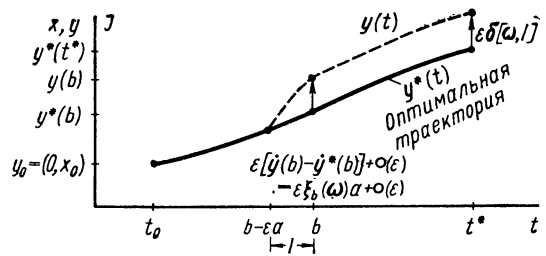


Рис. 5.28. Влияние местной вариации управления на оптимальную траекторию  $y^*(t)$ . В конце интервала  $I$  разность между траекториями приблизительно равна  $\varepsilon \xi_b(\omega) a$ . В конечный момент времени  $t^*$  вектор  $\varepsilon \delta[\omega, I]$  представляет собой результат возмущения  $\varepsilon \xi_b(\omega) a$ , рассматриваемого как возмущение «начальных» условий при  $t = b$

Так как  $\frac{\partial L}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial x}$  непрерывны и длина  $\varepsilon a$  интервала  $I$  мала, имеем

$$L[x(b), \omega] = L[x^*(b), \omega] + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}; \quad (5.574)$$

$$f[x^*(b), \omega] = f[x^*(b), \omega] + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (5.575)$$

и на основании соотношения (5.571) получим, что

$$y(b) = y^*(b) + \varepsilon \{g[y^*(b), \omega] - g[y^*(b), u^*(b)]\} a + o(\varepsilon) \quad (5.576)$$

или, эквивалентно,

$$x_0(b) = x_0^*(b) + \varepsilon \{L[x^*(b), \omega] - L[x^*(b), u^*(b)]\} a + o(\varepsilon); \quad (5.577)$$

$$x(b) = x^*(b) + \varepsilon \{f[x^*(b), \omega] - f[x^*(b), u^*(b)]\} a + o(\varepsilon). \quad (5.578)$$

Положение в точке  $b$  иллюстрируется с помощью рис. 5.28.

Остающаяся часть возмущенной траектории  $y(t)$  получена в результате приложения к системе управления  $u^*(b, t^*)$ , начиная с точки  $y(b)$ . Вспоминая обсуждение однородной линейной системы уравнений (5.542) и, в частности, замечания, приводящие к уравнению (5.548), и обозначив

$$\xi_b(\omega) = g[y^*(b), \omega] - g[y^*(b), u^*(b)], \quad (5.579)$$

уравнение (5.576) можно записать в виде

$$\mathbf{y}(b) = \mathbf{y}^*(b) + \varepsilon \xi_b(\omega) a + O(\varepsilon). \quad (5.580)$$

Траекторию  $\mathbf{y}(t)$  для  $t > b$  можно выразить как

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*(t) + \varepsilon \Phi_*(t, b) \xi_b(\omega) a + O(\varepsilon), \quad (5.581)$$

где  $\Phi_*$  — фундаментальная матрица системы (5.542) размера  $n + 1 \times n + 1$ . В частности, имеем

$$\mathbf{y}(t^*) = \mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \Phi_*(t^*, b) \xi_b(\omega) a + O(\varepsilon). \quad (5.582)$$

Обозначив через  $\delta[\omega, I]$  вектор  $\Phi_*(t^*, b) \xi_b(\omega) a$ , т. е. приняв, что

$$\begin{aligned} \delta[\omega, I] &= \Phi_*(t^*, b) \xi_b(\omega) a = \\ &= \Phi_*(t^*, b) \begin{bmatrix} L[\mathbf{x}^*(b), \omega] - L[\mathbf{x}^*(b), \mathbf{u}^*(b)] \\ \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(b), \omega] - \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(b), \mathbf{u}^*(b)] \end{bmatrix} a, \end{aligned} \quad (5.583)$$

найдем, что от управления  $\mathbf{u}[\omega, I]$  получается траектория

$$\mathbf{y}(t^*) = \mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \delta[\omega, I] + O(\varepsilon), \quad (5.584)$$

где  $n + 1$  — мерный вектор  $\delta[\omega, I]$  не зависит от  $\varepsilon$ .

**Упражнение 5.18.** Проверьте уравнение (5.580). Указание:  $L[\mathbf{x}(b), \omega] = L[\mathbf{x}^*(b), \omega] + \left\langle \frac{\partial L[\mathbf{x}^*(b), \omega]}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}(b) - \mathbf{x}^*(b) \right\rangle +$  члены высшего порядка относительно  $\mathbf{x}(b) - \mathbf{x}^*(b)$ . Необходимо показать, что  $\|\mathbf{x}(b) - \mathbf{x}^*(b)\| = O(\varepsilon)$ , так как интервал  $I$  мал.

Будем считать, что вектор  $\delta[\omega, I]$  (или  $\varepsilon \delta[\omega, I]$ ) приложен в точке  $\mathbf{y}^*(t^*)$ , как это показано на рис. 5.28 и 5.29. Из уравнения (5.583) видно, что «направление» вектора  $\delta[\omega, I]$  не зависит от длины интервала  $I$ . Иначе говоря, если, скажем,  $I'$  есть интервал  $(b - \varepsilon a', b]$ , то векторы  $\delta[\omega, I]$  и  $\delta[\omega, I']$  расположены на одном и том же луче, проходящем через точку  $\mathbf{y}^*(t^*)$ , и различаются лишь по величине. Этот луч зависит только от точки  $b$  и вектора  $\omega$ .

Выразим это, записав  $\vec{\rho}[\omega, b]$ . Таким образом,  $\vec{\rho}[\omega, b]$  [см. уравнение (3.22а)] есть множество вида  $\vec{\rho}[\omega, b] = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{y}^*(t^*) + \beta \delta[\omega, I]; \beta \geq 0\}$  (5.585)

или, эквивалентно,

$$\vec{\rho}[\omega, b] = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{y}^*(t^*) + \beta \Phi_*(t^*, b) \xi_b(\omega); \beta \geq 0\}. \quad (5.586)$$

Напомним, что

$$\xi_b(\omega) = \begin{bmatrix} L[\mathbf{x}^*(b), \omega] - L[\mathbf{x}^*(b), \mathbf{u}^*(b)] \\ \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(b), \omega] - \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(b), \mathbf{u}^*(b)] \end{bmatrix}. \quad (5.587)$$

Обозначим конус с вершиной  $\mathbf{y}^*(t^*)$ , образованный всеми этими лучами, через  $\vec{P}$ . Другими словами,  $\vec{P}$  есть множество всех векторов  $\mathbf{y}$ , для

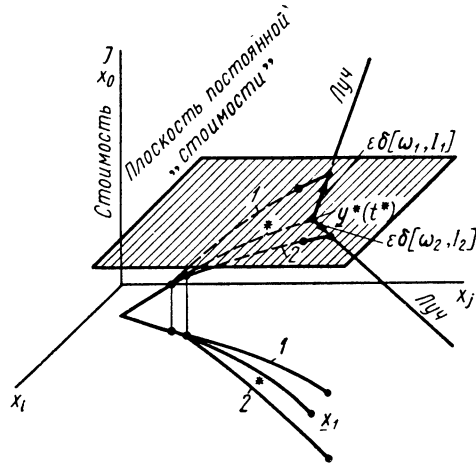


Рис. 5.29. Результаты двух различных местных возмущений. Траектория, отмеченная звездочкой \*, оптимальна. Траектория 1 соответствует возмущению  $\mathbf{u}[\omega_1, I_1]$ , которое при  $t = t^*$  дает вектор  $\varepsilon \delta[\omega_1, I_1]$ . Траектория 2 соответствует возмущению  $\mathbf{u}[\omega_2, I_2]$ , которое дает при  $t = t^*$  вектор  $\varepsilon \delta[\omega_2, I_2]$ . Направления  $\delta[\omega_1, I_1]$  и  $\delta[\omega_2, I_2]$  определяют два показанных луча. Отметим, что оба луча начинаются из  $\mathbf{y}^*(t^*)$

которых существует  $\omega$  из  $\Omega$  и точка  $b$  из  $[t_0, t^*]$ , не являющаяся точкой разрыва  $u^*$ , такие, что  $y$  располагаются на луче  $\vec{\rho}[\omega, b]$ . Как показано на рис. 5.30, конус не обязательно выпуклый<sup>1</sup>, поэтому «сделаем» его выпуклым. Рассмотрим выпуклую оболочку (см. определение 3.21)  $co(\vec{P})$  множества  $\vec{P}$ , образованную множеством всех выпуклых комбинаций элементов  $\vec{P}$  (см. определение 3.20). Иначе говоря,  $y$  есть элемент  $co(\vec{P})$  тогда, когда существуют действительные числа  $r_1, r_2, \dots, r_N$  ( $N$  может зависеть от  $y$ ),  $r_j \geq 0$  для всех  $j$ , причем

$$\sum_{j=1}^N r_j = 1,$$

и вектора  $y_1, y_2, \dots, y_N$  из  $\vec{P}$ , такие, что

$$y = \sum_{j=1}^N r_j y_j. \quad (5.588)$$

Заметим, что множество  $co(\vec{P})$  есть выпуклый конус с вершиной  $y^*(t^*)$ .

**Упражнение 5.19.** Требуется показать, что  $co(\vec{P})$  есть конус с вершиной  $y^*(t^*)$ . Указание: пусть  $y = r_1 y_1 + s_2 y_2$ ,  $r, s \geq 0$ ,  $r + s = 1$

Рис. 5.30. Типичный конус  $\vec{P}$ , получающийся в результате местных вариаций. Точка  $y^*(t^*)$  есть вершина конуса  $\vec{P}$

и  $y_1, y_2 \in \vec{P}$ . Тогда  $y_1 = y^*(t^*) + \beta_1 \delta[\omega_1, I_1]$ ,  $y_2 = y^*(t^*) + \beta_2 \delta[\omega_2, I_2]$ . Надо показать, что каждая точка на луче, соединяющем  $y$  и  $y^*(t^*)$ , принадлежит  $co(\vec{P})$ . Если  $z$  — точка на этом луче, то  $z = y^*(t^*) + \beta[y - y^*(t^*)]$ , где  $\beta \geq 0$ .

Далее нужно доказать, что  $z = y^*(t^*) + \beta r \beta_1 \delta[\omega_1, I_1] + \beta s \beta_2 \delta[\omega_2, I_2]$ . Дальнейшие доказательства выполняются по методу индукции.

Если теперь предположить, что  $y$  есть элемент  $co(\vec{P})$ , то можно написать

$$y = y^*(t^*) + \varepsilon \delta, \quad (5.589)$$

где

$$\delta = \sum_{j=1}^N \beta_j \delta[\omega_j, I_j], \quad (5.590)$$

и считать вектор  $\delta$  «приставленным» к точке  $y^*(t^*)$ . Можно также показать, что существует допустимое управление  $u_\delta$  такое, что траектория  $y_\delta$  системы (5.507), начинающаяся из точки  $y_0(0, x_0)$  и произведенная управлением  $u_\delta$ , обладает свойством

$$y_\delta(t^*) = y + o(\varepsilon) = \quad (5.591)$$

$$= y^*(t^*) + \varepsilon \delta + o(\varepsilon) = \quad (5.592)$$

$$= y^*(t^*) + \varepsilon \sum_{j=1}^N \beta_j \delta[\omega_j, I_j] + o(\varepsilon). \quad (5.593)$$

Строгое доказательство этого утверждения содержится в работе [179]. Оно требует введения понятий, использованных для описания возмущений управления в работе [179]. Однако можно догадаться, что в силу

<sup>1</sup> Это следует из произвольного характера  $\Omega$  и нелинейностей рассматриваемых систем. Например,  $\Omega$  может состоять либо из изолированной точки, либо конуса  $\vec{P}$ , состоящего из отдельных лучей.

линейности и однородности системы уравнений (5.542) управление  $u_\delta$  будет отличаться от  $u^*$  на конечном множестве малых подынтервалов из  $[t_0, t^*]$  и будет постоянно в пределах этих подынтервалов. Например, если предположить (см. рис. 5.31), что

$$\delta = \beta_1 \delta[\omega_1, I_1] + \beta_2 \delta[\omega_2, I_2], \quad (5.594)$$

где интервалы  $I_1$  и  $I_2$  разделены, то приняв  $I_1 = (b_1 - \varepsilon a_1, b_1]$ ;  $I_2 = (b_2 - \varepsilon a_2, b_2]$  и полагая, что интервалы  $I'_1 = (b_1 - \varepsilon \beta_1 a_1, b_1]$ ;

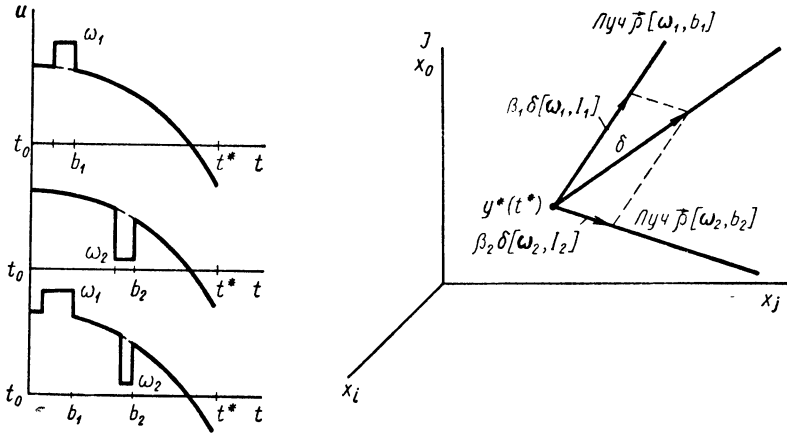


Рис. 5.31. Построение вектора  $\delta$  [см. уравнение (5.594)] из двух элементов лучей  $\vec{p}[\omega_1, b_1]$  и  $\vec{p}[\omega_2, b_2]$ . Управление, показанное на нижнем рисунке, можно использовать для получения луча, определяемого  $\delta$  [см. уравнение (5.595)]

$I'_2 = (b_2 - \varepsilon \beta_2 a_2, b_2]$  — разделенные подынтервалы из  $[t_0, t^*]$ , можно легко показать, что управление  $u_\delta$ , определенное как

$$u_\delta(t) = \begin{cases} u^*(t), & t \notin I'_1 \cup I'_2; \\ \omega_1, & t \in I'_1; \\ \omega_2, & t \in I'_2 \end{cases} \quad (5.595)$$

дает траекторию

$$y_\delta(t^*) = y^*(t^*) + \varepsilon \delta + o(\varepsilon). \quad (5.596)$$

Легко также проверить, что луч конуса  $co(\vec{P})$ , на котором располагается  $\delta$ , определяется соотношением

$$\{y : y = y^*(t^*) + \varepsilon \beta [\Phi_*(t^*, b_1) \xi_{b_1}(\omega_1) + \Phi_*(t^*, b_2) \xi_{b_2}(\omega_2)], \beta \geq 0\}; \quad (5.597)$$

где векторы  $\xi_{b_i}(\omega_i)$  определяются при помощи выражения (5.579) и  $\Phi_*$  — фундаментальная матрица системы уравнений (5.542).

**Упражнение 5.20.** Покажите, что управление  $u_\delta$ , определяемое выражением (5.595), производит траекторию  $y_\delta$ , удовлетворяющую соотношению (5.596). У к а з а н и е: используйте выражение (5.548) и переходное свойство фундаментальной матрицы.

**7. Конечный конус.** Объединим эффекты, вызываемые временными и местными вариациями  $u^*$ . В результате построим выпуклый конус с вершиной  $y^*(t^*)$ , который будет играть важную роль в нашем «доказательстве» принципа минимума.

Напомним, что все векторы  $\varepsilon \delta(\tau)$ , возникающие в результате временных вариаций  $\mathbf{u}^*$ , лежат на прямой, проходящей через точку  $\mathbf{y}^*(t^*)$ . Обозначим множество всех этих векторов через  $\vec{\rho}$ . Множество

$$\vec{\rho} + \text{co}(\vec{P}) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 \in \text{co}(\vec{P}), \mathbf{y}_2 \in \vec{\rho}\} = \quad (5.598)$$

$$= \left\{ \mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta[\tau_i] + \varepsilon \sum_{j=1}^N \beta_j \delta[\omega_j, I_j]; \alpha_i, \beta_j \geq 0 \right\} \quad (5.599)$$

есть выпуклый конус с вершиной  $\mathbf{y}^*(t^*)$  (рис. 5.32). Так как  $\vec{\rho}$  выпукло по выражению (5.568) и конус  $\text{co}(\vec{P})$  является выпуклым по определению,

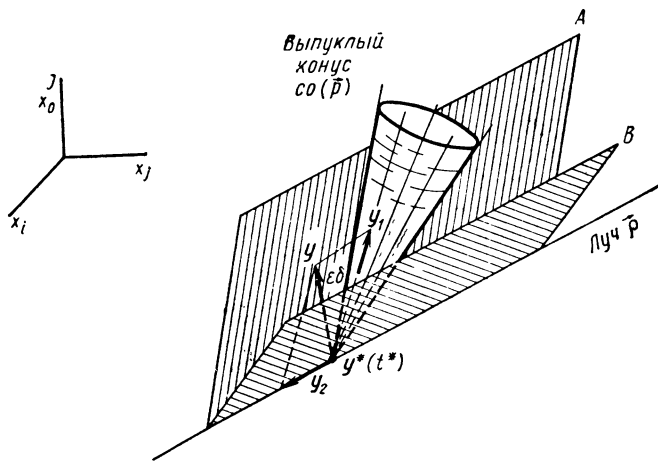


Рис. 5.32. Построение выпуклого конуса  $\vec{\rho} + \text{co}(\vec{P}) = C_{t^*}$ . На этом рисунке луч  $\vec{\rho}$  соответствует временным вариациям (см. рис. 5.26), а выпуклый конус  $\text{co}(\vec{P})$  соответствует местным вариациям (см. рис. 5.30). Выпуклый конус  $C_{t^*}$  с вершиной  $\mathbf{y}^*(t^*)$  построен как совокупность линейных комбинаций элементов  $\vec{\rho}$  (типа  $\mathbf{y}_2$ ) и элементов  $\text{co}(\vec{P})$  (типа  $\mathbf{y}_1$ ). Множество  $C_{t^*}$  изображено при помощи двух (полу) плоскостей A и B, каждая из которых содержит луч  $\vec{\rho}$ . Таким образом, каждая точка «дольки», вырезаемой плоскостями A и B, есть элемент  $C_{t^*}$ .

то множество  $\vec{\rho} + \text{co}(\vec{P})$  выпукло. С другой стороны, если

$$\mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta[\tau_i] + \varepsilon \sum_{j=1}^N \beta_j \delta[\omega_j, I_j]$$

есть элемент из  $\vec{\rho} + \text{co}(\vec{P})$ , то типичный элемент луча, соединяющего эту точку с точкой  $\mathbf{y}^*(t^*)$ , имеет вид

$$\mathbf{y}^*(t^*) + \gamma \left\{ \mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta[\tau_i] + \varepsilon \sum_{j=1}^N \beta_j \delta[\omega_j, I_j] - \mathbf{y}^*(t^*) \right\}, \quad \gamma \geq 0 \quad (5.600)$$

или, эквивалентно,

$$\mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \gamma \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta[\tau_i] + \varepsilon \gamma \sum_{j=1}^N \beta_j \delta[\omega_j, I_j], \quad \gamma \geq 0 \quad (5.601)$$

и, следовательно, является элементом из  $\vec{\rho} + \text{co}(\vec{P})$ .

Итак, множество  $\vec{\rho} + \text{co}(\vec{P})$  есть выпуклый конус с вершиной  $\mathbf{y}^*(t^*)$ . Обозначим его через  $C_{t^*}$ :

$$C_{t^*} = \vec{\rho} + \text{co}(\vec{P}). \quad (5.602)$$

Выпуклый конус  $C_{t^*}$ , показанный на рис. 5.32, является множеством всех векторов, исходящих из  $\mathbf{y}^*(t^*)$  и лежащих между двумя полуплоскостями  $A$  и  $B$ ; каждая из полуплоскостей содержит луч  $\vec{\rho}$ .

Для элемента  $\mathbf{y}$  из  $C_{t^*}$  можно написать

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \delta, \quad (5.603)$$

где

$$\delta = \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta[\tau_i] + \sum_{j=1}^N \beta_j \delta[\omega_j, I_j] \quad (5.604)$$

и где вектор  $\delta$  (или  $\varepsilon \delta$ ) считается «приставленным» к точке  $\mathbf{y}^*(t^*)$ . Можно показать, что существует допустимое управление  $\mathbf{u}_\delta$  такое, что траектория  $\mathbf{y}_\delta$  системы (5.507), начинающаяся из  $\mathbf{y}_0 = (0, \mathbf{x}_0)$  и произведенная управлением  $\mathbf{u}_\delta$ , обладает свойством

$$\mathbf{y}_\delta(t_f) = \mathbf{y} + \mathcal{O}(\varepsilon) = \quad (5.605)$$

$$= \mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \delta + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.606)$$

где  $t_f$  — конечное время для управления  $\mathbf{u}_\delta$ .

Строгое доказательство этого положения содержится в работе [179]. Заметим, что управление  $\mathbf{u}_\delta$  вызывает небольшое отклонение от конечного времени  $t^*$ , а также отличается от  $\mathbf{u}^*$  на множестве очень малых подынтервалов из  $[t_0, t^*]$  и постоянно на них.

Например, для

$$\delta = \delta[\tau] + \delta[\omega, I], \quad (5.607)$$

где  $\tau > 0$  и  $I = (b - \varepsilon a, b]$ , нетрудно показать, что управление

$$\mathbf{u}_\delta = \begin{cases} \omega & t \in I; \\ \mathbf{u}^*(t) & t \notin I \text{ и } t_0 \leq t < t^*; \\ \mathbf{u}^*(t^*) & t^* < t \leq t^* + \varepsilon \tau \end{cases} \quad (5.608)$$

даст траекторию

$$\mathbf{y}_\delta(t^* + \varepsilon \tau) = \mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \delta + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (5.609)$$

Возмущение  $\mathbf{u}_\delta$  показано на рис. 5.33.

В силу предположения, что любая часть оптимальной траектории также является оптимальной траекторией, для любого  $t$  из  $(t_0, t^*]$  можно определить конус  $C_t$  аналогично тому, как был найден конус  $C_{t^*}$ . Конусы  $C_t$  для  $t$  из  $(t_0, t^*]$  будем называть конусами достижимости. Если обозначить замыкание  $C_t$  через  $\bar{C}_t$  (см. определение 3.9), то нетрудно убедиться, что множество  $\bar{C}_t$  опять будет выпуклым конусом с вершиной  $\mathbf{y}^*(t)$ .

Можно также показать, что для  $\hat{t} \geq t$

$$\Phi_*(\hat{t}, t) \bar{C}_t \subset \bar{C}_{\hat{t}} \quad (5.610)^1$$

<sup>1</sup> Обычно эти соотношения являются равенствами, однако для доказательства принципа минимума достаточно включения.

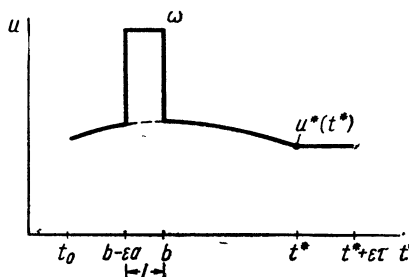


Рис. 5.33. Показанное управление содержит местную и временную вариации [см. уравнение (5.608)]. Такое управление дает элементы выпуклого конуса  $C_{t^*}$ , показанного на рис. 5.32

и, в частности,

$$\Phi_*(t^*, t) \bar{C}_t \subset \bar{C}_{t^*}. \quad (5.611)$$

Так как  $\Phi_*$  — фундаментальная матрица линейной системы (5.542), из уравнения (5.611) следует, что

$$\Phi_*(t, t^*) \Phi_*(t^*, t) \bar{C}_t \subset \Phi_*(t, t^*) \bar{C}_{t^*}. \quad (5.612)$$

и

$$\bar{C}_t \subset \Phi_*(t, t^*) \bar{C}_{t^*}. \quad (5.613)$$

Соотношение (5.613) можно использовать для доказательства того, что конусы достижимости располагаются по одну сторону движущейся гиперплоскости, определяемой дополнительными переменными.

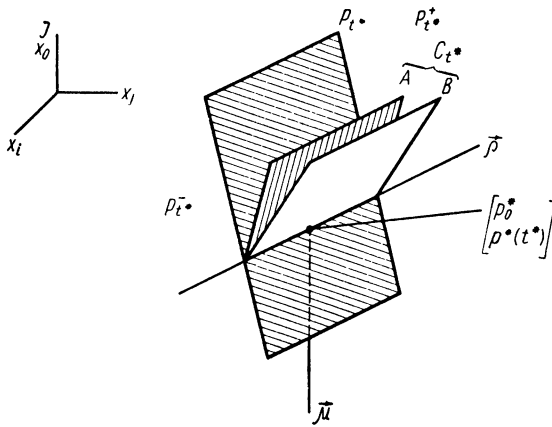


Рис. 5.34. Гиперплоскость  $P_{t^*}$  является типичной опорной гиперплоскостью для выпуклого конуса  $C_{t^*}$  и разделяет  $C_{t^*}$  и луч  $\vec{\mu}$ . Так как луч  $\vec{\rho}$  есть элемент  $C_{t^*}$ , гиперплоскость  $P_{t^*}$  содержит луч  $\vec{\rho}$ . Вектор  $\begin{bmatrix} p_0^* \\ p^*(t^*) \end{bmatrix}$  нормален к  $P_{t^*}$  в точке  $\mathbf{y}^*(t^*)$ . Выпуклый конус  $C_{t^*}$  находится с одной стороны ( $P_{t^*}^+$ ) от плоскости  $P_{t^*}$ , луч  $\vec{\mu}$  находится с другой стороны ( $P_{t^*}^-$ ). Луч  $\vec{\mu}$  направлен в сторону уменьшения стоимости

**8. Доказательство теоремы 5.5П.** Мы подготовлены теперь к тому, чтобы приступить к доказательству теоремы 5.5П. Сначала убедимся, что луч в направлении уменьшения функционала, исходящий из  $\mathbf{y}^*(t^*)$ , не встречает внутренней части (см. определение 3.8) конуса  $C_{t^*}$ . Более строго, если  $\boldsymbol{\mu}$  — вектор размерности  $n + 1$ ,

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.614)$$

то луч  $\vec{\mu}$ , определенный как

$$\vec{\mu} = \{ \mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \boldsymbol{\mu}, \beta > 0 \}, \quad (5.615)$$

не встречает внутренней части конуса  $C_{t^*}$  (рис. 5.34).

Утверждение относительно  $\vec{\mu}$  докажем от противного. Предположим, что вектор

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \hat{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\mu}, \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} > 0 \quad (5.616)$$

есть внутренняя точка (см. определение 3.4) конуса  $C_{t^*}$ . Тогда существует возмущение  $\hat{\mathbf{u}}$  управления  $\mathbf{u}^*$ , производящее на интервале  $[t_0, \hat{t}]$  траекторию  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  системы (5.507), для которой

$$\hat{\mathbf{y}}(\hat{t}) = \mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \hat{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\mu} + o(\varepsilon). \quad (5.617)$$

Вспоминая, что

$$\hat{\mathbf{y}}(\hat{t}) = \begin{bmatrix} J(\hat{\mathbf{u}}) \\ \hat{\mathbf{x}}(\hat{t}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^*(t^*) = \begin{bmatrix} J^* \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} \quad (5.618)$$

и  $\mu$  выражается соотношением (5.614), мы можем записать выражение (5.617) в виде

$$J(\hat{\mathbf{u}}) = J^* - \varepsilon \hat{\beta} + o(\varepsilon); \quad \hat{\mathbf{x}}(\hat{t}) = \mathbf{x}_1 + o(\varepsilon), \quad (5.619)$$

При достаточно малом  $\varepsilon$  управление  $\hat{\mathbf{u}}$  не выведет систему из «оптимальной трубки», и поэтому  $\mathbf{u}^*$  оптимально с точностью до первого порядка относительно  $\varepsilon$ . Но, согласно выражению (5.619), управление  $\hat{\mathbf{u}}$  приводит к снижению порядка  $\varepsilon$  в функционале и к изменениям высшего порядка (относительно  $\varepsilon$ ) положения конечной точки траектории системы в пространстве  $R_n$ . Итак, если  $\varepsilon$  очень мало, мы получаем противоречие, состоящее в том, что траектория  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  оказывается «ниже» траектории  $\mathbf{y}^*(t)$  (с точностью до членов высших порядков<sup>1</sup>). Следовательно,  $\hat{\mathbf{u}}$  не может быть внутренней точкой  $C_{t^*}$ . Таким образом, луч  $\vec{\mu}$  не встречает внутренней части  $C_{t^*}$ .

Конус  $C_{t^*}$  выпуклый, и поэтому его внутренняя часть  $i(C_{t^*})$  — открытое выпуклое множество в  $R_{n+1}$ . Так как луч  $\vec{\mu}$  — выпуклое множество, не встречающееся с внутренней частью  $i(C_{t^*})$  конуса  $C_{t^*}$ , то на основании теоремы 3.5 можно заключить, что существует опорная гиперплоскость  $P_{t^*}$ , отделяющая  $C_{t^*}$  от луча  $\vec{\mu}$ <sup>2</sup>. Гиперплоскость  $P_{t^*}$ , показанная на рис. 5.34, проходит через точку  $\mathbf{y}^*(t^*)$  и обладает тем свойством, что луч  $\vec{\mu}$  лежит в полупространстве  $P_{t^*}^-$ , тогда как конус  $C_{t^*}$  содержится в полупространстве  $P_{t^*}^+$  (см. § 3.7). Другими словами, существует ненулевой вектор размерности  $n + 1$ , который мы обозначим через  $\begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}$  такой, что гиперплоскость  $P_{t^*}$  определяется уравнением

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \mathbf{y} - \mathbf{y}^*(t^*) \right\rangle = 0, \quad (5.620)$$

причем удовлетворяются условия

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \mu \right\rangle \leq 0; \quad (5.621)$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \delta \right\rangle \geq 0, \quad (5.622)$$

<sup>1</sup> Детальное доказательство этого ключевого положения содержится в работе [179]. В нем используются некоторые сложные топологические доказательства. См., в частности, леммы 3 и 4 в работе [179]. При этом соотношение (5.163) также играет важную роль.

<sup>2</sup> Согласно теореме 3.5 существует по меньшей мере одна такая гиперплоскость. На самом деле их может быть больше одной, и наше доказательство точно так же применимо к любой из них. Строго говоря, это доказательство справедливо лишь в том случае, если внутренняя часть  $C_{t^*}$  не является пустой. Однако, если внутренняя часть пуста, желаемый результат можно получить, рассматривая лучи

$$\vec{\mu}(\alpha) = \{ \mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{y}^*(t^*) + \varepsilon \beta \mu, \beta \geq \alpha \}, \quad \alpha > 0,$$

которые не встречают  $C_{t^*}$ , переходя к пределам или используя понятия, содержащиеся в сносках на стр. 106 и 107 работы [179].



где  $\mu$  — направление, соответствующее выражению (5.614), и  $\delta$  — любой элемент конуса  $C_{t^*}$ . Вектор  $\begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}$  нормален к гиперплоскости  $P_{t^*}$  в точке  $\mathbf{y}^*(t^*)$ . Уравнение (5.621) означает, что

$$p_0^* \geq 0, \quad (5.623)^1$$

так как  $\mu$  — вектор, определенный по выражению (5.614).

Найдем теперь дополнительные переменные на основе обсуждения движущихся гиперплоскостей в разделе 4 настоящего параграфа. При этом напомним, что система уравнений (5.542) линейна и однородна и имеет вид

$$\dot{\Psi}(t) = \mathbf{A}_*(t)\Psi(t), \quad (5.624)$$

где  $\mathbf{A}_*(t)$  есть  $n + 1 \times n + 1$  матрица:

$$\mathbf{A}_*(t) = \begin{bmatrix} 0 & \left. \frac{\partial L}{\partial x_1} \right|_* & \left. \frac{\partial L}{\partial x_2} \right|_* & \cdots & \left. \frac{\partial L}{\partial x_n} \right|_* \\ \mathbf{0} & \left( \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_* \right) & & & \end{bmatrix}. \quad (5.625)$$

Эта система описывает движение вектора вдоль оптимальной траектории. Вспомним, что система уравнений (5.553), являющаяся сопряженной к (5.624), также линейна и однородна и имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_0(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix} = -\mathbf{A}'_*(t) \begin{bmatrix} p_0(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix}. \quad (5.626)$$

Как отмечалось в § 4, она описывает движение гиперплоскости вдоль оптимальной траектории, и мы воспользуемся этим обстоятельством для определения искомых дополнительных переменных. Для удобства, как и ранее, обозначим через  $\Phi_*(t, t_0)$  фундаментальную матрицу системы (5.624), а через  $\Psi_*(t, t_0)$  — фундаментальную матрицу сопряженной системы (5.626).

Построим теперь дополнительные переменные путем отыскания гиперплоскости, движение которой вдоль оптимальной траектории приводит к плоскости  $P_{t^*}$ . Так как матрица  $\Psi_*(t, t_0)$  невырожденная, существует ненулевой вектор  $\begin{bmatrix} \pi_0 \\ \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix}$  размерности  $n + 1$  такой, что

$$\Psi_*(t^*, t_0) \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}. \quad (5.627)$$

Определим  $n + 1$ -мерную векторную функцию  $\begin{bmatrix} p_0^*(t) \\ \mathbf{p}^*(t) \end{bmatrix}$ , приняв

$$\begin{bmatrix} p_0^*(t) \\ \mathbf{p}^*(t) \end{bmatrix} = \Psi_*(t, t_0) \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix}, \quad t \in [t_0, t^*]. \quad (5.628)$$

Тогда из уравнения (5.554) получим

$$p_0^*(t) = p_0^* = \pi_0 \text{ для любого } t; \quad (5.629)$$

из уравнения (5.555) имеем

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = - \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right|_* p_0^* - \left( \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_* \right)' \mathbf{p}^*(t). \quad (5.630)$$

<sup>1</sup> Если  $p_0^* = 0$ , то гиперплоскость  $P_{t^*}$  содержит луч  $\vec{\mu}$  и наша задача, по сути дела, не зависит от функционала.

Так как гамильтониан  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, p_0)$  определяется соотношением

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, p_0) = p_0 L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle, \quad (5.631)$$

то уравнение (5.630) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), p_0^*]. \quad (5.632)$$

Покажем теперь, что  $p_0^*$  и  $\mathbf{p}^*(t)$  удовлетворяют требованиям теоремы 5.5П. Сначала докажем, что  $\mathbf{u}^*$  минимизирует гамильтониан. Предположим,  $b$  — точка из  $(t_0, t^*]$ , не являющаяся разрывом  $\mathbf{u}^*$ , и  $\omega$  — элемент из  $\Omega$ . Напомним, что  $\xi_b(\omega)$  выражается соотношением [см. (5.579)]

$$\xi_b(\omega) = \begin{bmatrix} L[\mathbf{x}^*(b), \omega] - L[\mathbf{x}^*(b), \mathbf{u}^*(b)] \\ \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(b), \omega] - \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(b), \mathbf{u}^*(b)] \end{bmatrix} \quad (5.633)$$

и  $\Phi_*(t, b)$  — фундаментальная матрица вида (5.624). Тогда для малого  $\varepsilon$  вектор

$$\varepsilon \Phi_*(t^*, b) \xi_b(\omega) \quad (5.634)$$

принадлежит к  $C_t^1$ , и, следовательно, в силу условия (5.622) имеем

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \Phi_*(t^*, b) \xi_b(\omega) \right\rangle \geq 0. \quad (5.635)$$

Так как функция  $\psi(t) = \Phi_*(t, b) \xi_b(\omega)$  есть решение системы (5.624), являющейся сопряженной к (5.626), можно убедиться, что

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(b) \end{bmatrix}, \xi_b(\omega) \right\rangle \geq 0 \quad (5.636)$$

или

$$H[\mathbf{x}^*(b), \mathbf{p}^*(b), \omega, p_0^*] \geq H[\mathbf{x}^*(b), \mathbf{p}^*(b), \mathbf{u}^*(b), p_0^*]. \quad (5.637)$$

Так как  $\omega$  — любой элемент из  $\Omega$ , то мы доказали справедливость выражения (5.492), т. е.

$$\min_{\mathbf{u} \in \Omega} H[\mathbf{x}^*(b), \mathbf{p}^*(b), \mathbf{u}, p_0^*] = H[\mathbf{x}^*(b), \mathbf{p}^*(b), \mathbf{u}^*(b), p_0^*]. \quad (5.638)$$

Последнее и является утверждением б) теоремы 5.5П. Покажем, что гамильтониан равен нулю в конечный момент времени  $t^*$ . При этом, если  $\tau$  — произвольное действительное число, то [см. условие (5.536)]

$$\delta(\tau) = \begin{bmatrix} L[\mathbf{x}^*(t^*), \mathbf{u}^*(t^*)] \\ \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t^*), \mathbf{u}^*(t^*)] \end{bmatrix} \tau. \quad (5.639)$$

Из условия (5.622) следует, что

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L[\mathbf{x}^*(t^*), \mathbf{u}^*(t^*)] \\ \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t^*), \mathbf{u}^*(t^*)] \end{bmatrix} \right\rangle \tau \geq 0 \quad (5.640)$$

или

$$H[\mathbf{x}^*(t^*), \mathbf{p}^*(t^*), \mathbf{u}^*(t^*), p_0^*] \tau \geq 0. \quad (5.641)$$

Так как  $\tau$  может быть как положительным, так и отрицательным, то должно выполняться следующее соотношение:

$$H[\mathbf{x}^*(t^*), \mathbf{p}^*(t^*), \mathbf{u}^*(t^*), p_0^*] = 0. \quad (5.642)$$

Покажем, наконец, что функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), p_0^*]$  — постоянная на интервале  $[t_0, t^*]$ . Для этого воспользуемся дополнительно

предположением, что множество точек, в которых  $\mathbf{u}^*$  непрерывно, обладает свойством: <sup>1</sup>если  $\hat{t} \in [t_0, t^*]$  — точка, в которой  $\mathbf{u}^*$  непрерывно, то  $\mathbf{u}^*$  непрерывно для всех  $t$  из  $[t_0, t^*]$ , достаточно близких к  $\hat{t}$ . Это предположение справедливо, например, если  $\mathbf{u}^*$  имеет конечное число разрывов.

Пусть  $t_1$  и  $t_2$  — элементы из  $[t_0, t^*]$ , причем  $t_1 < t_2$  и функция  $\mathbf{u}^*(t)$  непрерывна на интервале  $[t_1, t_2]$ . Покажем, что функция  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*]$  постоянна на этом интервале. Так как  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $\mathbf{p}^*(t)$  и  $\mathbf{u}^*(t)$  непрерывны на этом интервале, множества

$$\{\mathbf{x}^*(t) : t \in [t_1, t_2]\}, \{\mathbf{p}^*(t) : t \in [t_1, t_2]\} \text{ и } \{\mathbf{u}^*(t) : t \in [t_1, t_2]\} \quad (5.643)$$

ограничены и, следовательно, имеют соответствующие компактные замыкания  $X_1$ ,  $P_1$  и  $U_1$  (см. § 3.6). Функция  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, \rho_0^*)$  непрерывна на компактном множестве  $X_1 \times P_1 \times U_1$  и имеет, в силу сделанных предположений, непрерывные частные производные по  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{p}$  на этом компактном множестве. Определим действительную функцию  $m$  от  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{p}$ , приняв

$$m(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{u} \in U_1} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, \rho_0^*). \quad (5.644)$$

Так как  $\mathbf{u}^*$  непрерывна на  $[t_1, t_2]$ , то из соотношения (5.638) можно заключить, что

$$m[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t)] = H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*] \quad (5.645)$$

для  $t$  из  $[t_1, t_2]$  и поэтому функция  $m[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t)]$  непрерывна. Покажем, что производная от  $m$  равна нулю, и завершим тем самым доказательство теоремы 5.5П.

Предположим, что  $t$  и  $t'$  — различные точки из  $[t_1, t_2]$ , тогда получим

$$m[\mathbf{x}^*(t'), \mathbf{p}^*(t')] \leq H[\mathbf{x}^*(t'), \mathbf{p}^*(t'), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*], \quad (5.646)$$

и поэтому

$$m[\mathbf{x}^*(t'), \mathbf{p}^*(t')] - m[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t)] \leq H[\mathbf{x}^*(t'), \mathbf{p}^*(t'), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*] - H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*]. \quad (5.647)$$

Если  $t' > t$ , то из неравенства (5.647) можно найти

$$\frac{m[\mathbf{x}^*(t'), \mathbf{p}^*(t')] - m[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t)]}{t' - t} \leq \quad (5.648)$$

$$\leq \frac{H[\mathbf{x}^*(t'), \mathbf{p}^*(t'), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*] - H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \rho_0^*]}{t' - t}. \quad (5.649)$$

Так как производные  $\dot{\mathbf{x}}^*(t)$  и  $\dot{\mathbf{p}}^*(t)$  существуют и  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$  и  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$  непрерывны, то при  $t' \rightarrow t$  справа получается соотношение

$$\frac{d}{ds} m[\mathbf{x}^*(s), \mathbf{p}^*(s)] \Big|_{t+} \leq \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Big|_*, \dot{\mathbf{x}}^*(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \Big|_*, \dot{\mathbf{p}}^*(t) \right\rangle = 0 \quad (5.650)$$

(так как  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$  удовлетворяют каноническим уравнениям). Аналогично при  $t' \rightarrow t$  слева, имеем

$$\frac{d}{ds} m[\mathbf{x}^*(s), \mathbf{p}^*(s)] \Big|_{t-} = 0. \quad (5.651)$$

<sup>1</sup> Общее доказательство, содержащееся в работе [179], требует несколько более сложных рассуждений.

Поскольку  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$  и  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$  непрерывны на  $X_1 \times P_1 \times U_1$  и  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$  существуют, то существует и производная от  $m[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t)]$ , и на основании неравенств (5.650) и (5.651) можно заключить, что

$$\left. \frac{d}{ds} m[\mathbf{x}^*(s), \mathbf{p}^*(s)] \right|_t = 0. \quad (5.652)$$

Таким образом, с помощью соотношений (5.642) и (5.645) найдем

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), p_0^*] = 0 \quad (5.653)$$

для  $t$  из  $[t_0, t^*]$ .

Мы доказали, что  $p_0^* > 0$  [см. соотношение (5.623)] и  $\mathbf{p}^*(t)$  — решение канонической системы, соответствующее  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{u}^*(t)$ , входящим в соотношение (5.632), что  $\mathbf{u}^*(t)$  минимизирует гамильтониан как функцию  $\mathbf{u}$  (утверждение б) теоремы [см. соотношение (5.637)], и, наконец, что гамильтониан  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), p_0^*]$  равен нулю. Таким образом, теорема 5.5П полностью доказана.

**9. Условия трансверсальности.** Теорема 5.6П отличается от 5.5П наличием условий трансверсальности (пункт г теоремы 5.6П). Покажем, как можно видоизменить «доказательство» основной теоремы для обоснования условия трансверсальности.

Вначале отметим, что при доказательстве мы использовали следующие свойства ненулевого вектора  $\begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}$ :

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu} \right\rangle \leq 0 \quad (5.654)$$

и

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\delta} \right\rangle \geq 0 \quad (5.655)$$

для всех  $\boldsymbol{\delta}$  из  $C_t^*$ . Иначе говоря, любой ненулевой вектор, удовлетворяющий этим двум соотношениям, дает дополнительные переменные, соответствующие требованиям теоремы.

Если  $S_1$  — гладкое подпространство размерности  $k$  из  $R_n$  и  $\mathbf{x}^*(t^*)$  — конечная точка оптимальной траектории в  $R_n$ , причем  $\mathbf{x}^*(t^*) \in S_1$ , то мы знаем, что «плоскость»  $M[\mathbf{x}^*(t^*)]$ ,<sup>1</sup> касательная к  $S_1$  в точке  $\mathbf{x}^*(t^*)$ , есть вполне определенная  $k$ -мерная плоскость из  $R_n$ , проходящая через  $\mathbf{x}^*(t^*)$ . Следовательно, множество всех точек  $(J^*, \mathbf{x})$ , где  $J^* = x_0^*(t^*) = J(\mathbf{u}^*)$  и  $\mathbf{x} \in M[\mathbf{x}^*(t^*)]$ , есть  $k$ -мерная плоскость в  $R_{n+1}$ , проходящая через конечную точку  $\mathbf{y}^*(t^*) = (J^*, \mathbf{x}^*(t^*))$  нашей оптимальной траектории в  $R_{n+1}$ , как показано на рис. 5.35. Обозначим эту плоскость через  $N[\mathbf{y}^*(t^*)]$ , тогда

$$N[\mathbf{y}^*(t^*)] = \{ \mathbf{y} : \mathbf{y} = (x_0^*(t^*), \mathbf{x}), \mathbf{x} \in M[\mathbf{x}^*(t^*)] \}. \quad (5.656)$$

Каждый элемент  $N[\mathbf{y}^*(t^*)]$  можно также записать в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^*(t^*) + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad (5.657)$$

<sup>1</sup> Если  $S_1 = \{ \mathbf{x} : g_1(\mathbf{x}) = 0, g_2(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_{n-k}(\mathbf{x}) = 0 \}$ , то  $M[\mathbf{x}^*(t^*)] = \{ \mathbf{x} : \left\langle \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(t^*)], \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t^*) \right\rangle = 0 \text{ для } i = 1, 2, \dots, n-k \}$  (см. § 3.13).

где  $\mathbf{x}$  —  $n$ -мерный вектор, обладающий свойством

$$\left\langle \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^*(t^*)], \hat{\mathbf{x}} \right\rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-k, \quad (5.658)$$

где  $g_1(\mathbf{x}) = 0, g_2(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_{n-k}(\mathbf{x}) = 0$  — уравнения, определяющие  $S_1$ . Если принять, что  $\hat{M} = \hat{M}[\mathbf{x}^*(t^*)] = \{\hat{\mathbf{x}}: \text{существует } \mathbf{y} \text{ из } N[\mathbf{y}^*(t^*)], \text{ для которого } \mathbf{y} - \mathbf{y}^*(t^*) = (0, \hat{\mathbf{x}})\}$ , то из уравнения (5.658) нетрудно заключить, что  $\hat{M}$  есть подпространство из  $R_n$  (см. § 2.5), а множество  $\hat{N} = \{\hat{\mathbf{y}}: \hat{\mathbf{y}} = (0, \hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{x}} \in \hat{M}\}$  — подпространство

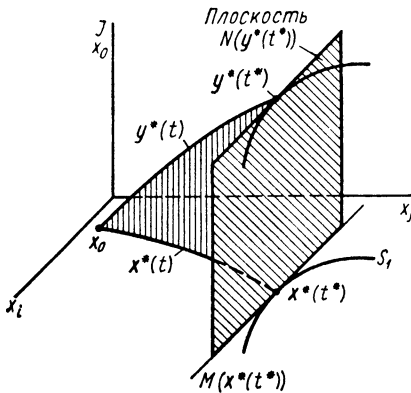


Рис. 5.35. Оптимальная траектория к области цели. В пространстве  $R_n$  имеем множество цели  $S_1$  и оптимальную траекторию  $\mathbf{x}^*(t)$ ;  $\mathbf{y}^*(t)$  — оптимальную траекторию в пространстве  $R_{n+1}$ . Плоскость  $M[\mathbf{x}^*(t^*)]$ , касательная к  $S_1$  в точке  $\mathbf{x}^*(t^*)$ , на нашем трехмерном чертеже изображена в виде прямой линии. Плоскость  $N[\mathbf{y}^*(t^*)]$  есть проекция  $M[\mathbf{x}^*(t^*)]$  на гиперплоскость постоянной стоимости  $x_0 = x_0^*(t^*)$

из  $R_{n+1}$ . Оба пространства  $\hat{M}$  и  $\hat{N}$  имеют размерность  $k$  (см. § 3.13). Отметим также что

$$N[\mathbf{y}^*(t^*)] = \mathbf{y}^*(t^*) + \hat{N}. \quad (5.659)$$

Следовательно, условие трансверсальности  $\gamma$  теоремы 5.6П эквивалентно требованию

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{y}} \right\rangle = 0 \quad (5.660)$$

для всех  $\mathbf{y}$  из  $\hat{N}$  (рис. 5.36).

Так как  $\hat{N}$  — подпространство из  $R_{n+1}$ , то множество  $N[\mathbf{y}^*(t^*)]$  есть, очевидно, выпуклый конус с вершиной  $\mathbf{y}^*(t^*)$ .

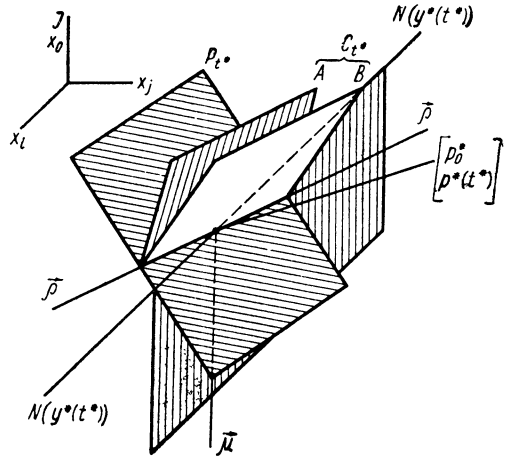


Рис. 5.36. Гиперплоскость  $P_{t^*}$  является опорной для выпуклого конуса  $C_{t^*}$  и для выпуклого конуса  $N[\mathbf{y}^*(t^*)]$  и разделяет их. На этом трехмерном рисунке выпуклый конус  $N[\mathbf{y}^*(t^*)] + \vec{\mu}$  изображается плоскостью, определяемой прямой линией  $N[\mathbf{y}^*(t^*)]$  и лучом  $\vec{\mu}$  (направленным в сторону уменьшения стоимости). Так как луч  $\vec{\rho}$  есть элемент  $C_{t^*}$  и прямая  $N[\mathbf{y}^*(t^*)]$  — элемент  $N[\mathbf{y}^*(t^*)] + \vec{\mu}$ , гиперплоскость  $P_{t^*}$  должна содержать две прямые  $\vec{\rho}$  и  $N[\mathbf{y}^*(t^*)]$ . Таким образом, выпуклый конус  $C_{t^*}$  находится по одну сторону от  $P_{t^*}$ , а выпуклый конус  $N[\mathbf{y}^*(t^*)] + \vec{\mu}$  — по другую. Вектор  $\begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}$  нормален к гиперплоскости  $P_{t^*}$  в точке  $\mathbf{y}^*(t^*)$ . Так как  $N[\mathbf{y}^*(t^*)]$  есть линия постоянной стоимости (см. рис. 5.35), то  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{p}^*(t^*)$  перпендикулярен к плоскости  $N[\mathbf{y}^*(t^*)]$  и, следовательно, перпендикулярен к плоскости  $M[\mathbf{x}^*(t^*)]$ , касательной к  $S_1$  в точке  $\mathbf{x}^*(t^*)$ . Это условие в точности является условием трансверсальности. Таким образом, знание области цели  $S_1$  и состояния  $\mathbf{x}^*(t^*)$  полностью определяет направление вектора  $\mathbf{p}^*(t^*)$

Если снова принять, что  $\mu$  — вектор размерности  $n + 1$ , определенный как

$$\mu = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.661)$$

и обозначить через  $\vec{\mu}$  множество всех векторов  $\beta\mu$ ,  $\beta \geq 0$ , то множество

$$N[\mathbf{y}^*(t^*)] + \vec{\mu} = \{ \mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{y}^*(t^*) + \hat{\mathbf{y}} + \beta\mu, \hat{\mathbf{y}} \in \hat{N}, \beta \geq 0 \} \quad (5.662)$$

является выпуклым конусом с вершиной  $\mathbf{y}^*(t^*)$ . Способом, аналогичным использовавшемуся ранее,<sup>1</sup> можно показать, что выпуклые конусы  $N[\mathbf{y}^*(t^*)] + \vec{\mu}$  и  $C_{t^*}$  разделены. Итак, на основании теоремы 3.5 можно заключить, что для  $C_{t^*}$  существует опорная гиперплоскость  $P_{t^*}$ , разделяющая  $C_{t^*}$  и  $N[\mathbf{y}^*(t^*)] + \vec{\mu}$ . Следовательно, существует ненулевой вектор  $\begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}$  такой, что

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{y}} + \beta\mu \right\rangle \leq 0 \quad (5.663)$$

для всех  $\hat{\mathbf{y}}$  из  $\hat{N}$  и  $\beta \geq 0$ , и

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \delta \right\rangle \geq 0 \quad (5.664)$$

для всех  $\delta$  из  $C_{t^*}$ . Так как  $\hat{N}$  есть подпространство из  $R_{n+1}$ , а  $\mathbf{0}$  является элементом  $\hat{N}$ , то уравнение (5.663) означает, что

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \mu \right\rangle \leq 0. \quad (5.665)$$

Приняв в уравнении (5.663)  $\beta = 0$ , получим

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{y}} \right\rangle \leq 0 \quad (5.666)$$

для всех  $\hat{\mathbf{y}}$  из  $\hat{N}$ . Так как  $\hat{N}$  есть подпространство из  $R_{n+1}$ , то  $\hat{\mathbf{y}} \in \hat{N}$  предполагает, что и  $-\hat{\mathbf{y}} \in \hat{N}$ . Таким образом,

$$\left\langle \begin{bmatrix} p_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{y}} \right\rangle = 0 \quad (5.667)$$

для всех  $\hat{\mathbf{y}}$  из  $\hat{N}$ . Это, согласно уравнению (5.660), и доказывает условия трансверсальности.

Если множество цели  $S_1$  есть все пространство  $R_n$ , то можно считать, что множество  $\hat{N}$  — все полупространство «ниже» гиперплоскости  $y_0 - y_0^*(t^*) = 0$ . Так как конус  $C_{t^*}$  должен располагаться «выше» этой

<sup>1</sup> См. работу [179], леммы 10 и 11.

гиперплоскости, вектор  $\begin{bmatrix} p_0^* \\ p^*(t^*) \end{bmatrix}$  должен быть вида  $\begin{bmatrix} p_0^* \\ 0 \end{bmatrix}$ , где  $p_0^* > 0$ , т. е.  $p^*(t^*)$  должен быть нулевым вектором. Итак, теорема 5.6П полностью доказана.

**Упражнение 5.21.** Целью этого длинного упражнения является «провести» читателя по различным этапам доказательства принципа минимума для частной задачи оптимизации. При этом будут устранены некоторые трудности, связанные с общим доказательством. Для большей наглядности советуем читателю самостоятельно построить трехмерные изображения.

Рассмотрим систему второго порядка вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \end{aligned}$$

которая в начальный момент времени  $t_0 = 0$  находится в состоянии

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0.$$

Предположим, что управление  $u(t)$  ограничено по величине  $|u(t)| \leq 1$  для любого  $t$ . Пусть имеем фиксированное конечное состояние

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

и функционал (равный конечному времени)

$$J(u) = \int_0^{t_1} 1 \cdot dt = t_1, \quad \text{т. е. } L(x, u) = 1.$$

Убедимся, что управление  $u^*(t) = +1$  для всего  $t, 0 \leq t \leq 2$  переводит систему из начального состояния  $(0, 0)$  в конечное состояние  $(2, 2)$  и минимизирует  $J(u)$ . Иначе говоря, управление  $u(t) = +1, 0 \leq t \leq 2$  оптимально по быстрдействию. Очевидно, что  $t^* = 2$ .

Предположим, что  $\dot{x}_0(t) = 1; x_0(0) = 0$ . В этом случае ось «стоимости»  $x_0$  есть ось времени.

а) Рассмотрим пункт 1 доказательства.

Пусть  $y(t)$  — трехмерный вектор:

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

Покажите, что

$$y^*(t) = \begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{bmatrix}; \quad t \in [0, 2] \text{ и}$$

начертите  $y^*(t)$  в трехмерном пространстве.

б) Пользуясь пунктом 2 доказательства, покажите, что допустимое управление

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= -1; & 0 < t \leq 2; \\ \hat{u}(t) &= +1; & 2 < t \leq 6; \\ \hat{u}(t) &= 0; & 6 < t \leq 8; \end{aligned}$$

переводит  $(0, 0, 0)$  в  $(8, 2, 2)$ . Начертите соответствующее  $\hat{y}(t)$  и убедитесь, что оно не оптимально.

в) В соответствии с пунктом 3 доказательства покажите, что матрица  $A_*(t)$  уравнения (5.541) есть

$$A_*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что уравнение (5.542) сводится к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0(t) &= 0; \\ \dot{\psi}_1(t) &= \psi_2(t); \\ \dot{\psi}_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Покажите, что фундаментальная матрица  $\Phi_*(t, t_0)$  для  $t_0 = 0$  равна

$$\Phi_*(t, t_0) = \Phi_*(t, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Докажите также, что

$$\begin{aligned} \psi_0(t) &= \xi_0; \\ \psi_1(t) &= \xi_1 + \xi_2 t; \\ \psi_2(t) &= \xi_2. \end{aligned}$$

Выбрав несколько различных значений  $\xi_0$ ,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  таких, чтобы

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 1,$$

вычислите  $\psi(t)$ . Положите  $t = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ , начертите векторы  $\mathbf{y}^*(t)$  и  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*(t) + \varepsilon \psi(t)$  для  $\varepsilon = 0,01$ . Убедитесь, что  $\mathbf{y}(t)$  принадлежит «трубке» вокруг  $\mathbf{y}^*(t)$  и  $\varepsilon$  «регулюет» толщину трубки.

г) Следуя пункту 4 доказательства, определите, что представляет собой матрица  $-A_*(t)$  [уравнение (5.551)]? Покажите, что уравнения (5.554) и (5.555) записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{p}_0(t) &= 0; \\ \dot{p}_1(t) &= 0; \\ \dot{p}_2(t) &= -p_1(t); \end{aligned}$$

и найдите гамильтониан [см. уравнения (5.556)].

Проверьте уравнения (5.557) и (5.558). Рассмотрите гиперплоскость  $P_0$  [см. уравнение (5.556)], описываемую уравнением

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Полагая

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

покажите, что вектор

$$\begin{bmatrix} p_0(0) \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

нормален к  $P_0$  в точке  $(0, 0, 0)$ . Покажите также, что скалярное произведение векторов

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-t \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 0 \\ 1+t \\ 1 \end{bmatrix}$$

равно скалярному произведению векторов

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Поясните, что это означает? Для этого воспользуйтесь движущимися гиперплоскостями  $P_t$ .

д) В соответствии с пунктом 5 доказательства покажите, что временная вариация управления равна

$$u[\tau](t) = \mp 1, \quad 0 \leq t \leq 2 + \varepsilon\tau.$$

где  $\tau$  может быть как отрицательным, так и положительным. Покажите, что так как  $t^* = 2$ , то

$$\mathbf{y}(2 + \varepsilon\tau) = \begin{bmatrix} 2 + \varepsilon\tau \\ 2 + 2\varepsilon\tau + \frac{1}{2}\varepsilon^2\tau^2 \\ 2 + \varepsilon\tau \end{bmatrix}.$$



Покажите, что соответствующие члены уравнения (5.564) равны

$$\mathbf{y}^*(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \delta(\tau) = \begin{bmatrix} \tau \\ 2\tau \\ \tau \end{bmatrix}; \circ(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon^2\tau^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Проверьте уравнения (5.568) и (5.569). Нарисуйте луч  $\vec{\rho}$  (в трех измерениях), проходящий через точку (2, 2, 2).

е) Следуя пункту 6 доказательства, рассмотрите местные вариации управления:

$$u[\omega, I](t) = \begin{cases} +1, & t \notin I; \\ \omega, & t \in I. \end{cases}$$

Покажите, что должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \omega < +1; \\ 0 &< b < 2. \end{aligned}$$

Пусть  $b = 0,5$ ,  $\varepsilon a = 0,1$ . Вычертите траектории, получающиеся при  $\omega = 0,9$ ;  $\omega = 0,5$ ;  $\omega = 0$ ;  $\omega = -1$ . Повторите это для  $b = 1,0$ ;  $\varepsilon a = 0,1$ . Покажите, что

$$\mathbf{y}(b) = \begin{bmatrix} b \\ \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 a^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \omega a^2 \\ b - \varepsilon a + \varepsilon a \omega \end{bmatrix}.$$

Проверьте уравнение (5.571) и докажите, что член  $\circ(\varepsilon)$  в (5.571) равен

$$\circ(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon^2 a^2 (\omega - 1) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Покажите, что вектор  $\xi_b(\omega)$  в уравнении (5.579) равен

$$\xi_b(\omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega - 1 \end{bmatrix}$$

Рассчитайте векторы  $\circ(\varepsilon)$  в уравнении (5.580) и вектор  $\mathbf{y}(t^*)$  по уравнению (5.582). Покажите, что вектор  $\delta[\omega, I]$  в уравнении (5.583) равен

$$\delta(\omega, I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a\omega - a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ (b-2)(1-\omega) \\ \omega - 1 \end{bmatrix}.$$

Покажите, что типичный луч  $\vec{\rho}[\omega, b]$  определяется множеством векторов:

$$\left\{ \mathbf{y} : \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ (b-2)(1-\omega) \\ \omega - 1 \end{bmatrix}; \beta \geq 0 \right\}$$

[см. уравнение (5.585)]. Так как  $-1 \leq \omega < 1$  и  $0 < b < 2$ , то можно построить множество  $\text{co}(\vec{P})$ . Изобразите его на рисунке. Убедитесь, что конус выпуклый.

ж) В соответствии с пунктом 7 доказательства покажите, что типичный элемент  $C_{t^*}$  [см. уравнение (5.599)] имеет вид

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha\varepsilon \begin{bmatrix} \tau \\ 2\tau \\ \tau \end{bmatrix} + \beta\varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ (b-2)(1-\omega) \\ \omega - 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

Теперь начертите  $C_{t^*}$ . Проверьте, что вектор  $\delta$  из уравнения (5.603) можно построить, используя формулу (5.604). Начертите несколько таких векторов  $\delta$ . Докажите условие (5.606). Выберите вектор  $\delta$  и постройте вариацию вида (5.608). Вычислите члены  $\circ(\varepsilon)$  в уравнении (5.609).

з) Следуя пункту 8 доказательства, постройте луч  $\vec{\mu}$  [уравнение (5.615)]. Покажите графически, что  $\vec{\mu}$  не встречается внутренней части  $C_{t^*}$ . Возьмите

$$\delta = \alpha \begin{bmatrix} \tau \\ 2\tau \\ \tau \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ (b-2)(1-\omega) \\ \omega-1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

Проверьте, что  $p_0^* > 0$ , и подставьте  $p_0^* = 1$ . Покажите, что из уравнений (5.621) и (5.622) следует

$$p_1^*(2) \geq -\frac{1}{2}; \quad p_2^*(2) \leq 0.$$

Докажите, что из уравнений (5.627) и (5.628) получается

$$p_0^*(t) = 1 = \text{const};$$

$$p_1^*(t) = p_1^*(2) = \text{const};$$

$$p_2^*(t) = p_2^*(2) + 2p_1^*(2) - p_1^*(2) \cdot t$$

для  $t \in [0, 2]$ . Покажите, что уравнения (5.635)—(5.637) и (5.642) удовлетворяются.

### 5.17. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПРИНЦИПУ МИНИМУМА

Принцип минимума представляет собой набор необходимых условий оптимальности. Действительно, если внимательно рассмотреть доказательство, то можно убедиться, что эти условия являются необходимыми условиями локальной оптимальности. Иначе говоря, если предположить, что  $\hat{u}$  — управление, переводящее нашу начальную точку в множество  $S$  для всех  $u$ , близких к  $\hat{u}$  в смысле нормы:

$$\|u - \hat{u}\| = \sup_t \|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq \delta, \quad \delta > 0, \quad (5.668)^1$$

то удовлетворяется соотношение

$$J(u) \geq J(\hat{u}). \quad (5.669)$$

Полагая параметр  $\varepsilon$  в нашем доказательстве достаточно малым, можно показать, что существуют неотрицательная постоянная  $\hat{p}_0$  и функция  $\hat{p}(t)$ , при которых различные условия принципа минимума будут удовлетворяться для  $\hat{p}_0$ ,  $\hat{p}(t)$ ,  $\hat{u}(t)$  и траектории  $\hat{x}(t)$ , соответствующей управлению  $\hat{u}(t)$ . Таким образом, принцип минимума по своей природе подобен условию локального минимума обычной функции, производная которой в точке минимума обращается в нуль. Рассмотрим каждое из необходимых условий. Мы начинаем с канонической системы (1), затем рассматриваем минимизацию гамильтониана (2); после этого обсуждаем поведение гамильтониана вдоль оптимальной траектории (3) и, наконец, рассматриваем условия трансверсальности (4). Номера 1, 2, 3 и 4 соответствуют утверждениям принципа минимума и столбцам 1, 2, 3 и 4, имеющим заголовок «необходимые условия» в таблице 5.1. Пронумеруем замечания, чтобы упростить последующие на них ссылки:

**Замечание 1.** Первое уравнение (для  $x$ ) канонической системы есть в точности наша исходная система уравнений, которая не зависит от дополнительной переменной  $p$ . Второе уравнение (для  $p$ ) канонической системы описывает движение гиперплоскости (или, более точно, нормали

<sup>1</sup> Это соотношение есть не что иное, как расстояние между  $u$  и  $\hat{u}$  в функциональном пространстве кусочно-непрерывных функций (см. § 3.15).

к гиперплоскости) вдоль оптимальной траектории. Уравнение имеет много решений, каждое из которых соответствует движению некоторой гиперплоскости (или, точнее, нормали к гиперплоскости) вдоль оптимальной траектории. Мы показали, что вследствие оптимальности существует решение этого уравнения, обладающее некоторыми дополнительными полезными свойствами. Было отмечено (см. определение 5.11), что каноническая система имеет решения вдоль любой траектории системы, а не только для оптимального управления.

**Замечание 2.** Первое свойство дополнительной переменной  $p^*(t)$ ,  $p_0^*$  состоит в том, что оптимальное управление должно минимизировать гамильтониан. Еще раз повторим, что эту минимизацию надо рассматривать следующим образом. В определенный момент времени, например  $\hat{t}$ , на интервале  $[t_0, t^*]$ ,  $x^*(\hat{t})$ ,  $u^*(\hat{t})$  и  $p^*(\hat{t})$  — три вполне определенных вектора и число  $H[x^*(\hat{t}), p^*(\hat{t}), u^*(\hat{t}), p_0^*]$  меньше или равно числу  $H[x^*(\hat{t}), p^*(\hat{t}), \omega, p_0^*]$ , где  $\omega$  — любой элемент из области ограниченной  $\Omega$ . Этим мы показали, что гамильтониан, как функция от  $u$ , имеет абсолютный минимум вдоль оптимальной траектории независимо от характера области ограничений.

**Замечание 3.** Минимизация гамильтониана может быть истолкована геометрически, как утверждение: все направления, в которых можно двигаться от заданной точки оптимальной траектории, лежат по одну сторону от гиперплоскости, определяемой дополнительными переменными.

**Замечание 4.** Мы доказали лишь то, что гамильтониан минимизируется в точках непрерывности  $u^*$ . Необходимое условие 2 должно выполняться для всех точек, за исключением счетного множества точек на интервале  $[t_0, t^*]$ . Как и ранее, в дальнейшем мы не будем это специально оговаривать. Отметим также, что точки, в которых гамильтониан нельзя минимизировать, должны быть точками разрыва  $u^*$ .

**Замечание 5.** Формулировка необходимых условий 1 и 2 не зависит от типа области  $S$  и от того, фиксировано время или нет. Для этого достаточно взглянуть на столбцы  $F$  и  $G$  табл. 5.1.

**Замечание 6.** Необходимое условие 3, описывающее поведение гамильтониана вдоль оптимальной траектории, непосредственно зависит от того, является ли время свободным или нет. Временные вариации управления зависят от того, задано конечное время или нет, и поэтому вывод о равенстве гамильтониана нулю в конечный момент времени следует из того, что конечное время не задано. Геометрически временные вариации соответствуют лучу  $\vec{\rho}$ , как это показано, например, на рис. 5.32. Если конечное время фиксировано, то временных вариаций нет, и конечный конус  $C_{t^*}$  есть просто  $co(\vec{P})$  (см. § 5.16, пункт 6), как показано на рис. 5.32. В этом случае мы имеем дополнительную степень свободы при определении гиперплоскости  $P_{t^*}$ , что компенсируется знанием конечного времени. Таким образом, когда конечное время задано,  $P_{t^*}$  может не содержать луча  $\vec{\rho}$  (см. рис. 5.32), и поэтому мы можем показать, что гамильтониан должен быть постоянен вдоль оптимальной траектории лишь в случае, когда система и функционал явно от времени не зависят.

**Замечание 7.** Как мы увидим в дальнейших главах, определение «достаточного» числа (т. е.  $2n$ ) граничных условий канонических уравнений является решающим при отыскании возможных оптимальных управлений. Так как начальная точка  $x_0$  известна, то в начальный момент вре-

мени мы имеем  $n$  условий. Если фиксирована конечная точка, то в конечный момент времени также имеем  $n$  условий и нам не требуются никакие условия для дополнительных переменных. Если же пытаться попасть в область  $S$ , скажем гладкую область размерности  $k$ , то будем иметь только  $n - k$  условий (уравнения области) для  $\mathbf{x}^*(t)$  в конечный момент времени. Однако условия трансверсальности дают необходимые нам  $k$  дополнительных условий. Иначе говоря, чем свободнее состояние в конечный момент времени, тем более ограничен в этот момент дополнительный вектор. Эти «ограничения» даются условиями трансверсальности, что подтверждается условием, согласно которому гиперплоскость  $P_{t^*}$  должна содержать плоскость  $N[\mathbf{y}^*(t^*)]$  (см. рис. 5.36). Далее, если конечное время фиксировано, то  $P_{t^*}$  содержит плоскость  $N[\mathbf{y}^*(t^*)]$ , но может и не содержать луча  $\vec{\rho}$ . Таким образом, имеется дополнительная степень свободы, которая компенсируется заданием конечного времени.

**Замечание 8.** Иногда приходится сталкиваться с задачами управления, где область цели  $S$  оказывается лишь «куском» гладкой  $k$ -мерной области, как, например, в § 7.2. Если точка  $\mathbf{x}^*(t^*)$ , в которой заканчивается оптимальная траектория, есть точка из  $S$  и в ней можно определить касательную плоскость, то условия трансверсальности еще удовлетворяются. Если же точка  $\mathbf{x}^*(t^*)$  есть точка  $S$ , в которой невозможно определить касательную плоскость, то в этом случае условий трансверсальности не существуют.

**Замечание 9.** В ходе «доказательства» обнаружилось, что если  $\rho_0^* = 0$ , то гиперплоскость  $P_{t^*}$  содержит луч  $\vec{\mu}$ . Следовательно, такая задача явно не зависит от функционала. Если же  $\rho_0^* \neq 0$ , то гиперплоскость  $P_{t^*}$  определяется уравнением

$$\left\langle \begin{bmatrix} \rho_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \mathbf{y} - \mathbf{y}^*(t^*) \right\rangle = 0. \quad (5.670)$$

Но когда  $\rho_0^* \neq 0$ , уравнение (5.670) эквивалентно уравнению вида

$$\frac{1}{\rho_0^*} \left\langle \begin{bmatrix} \rho_0^* \\ \mathbf{p}^*(t^*) \end{bmatrix}, \mathbf{y} - \mathbf{y}^*(t^*) \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\mathbf{p}^*(t^*)}{\rho_0^*} \end{bmatrix}, \mathbf{y} - \mathbf{y}^*(t^*) \right\rangle = 0. \quad (5.671)$$

Оба эти уравнения определяют одну и ту же гиперплоскость  $P_{t^*}$ . Таким образом, если  $\rho_1^* \neq 0$ , можно принять, что  $\rho_0^* = 1$ . Так как задачи, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, не являются исключениями (т. е.  $\rho_0^* \neq 0$ ), то будем всегда полагать  $\rho_0^* = 1$ , не оговаривая этого положения особо.

**Замечание 10.** Предположим, что мы хотим максимизировать, а не минимизировать функционал. К каким изменениям необходимых условий это приведет? Во-первых, непосредственно видно, что вид канонической системы не изменится. Во-вторых, в условии 2 минимизация  $H$  заменится его максимизацией (т. е. в формуле « $\min$ » заменится на « $\max$ »). Неравенства в доказательстве заменятся на противоположные. В частности, это будет означать, что конус достижимости расположится «ниже» оптимальной траектории. Однако луч  $\vec{\rho}$ , соответствующий временной вариации, не изменится, как не изменится и условие 3 (равенство гамильтониана нулю вдоль оптимальной траектории). Так как касательная плоскость к области цели не зависит от того, минимизируется или максимизируется функционал, то условия трансверсальности не изменятся. По сути дела, единственным необходимым условием, отличающим максимизацию от

минимизации, является условие 2; условия 1, 3 и 4 могут, таким образом, рассматриваться как условия «экстремума».

Значение этих замечаний будет становиться ясным при изучении последующих глав книги, где будет показано, как можно использовать принцип минимума для решения разнообразных задач управления. Советуем читателю еще раз просмотреть § 5.10 в свете последних замечаний и нашего «доказательства» принципа минимума.

## ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

### 5.18. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В заключение настоящей главы рассмотрим некоторые достаточные условия оптимальности, которые усиливают необходимые условия, полученные ранее, и основываются на некоторых предположениях относительно поведения функционала. По сути дела, мы покажем, что если функционал удовлетворяет определенному дифференциальному уравнению в частных производных и если необходимое условие 2 удовлетворяется в соответствующей области, то можно доказать оптимальность процесса. В ходе доказательства будем комбинировать принцип оптимальности Беллмана [20] с леммой Каратеодори, способом, предложенным Калманом [112]<sup>1</sup>.

Следующий параграф мы начнем с отыскания уравнения, описывающего поведение функционала вдоль оптимальной траектории, исходя из предположения о достаточной гладкости функционала стоимости. Далее предположим, что это уравнение справедливо в пределах некоторой области, «заполненной» траекториями, соответствующими «управлению»  $\mathbf{u}$ , которое функционально минимизирует гамильтониан нашей задачи. После доказательства необходимой леммы покажем, что «управление»  $\mathbf{u}$  должно быть оптимально.

Прежде чем приступить к развитию этих положений, тщательно сформулируем задачу управления, которую собираемся рассматривать. Будем считать, что наша система имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad t \in (T_1, T_2), \quad (5.672)$$

где область допустимых управлений  $U$  есть множество всех ограниченных кусочно-непрерывных функций  $\mathbf{u}(t)$  на  $(T_1, T_2)$ :

$$\mathbf{u}(t) \in \Omega \text{ для любого } t \text{ из } (T_1, T_2), \quad (5.673)$$

где  $\Omega$  — заданное подмножество из  $R_m$  и

$$\mathbf{u}(t-) = \mathbf{u}(t) \text{ для любого } t \text{ из } (T_1, T_2). \quad (5.674)$$

Примем, что  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  — действительная функция на  $R_n \times R_m \times (T_1, T_2)$  и  $K(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ . Таким образом, функционал  $J$  имеет вид

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt. \quad (5.675)$$

Будем считать, что множество цели  $S \subset R_n \times (T_1, T_2)$  и все предположения § 5.12 остаются в силе. Выше, при определении задачи управления, фиксировались начальное время и начальное состояние. Теперь мы определим семейство задач управления, рассматривая область  $X$  из  $R_n \times (T_1, T_2)$ , содержащую  $S$  и считая, что начальная пара  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  принадлежит к  $X$ . Иначе говоря, мы имеем дело со следующей постановкой задачи:

<sup>1</sup> Дополнительные сведения, связанные с проблемой достаточных условий, можно найти в работах [40], [43], [45], [131], [145], [148] и [164], где эта задача рассматривается с различных точек зрения.

Пусть  $X$  — заданная область из  $R_n \times (T_1, T_2)$ , содержащая  $S$ . Для каждого элемента  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  из  $X$  необходимо найти управление  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)$  из  $U$ , переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S$  и минимизирующее при этом функционал

$$J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt. \quad (5.676)$$

Так как нас прежде всего интересует поведение  $J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$  как функции  $\mathbf{x}_0$  и  $t_0$ , то будем часто опускать индекс 0 и просто писать

$$J(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) = \int_t^{t_1} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau. \quad (5.677)$$

Причины этого станут ясны, когда мы в последующих параграфах получим достаточные условия.

### 5.19. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА

Найдем уравнение, описывающее поведение функционала вдоль оптимальной траектории, в предположении, что этот функционал достаточно гладок.

Для начала предположим, что  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  — данная исходная пара и  $\hat{\mathbf{u}}$  — допустимое управление, переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в область  $S$ . Как обычно, обозначим через  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  траекторию уравнения (5.672), исходящую из  $\mathbf{x}_0$  и произведенную управлением  $\hat{\mathbf{u}}$ . Предположим также, что  $t_1$  — первый момент времени после  $t_0$ , когда  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  встречает  $S$ . Если  $t \in [t_0, t_1)$ , то управление  $\hat{\mathbf{u}}$  переведет в  $S$  точку  $(\hat{\mathbf{x}}(t), t)$  в силу переходного свойства динамических систем (рис. 5.37), и поэтому

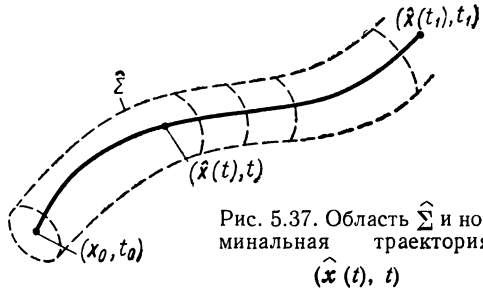


Рис. 5.37. Область  $\hat{\Sigma}$  и номинальная траектория  $(\hat{\mathbf{x}}(t), t)$

$$J[\hat{\mathbf{x}}(t), t, \hat{\mathbf{u}}] = \int_t^{t_1} L[\hat{\mathbf{x}}(\tau), \hat{\mathbf{u}}(\tau), \tau] d\tau \quad (5.678)$$

есть вполне определенное число для  $t$  из  $[t_0, t_1)$ .

Если считать, что  $\hat{J}(\mathbf{x}, t)$  — непрерывно дифференцируемая функция, определенная на области  $\hat{\Sigma} \subset R_n \times (T_1, T_2)$  (см. рис. 5.37), удовлетворяющая условиям:

$$1. \quad (\hat{\mathbf{x}}(t), t) \in \hat{\Sigma} \text{ для } t \text{ из } [t_0, t_1]; \quad (5.679)$$

$$2. \quad \hat{J}[\hat{\mathbf{x}}(t), t] = J[\hat{\mathbf{x}}(t), t, \hat{\mathbf{u}}] \text{ для } t \text{ из } [t_0, t_1], \quad (5.680)$$

то можно получить для  $t$  из  $[t_0, t_1)$  следующую зависимость:

$$\frac{d\hat{J}[\hat{\mathbf{x}}(t), t]}{dt} = \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}(t), t], \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \right\rangle + \frac{\partial \hat{J}}{\partial t}[\hat{\mathbf{x}}(t), t] = \quad (5.681)$$

$$= \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}(t), t], \mathbf{f}[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] \right\rangle + \frac{\partial \hat{J}}{\partial t}[\hat{\mathbf{x}}(t), t]. \quad (5.682)$$

Из выражений (5.678) и (5.682) имеем

$$-L[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] = \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}(t), t], \mathbf{f}[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] \right\rangle + \frac{\partial \hat{J}}{\partial t}[\hat{\mathbf{x}}(t), t] \quad (5.683)$$

или, эквивалентно,

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial t}[\hat{\mathbf{x}}(t), t] + L[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] + \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}(t), t], \mathbf{f}[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] \right\rangle = 0. \quad (5.684)$$

Но гамильтониан задачи имеет вид

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \rangle. \quad (5.685)$$

Поэтому для  $t$  из  $[t_0, t_1]$  имеем

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial t}[\hat{\mathbf{x}}(t), t] + H\left[\hat{\mathbf{x}}(t), \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}(t), t], \hat{\mathbf{u}}(t), t\right] = 0. \quad (5.686)$$

Во-первых, заметим, что такая функция  $\hat{J}(\mathbf{x}, t)$  может и не существовать. Во-вторых, если и можно найти  $\hat{J}(\mathbf{x}, t)$ , то нет гарантии, что функция времени  $\frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}(t), t]$  — градиент  $\hat{J}(\mathbf{x}, t)$ , вычисленный в точке  $(\hat{\mathbf{x}}(t), t)$ ,

есть дополнительный вектор, соответствующий  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  и  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ . Иначе говоря, мы не знаем, действительно ли существует зависимость

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}(t), t] \right\} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \left[ \hat{\mathbf{x}}(t), \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}(t), t], \hat{\mathbf{u}}(t), t \right]. \quad (5.687)$$

Боле того, нам даже неизвестно, справедливо ли равенство  $\hat{J}(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{u}})$  для точек  $(\mathbf{x}, t)$  в  $\hat{\Sigma}$ , не принадлежащих заданной траектории. Таким образом, при установлении достаточных условий нам следует сделать предположения, которые позволят устранить эти затруднения.

До сих пор мы рассматривали управление  $\hat{\mathbf{u}}$ , переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S$ ; обратимся теперь к оптимальному управлению  $\mathbf{u}^*$ . Иначе говоря, предположим, что существует оптимальное управление  $\mathbf{u}^*$ , переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S$ . Как обычно, обозначим через  $\mathbf{x}^*(t)$  соответствующую оптимальную траекторию. Убедимся, что управление  $\mathbf{u}^*$  будет оптимально для любой точки  $\mathbf{x}^*(t)$  на оптимальной траектории (сравните с § 5.16). Мы знаем, что  $\mathbf{u}^*$  переведет  $(\mathbf{x}^*(t), t)$  в  $S$ , и поэтому наше утверждение состоит в следующем:

$$J[\mathbf{x}^*(t), t, \mathbf{u}^*] \leq J[\mathbf{x}^*(t), t, \mathbf{u}] \quad (5.688)$$

для всех допустимых  $\mathbf{u}$ . Если это не так, то тогда существовало бы допустимое управление  $\tilde{\mathbf{u}}$ , переводящее  $(\mathbf{x}^*(t), t)$  в  $S$ , причем

$$J[\mathbf{x}^*(t), t, \tilde{\mathbf{u}}] < J[\mathbf{x}^*(t), t, \mathbf{u}^*]. \quad (5.689)$$

Следовательно, допустимое управление

$$\mathbf{u}^1(\tau) = \begin{cases} \mathbf{u}^*(\tau), & \tau \in [t_0, t]; \\ \tilde{\mathbf{u}}(\tau), & \tau \geq t \end{cases} \quad (5.690)$$

переводило бы  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S$ , причем имело бы место неравенство

$$J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}^1) < J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}^*). \quad (5.691)$$

Так как последнее неравенство противоречит оптимальности  $u^*$ , то утверждение (5.688) доказано. По сути дела, мы получили следующий принцип, который часто называют принципом оптимальности<sup>1</sup>.

**Принцип оптимальности** [20]. Если  $u^*$  — оптимальное управление и  $x^*(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  — оптимальная траектория, соответствующая  $u^*$ , то участок  $u^*$ , ограниченный подынтервалом  $[t, t_1]$  интервала  $[t_0, t_1]$ , есть оптимальное управление для начальной пары  $(x^*(t), t)$ .

**Упражнение 5.22.** Докажите более общую формулировку принципа оптимальности. Если  $u^*$  — оптимальное управление и  $x^*(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  — оптимальная траектория, соответствующая  $u^*$ , то и часть  $u^*$  на любом подынтервале  $[\tau_0, \tau_1]$  из  $[t_0, t_1]$  (т. е.  $t_0 \leq \tau_0 < \tau_1 \leq t_1$ ) является оптимальным управлением для начальной пары  $(x^*(\tau_0), \tau_0)$  и области  $S(x(\tau_1), \tau_1)$ . Эвристически этот вариант принципа оптимальности часто формулируют следующим образом: «Части оптимальной траектории оптимальны». У к а з а н и е: см. § 5.16, пункт 2.

Пусть  $(x, t)$  — элемент области  $X$ , содержащей  $S$  (см. § 5.18). Обозначим минимум (наибольшую нижнюю границу) функционала  $J(x, t, u)$  через  $J^*(x, t)$ :

$$J^*(x, t) = \min_{u \in U} J(x, t, u), \quad (5.692)$$

где  $U$  — множество допустимых управлений.

Предположим также:

$$1) (x^*(t), t) \in X \text{ для } t \in [t_0, t_1]; \quad (5.693)$$

$$2) J^*(x, t) \text{ непрерывно дифференцируема на } X. \quad (5.694)$$

В силу оптимальности  $u^*$  можно заключить, что

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} [x^*(t), t] + H \left[ x^*(t), \frac{\partial J^*}{\partial x} [x^*(t), t], u^*(t), t \right] = 0 \quad (5.695)$$

для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ . Таким образом, при предположениях 1 и 2 уравнение (5.695) является дополнительным необходимым условием оптимальности.

**Упражнение 5.23.** Покажите, что если  $J^*(x, t)$  имеет непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} [x, t] + H \left[ x, \frac{\partial J^*}{\partial x} (x, t), u^*(t), t \right] = 0 \quad (5.696)$$

на всей области  $X$ , то функция  $p(t) = \frac{\partial J^*}{\partial x} [x^*(t), t]$  есть дополнительный вектор, соответствующий  $u^*(t)$  и  $x^*(t)$ . У к а з а н и е: продифференцируйте выражение (5.695) по  $x$ .

## 5.20. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Получим основное достаточное условие оптимальности. Сначала докажем следующую лемму Каратеодори (см. [40] и [112]).

**Лемма 5.3.** Предположим, что для каждой точки  $(x, t)$  из  $X$  функция  $L(x, \omega, t)$  имеет, как функция  $\omega$ , нуль своим единственным абсолютным минимумом по отношению ко всем  $\omega$  из  $\Omega$  при  $\omega = u^0(x, t)$ . Иначе говоря, предположим, что

$$0 = L[x, u^0(x, t), t] < L(x, \omega, t) \quad (5.697)$$

для всех  $\omega$  из  $\Omega$ ,  $\omega \neq u^0(x, t)$ . Пусть  $\hat{u}$  — допустимое управление, причем

а)  $\hat{u}$  переводит  $(x_0, t_0)$  в  $S$ ;

<sup>1</sup> Сравните с результатами § 5.16, пункт 2.



б) если  $\hat{x}(t)$  — траектория, соответствующая  $\hat{u}(t)$ , то

$$(\hat{x}(t), t) \in X \quad (5.698)$$

для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ ;

в)  $\hat{u}$  удовлетворяет соотношению

$$\hat{u}(t) = u^0[\hat{x}(t), t] \quad (5.699)$$

для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ .

Тогда  $\hat{u}$  будет оптимальным управлением по отношению к множеству управлений  $u$ , производящих траектории, которые целиком расположены в  $X$ , и величина  $J[\hat{x}(t), t, \hat{u}]$  равна нулю для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ :

$$J[\hat{x}(t), t, \hat{u}] = 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.700)$$

Другими словами, если  $u^1$  — управление, переводящее  $(x_0, t_0)$  в  $S$  такое, что  $(x^1(t), t) \in X$ , где  $x^1(t)$  — траектория, соответствующая  $u^1$ , то

$$0 = J(x_0, t_0, \hat{u}) \leq J(x_0, t_0, u^1). \quad (5.701)$$

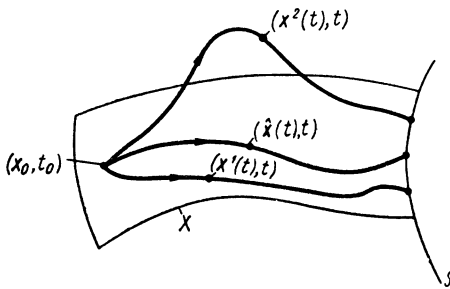
**Доказательство.** В силу свойств (а)—(в) управления  $\hat{u}$  имеем

$$J(x_0, t_0, \hat{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\hat{x}(t), u^0[x(t), t], t] dt, \quad (5.702)$$

и поэтому из соотношения (5.697) следует

$$J(x_0, t_0, \hat{u}) = 0. \quad (5.703)$$

Если  $u^1$  — любое другое допустимое управление, переводящее  $(x_0, t_0)$  в  $S$  такое, что траектория  $x^1(t)$ , произведенная  $u^1$ , целиком лежит в  $X$ ,  $(x^1(t), t) \in X$ , то



$$J(x_0, t_0, u^1) = \int_{t_0}^{t_2} L[x^1(t), u^1(t), t] dt \geq \quad (5.704)^1$$

$$\geq \int_{t_0}^{t_2} L[x^1(t), u^0[x(t), t], t] dt \geq \quad (5.705)$$

$$\geq 0 = J(x_0, t_0, u), \quad (5.706)$$

Рис. 5.38. Траектория  $(x^2(t), t)$  не лежит целиком в  $X$ , но встречает область  $S$  и может оказаться «дешевле» траектории

$$(\hat{x}(t), t)$$

и лемма доказана.

Сделаем следующее замечание.

Управление  $\hat{u}$  согласно лемме может не быть оптимальным, так как управление  $u^2$ , переводящее  $(x_0, t_0)$  в  $S$

вдоль траектории, не лежит целиком в  $X$ , как это показано на рис. 5.38. Функция  $L(x, u, t)$  нашей задачи может не удовлетворять условиям леммы, однако при определенных допущениях относительно гамильтониана можно заменить  $L(x, u, t)$  функцией  $\hat{L}(x, u, t)$ , которая наверняка удовлетворяет условиям леммы и таким образом позволяет получить искомые достаточные условия.

Сформулируем некоторые определения.

<sup>1</sup> Отметим, что момент времени  $t_2$ , когда  $(x^1(t), t)$  встречает  $S$ , не обязательно должен совпадать с  $t_1$ .

**Определение 5.12.** Пусть  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t)$  — гамильтониан нашей задачи:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \rangle. \quad (5.707)$$

Если для каждой точки  $(\mathbf{x}, t)$  из  $X$  функция  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \omega, t)$  имеет, как функция  $\omega$ , единственный абсолютный минимум по отношению ко всем  $\omega$  из  $\Omega$  при  $\omega = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , то говорят, что функция  $H$  нормальна по отношению к  $X$  или задача управления нормальна по отношению к  $X$ . В этом случае функцию  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  будем называть  $H$ -минимальным управлением относительно  $X$ .

Иначе говоря,  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  есть  $H$ -минимальное управление относительно  $X$ , если для каждой пары  $(\mathbf{x}, t)$  из  $X$

$$H[\mathbf{x}, \mathbf{p}, \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), t] < H[\mathbf{x}, \mathbf{p}, \omega, t] \quad (5.708)$$

для всех  $\omega \neq \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  из  $\Omega$ .

**Определение 5.13.** Если  $H$  нормальна по отношению к  $X$  и  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  есть  $H$ -минимальное управление по отношению к  $X$ , то будем называть дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - H\left[\mathbf{x}, \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \hat{\mathbf{u}}\left(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), t\right), t\right] = 0 \quad (5.709)$$

с граничным условием

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ для } (\mathbf{x}, t) \in S \quad (5.710)$$

уравнением Гамильтона—Якоби задачи по отношению к  $X$ .

**Теорема 5.12.** Предположим, что  $H$  нормальна по отношению к  $X$  и что  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  —  $H$ -минимальное управление по отношению к  $X$ . Пусть  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  — допустимое управление, причем:

- а)  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  переводит  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S$ ;
- б) если  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  — траектория, соответствующая  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ , то

$$(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \in X \quad (5.711)$$

для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ ;

в) существует решение уравнения Гамильтона—Якоби (5.709), удовлетворяющее граничному условию (5.710), причём

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \tilde{\mathbf{u}}\left(\hat{\mathbf{x}}(t), \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}[\hat{\mathbf{x}}(t), t], t\right) \quad (5.712)$$

для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ . \*

Тогда  $\hat{\mathbf{u}}$  есть оптимальное управление по отношению к множеству управлений  $\mathbf{u}$ , производящих траектории, целиком расположенные в  $X$ , причём

$$J[\hat{\mathbf{x}}(t), t, \hat{\mathbf{u}}] = \hat{J}[\hat{\mathbf{x}}(t), t], \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.713)$$

Иначе говоря, если  $\mathbf{u}^1$  — управление, переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S$  таким образом, что  $(\mathbf{x}^1(t), t) \in X$  (где  $\mathbf{x}^1(t)$  — траектория, соответствующая  $\mathbf{u}^1$ ), то

$$\hat{J}(\mathbf{x}_0, t_0) = J(\mathbf{x}_0, t_0, \hat{\mathbf{u}}) \leq J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}^1). \quad (5.714)$$

**Доказательство:** Рассмотрим функцию  $\hat{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ , определенную как

$$\hat{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{\partial \hat{J}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + H\left[\mathbf{x}, \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}, t\right]. \quad (5.715)$$

Покажем, что  $\hat{L}$  удовлетворяет условиям леммы 5.3. Для доказательства, во-первых, отметим, что

$$\begin{aligned} \hat{L} \left[ \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), t \right), t \right] &= \\ = \frac{\partial \hat{J}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + H \left[ \mathbf{x}, \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \tilde{\mathbf{u}} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), t \right), t \right] &= \end{aligned} \quad (5.716)$$

$$= 0, \quad (5.717)$$

так как  $\hat{J}$  есть решение уравнения Гамильтона—Якоби. Во-вторых,

$$H \left[ \mathbf{x}, \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \tilde{\mathbf{u}} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), t \right), t \right] < H \left[ \mathbf{x}, \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\omega}, t \right], \quad (5.718)$$

если  $\boldsymbol{\omega} \neq \tilde{\mathbf{u}} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), t \right)$ , так как  $H$  нормально и  $\tilde{\mathbf{u}}$  есть  $H$ -минимальное управление. Следовательно,

$$0 = \hat{L} \left[ \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), t \right), t \right] < \hat{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t), \quad (5.719)$$

если  $\boldsymbol{\omega} \neq \tilde{\mathbf{u}} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), t \right)$ .

Использование леммы позволяет получить

$$\int_{t_0}^{t_1} \hat{L}[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] dt = 0 \quad (5.720)$$

и

$$\int_{t_0}^{t_1} \hat{L}[\mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t), t] dt = 0, \quad (5.721)$$

где  $\mathbf{u}^1$  — другое управление, переводящее  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S$  таким образом, что  $(\mathbf{x}^1(t), t) \in X$ . Однако

$$\hat{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{\partial \hat{J}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + H \left[ \mathbf{x}, \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}, t \right] = \quad (5.722)$$

$$= \frac{\partial \hat{J}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\rangle. \quad (5.723)$$

Следовательно,

$$\hat{L}[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] = L[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] + \frac{d}{dt} \hat{J}[\hat{\mathbf{x}}(t), t] \quad (5.724)$$

и

$$\hat{L}[\mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t), t] = L[\mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t), t] + \frac{d}{dt} \hat{J}[\mathbf{x}^1(t), t] \quad (5.725)$$

[сравните с уравнением (5.715)].

Интегрируя два последних выражения, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \hat{L}[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] dt = \int_{t_0}^{t_1} L[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\hat{J}}{dt}[\hat{\mathbf{x}}(t), t] dt = \quad (5.726)$$

$$= J(\mathbf{x}_0, t_0, \hat{\mathbf{u}}) - \hat{J}(\mathbf{x}_0, t_0) + \hat{J}[\hat{\mathbf{x}}(t_1), t_1] \quad (5.727)$$

и

$$\int_{t_0}^{t_2} \widehat{L}[\mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t), t] dt = \int_{t_0}^{t_2} L[\mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t), t] dt + \int_{t_0}^{t_2} \frac{d\widehat{J}}{dt}[\mathbf{x}^1(t), t] dt = \quad (5.728)$$

$$= J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}^1) - \widehat{J}(\mathbf{x}_0, t_0) + \widehat{J}[\mathbf{x}^1(t_2), t_2]. \quad (5.729)$$

Однако мы знаем, что  $(\widehat{\mathbf{x}}(t_1), t_1) \in S$  и  $(\mathbf{x}^1(t_2), t_2) \in S$ ; следовательно, на основании предположения в) и уравнений (5.727), (5.729), (5.724) и (5.725) получим

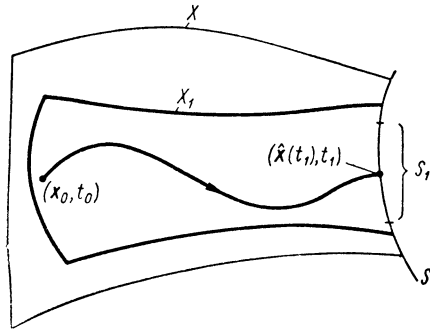
$$J(\mathbf{x}_0, t_0, \widehat{\mathbf{u}}) - \widehat{J}(\mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad (5.730)$$

и

$$J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}^1) - \widehat{J}(\mathbf{x}_0, t_0) \geq 0 \quad (5.731)$$

Таким образом, теорема доказана.

Отметим, что эта теорема представляет собой локальное достаточное условие оптимальности, в котором все утверждения сделаны лишь относительно области  $X$ . Как показано на рис. 5.39, если  $S_1$  есть подмножество  $S$ , содержащее  $(\widehat{\mathbf{x}}(t_1), t_1)$ , и  $X_1$  — подобласть из  $X$  такая, что  $S_1 \subset X_1$  и  $(\widehat{\mathbf{x}}(t), t) \in X_1$  для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ , то управление  $\widehat{\mathbf{u}}$  будет оптимальным для задачи с областью  $S_1$  по отношению к множеству управлений  $\mathbf{u}$ , производящих траектории, целиком лежащие в  $X$ , так как функция  $\widehat{J}(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби на  $X_1$  и



граничному условию  $\widehat{J}(\mathbf{x}, t) = 0$  для  $(\mathbf{x}, t) \in S_1$ . Иначе говоря, ограничения  $\widehat{J}$  не меняют того обстоятель-

Рис. 5.39. Если  $\widehat{J}$  удовлетворяет уравнениям (5.709) и (5.710) для  $X$  и  $S$ , то  $\widehat{J}$  удовлетворяет этим уравнениям и для  $X_1$  и  $S_1$  (обратное может не быть справедливым)

ства, что  $\widehat{J}$  удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби. Если, однако, расширить область  $X$ , скажем, до области  $X_2$ , то нет гарантии, что решение уравнения Гамильтона—Якоби на  $X_2$  существует. Далее, если даже существует решение на  $X_2$ , то это решение может не быть продолжением  $\widehat{J}$ . Если область  $X$  есть  $R_n \times (T_1, T_2)$ , где  $(T_1, T_2)$  — область определения системы, то теорема дает глобальное достаточное условие оптимальности.

**Теорема 5.13.** Предположим, что  $X = R_n \times (T_1, T_2)$ ,  $H$  нормальна относительно  $R_n \times (T_1, T_2)$  и  $\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  есть  $H$ -минимальное управление относительно  $R_n \times (T_1, T_2)$ . Пусть  $\widehat{\mathbf{u}}(t)$  — допустимое управление, причем

а)  $\widehat{\mathbf{u}}$  переводит  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  в  $S$ ;

б) существует решение  $\widehat{J}(\widehat{\mathbf{x}}, t)$  уравнения Гамильтона—Якоби (5.709), удовлетворяющее граничному условию (5.710):

$$\widehat{\mathbf{u}}(t) = \widetilde{\mathbf{u}}\left(\widehat{\mathbf{x}}(t), \frac{\partial \widehat{J}}{\partial \mathbf{x}}[\widehat{\mathbf{x}}(t), t], t\right) \quad (5.732)^1$$

для  $t$  из  $[t_0, t_1]$ .

<sup>1</sup>  $(\widehat{\mathbf{x}}(t), t)$  автоматически является элементом  $R_n \times (T_1, T_2)$ .

\*

Тогда  $\hat{u}$  есть оптимальное управление и

$$J[\hat{x}(t), t, \hat{u}] = \hat{J}[\hat{x}(t), t], \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.733)$$

Мы обсудим эти достаточные условия в следующем параграфе, а в последующих главах книги будут рассмотрены примеры их применения.

### 5.21. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим достаточные условия, полученные в предыдущем параграфе. Прежде всего заметим, что с достаточными условиями связаны два основных положения:

1. Нормальность относительно  $X$ .
2. Использование дифференциального уравнения в частных производных Гамильтона—Якоби для оценки функционала.

Предположение относительно нормальности в действительности усиливает необходимое условие 2 принципа минимума, а уравнение Гамильтона—Якоби представляет собой требование к поведению функционала. Так как нормальность понимается сравнительно легко, сконцентрируем внимание на уравнении Гамильтона—Якоби.

Отметим, что уравнение Гамильтона—Якоби, являющееся уравнением в частных производных, в ряде случаев довольно трудно решить (а иногда это и невозможно). Конкретное решение может представлять собой лишь функционал вдоль данной траектории, а не на всей области  $X$ . По этой причине, как мы увидим в дальнейших главах, уравнение Гамильтона—Якоби чаще всего используется для проверки оптимальности управления, полученного при помощи принципа минимума.

Мы уже отмечали, что теорема 5.12 представляет собой локальное достаточное условие, в котором все утверждения делаются относительно области  $X$ . При доказательстве мы полагали, что область  $X$  была задана априорно. На практике нам обычно задана начальная пара  $(x_0, t_0)$ . Попытаемся подобрать подходящую область  $X$ , в которой можно применить эту теорему. В частности, если  $\tilde{u}(x, p, t)$  есть  $H$ -минимальное управление и нам известны или оптимальный функционал  $J^*(x, t)$  на области, или соответствующее выражение  $p^*(x, t)$  для дополнительного вектора, то мы стараемся найти область  $X$  относительно  $(x_0, t_0)$ , «заполненную» траекториями, произведенными управлениями  $\hat{u}$  такими, что вдоль  $\hat{x}(t)$  имеем

$$\hat{u}(t) = \tilde{u}\left(\hat{x}(t), \frac{\partial J^*}{\partial x}[\hat{x}(t), t], t\right)$$

или

$$\tilde{u}(\hat{x}(t), p^*[\hat{x}(t), t], t). \quad (5.734)$$

Типичный случай показан на рис. 5.40.

Часто  $H$  оказывается нормальным относительно  $R_n \times (T_1, T_2)$ , но глобального решения уравнения Гамильтона—Якоби найти нельзя. В таком положении иногда можно найти разделенные области  $X_1, X_2, \dots$ ,

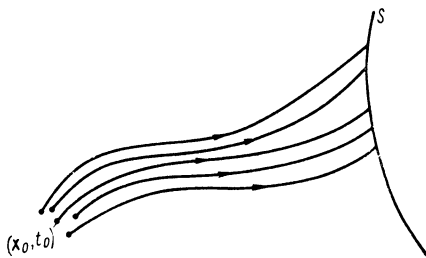


Рис. 5.40. «Заполнение» области «подходящими» траекториями

...,  $X_i$  и решения  $J_1, J_2, \dots, J_n$  уравнения Гамильтона—Якоби такие, что  $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = R_n \times (T_1, T_2)$ , и достаточные условия применимы в каждой области  $X_i$ . Этот процесс «сшивания» подходящих областей  $X_i$  часто приводит к глобальному доказательству оптимальности (см., например, § 7.2). Однако обычно мы должны сначала решить задачу определения области  $X$ . Поэтому эта процедура по сути дела является проверкой оптимальности управления, полученного при помощи принципа минимума.

Проинтерпретируем геометрически полученные нами результаты. Во-первых, если функционал  $J(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$  гладкий, то уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial t} [\mathbf{x}_u(t), t, \mathbf{u}(t)] + H \left[ \mathbf{x}_u(t), \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}_u(t), t, \mathbf{u}(t)], \mathbf{u}(t), t \right] = 0 \quad (5.735)$$

описывает поведение  $J$  вдоль траектории  $\mathbf{x}_u(t)$  данной системы [см. (5.686)]. Таким образом, независимо от того, какое управление  $\mathbf{u}$  приводит к области  $S$ , функционал должен удовлетворять уравнению (5.735).

Представим себе,<sup>1</sup> что  $J^*(\mathbf{x}, t)$  — оптимальная поверхность функционала и  $\mathbf{u}^*$  — оптимальное управление. Тогда наша оптимальная траектория (в  $R_{n+1}$ ) определяет кривую  $j^*(\tau) = J^*[\mathbf{x}^*(\tau), \tau]$ , лежащую на поверхности  $J^*(\mathbf{x}, t)$ . Убедимся, что «направление» (т. е. касательный вектор) этой кривой  $j^*(\tau)$  соответствует направлению наибоыстрейшего убывания, совместному с ограничениями (т. е. дифференциальными уравнениями движения и области  $\Omega$ ). Иначе говоря, в точке  $(\mathbf{x}^*(\tau), \tau)$  можно определить «конус» касательных векторов:

$$\{(\mathbf{x}_u(\tau), 1) : \mathbf{x}_u(\tau) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}, \tau]; \mathbf{u} \in \Omega\},$$

и вектор  $(\dot{\mathbf{x}}_{u^*}^*(\tau), 1)$  представляет собой направление наискорейшего убывания  $J^*[\mathbf{x}(t), t]$ <sup>2</sup>. Это означает, что

$$\left\langle \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{u^*}^*(\tau) \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(\tau), \tau] \\ -\frac{\partial J^*}{\partial t}[\mathbf{x}^*(\tau), \tau] \end{bmatrix} \right\rangle \leq \left\langle \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_u(\tau) \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(\tau), \tau] \\ -\frac{\partial J^*}{\partial t}[\mathbf{x}^*(\tau), \tau] \end{bmatrix} \right\rangle \quad (5.736)$$

для всех  $\mathbf{u} \in \Omega$ , так как  $n + 1$ -мерный вектор

$$\nabla J^*[\mathbf{x}^*(\tau), \tau] = \begin{bmatrix} \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(\tau), \tau] \\ \frac{\partial J^*}{\partial t}[\mathbf{x}^*(\tau), \tau] \end{bmatrix} \quad (5.737)$$

есть градиент  $J^*$  в точке  $(\mathbf{x}^*(\tau), \tau)$  и направлен в сторону наискорейшего возрастания, противоположную направлению наискорейшего убывания. Из выражения (5.736) и определения гамильтониана можно получить необходимое условие:

$$H \left[ \mathbf{x}^*(\tau), \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(\tau), \tau], \mathbf{u}^*(\tau), \tau \right] \leq H \left[ \mathbf{x}^*(\tau), \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}^*(\tau), \tau], \mathbf{u}, \tau \right] \quad (5.738)$$

для всех  $\mathbf{u}$  из  $\Omega$ .

<sup>1</sup> К сожалению, хорошая геометрическая фигура должна быть четырехмерной, так как для изображения пространства состояния нужна по крайней мере плоскость, одна ось — для времени и одна — для функционала.

<sup>2</sup> Как связан этот «конус» с конусом достижимости, введенным в § 5.16?

Таким образом, достаточные условия состоят из следующих требований:

1) в заданной области должно существовать единственное направление наискорейшего убывания, совместимое с ограничениями вдоль оптимальной поверхности  $J^*$ ;

2) кривая на поверхности  $J^*$ , произведенная управлением, относительно которого мы хотим доказать, что оно оптимально, всегда направлена в сторону наискорейшего убывания.

Если эти требования удовлетворяются, то данное управление оптимально. Более детальное изложение этих положений со ссылкой на задачу об оптимальном быстродействии содержится в § 6.7.

---

**СТРУКТУРА И СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ****6.1. ВВЕДЕНИЕ**

В гл. 5 мы рассмотрели задачу оптимального управления для общего случая уравнений системы, ограничений, функционалов и области  $S$ . Полученные результаты — это необходимые условия оптимальности, основанные на весьма сильном принципе минимума.

Содержание предыдущих четырех глав можно трактовать следующим образом: гл. 2 и 3 содержат математический аппарат, необходимый для формулирования, понимания и решения задач детерминированных систем; гл. 4 посвящена понятиям, определениям и свойствам динамических систем; гл. 5 содержит классические и современные вариационные методы, являющиеся основой теории оптимальных процессов. Цель оставшейся части книги — приложить эту теорию к проектированию оптимальных систем и тем самым проиллюстрировать логические и вычислительные приемы, связанные с формулировкой и решением задач оптимального управления. Основное содержание настоящей главы состоит в создании перехода между теорией и конкретными задачами проектирования, которые мы будем рассматривать в гл. 7—10. Поэтому эта глава содержит интуитивные рассуждения, аналитические результаты и геометрические понятия. В ней рассматриваются задачи оптимального управления с конкретными критериями с целью показать, как можно использовать необходимые условия для изучения свойств оптимального управления.

Теоретические результаты гл. 5 можно использовать для получения условий, которые должны иметь место при оптимальном управлении. Однако на практике задача состоит в том, чтобы найти оптимальное управление для данной задачи. При отыскании оптимального управления мы можем использовать необходимые условия, даваемые принципом минимума для того, чтобы выделить допустимые управления, возможно являющиеся оптимальными. Другими словами, мы начинаем с отыскания класса управлений, называемых экстремальными, удовлетворяющих всем необходимым условиям, которые дает принцип минимума.

Предположим теперь, что имеется задача, для которой можно найти экстремальные управления, т. е. управления, удовлетворяющие необходимым условиям. Возникает вопрос: как отыскать оптимальное управление (или оптимальные управления) среди экстремальных? Во-первых, надо доказать, что оптимальное управление существует. Во-вторых, надо установить, является ли оптимальное управление единственным. Но даже, если оптимальное управление оказывается единственным, то из этого еще не следует единственность экстремальных управлений,



так как необходимые условия, даваемые принципом минимума, по своей природе являются локальными. Читатель должен понять теперь всю важность любой информации относительно единственности экстремальных управлений и любой дополнительной информации относительно конкретных свойств экстремальных и оптимальных управлений. Цель данной главы — дать такого рода результаты по отношению к различным критериям оптимальности.

Для более простого и наглядного изложения наиболее важных результатов наши доказательства часто будут нестрогими.

Данная глава распадается на четыре основные части: на задачи с минимумом по времени, с минимумом расхода топлива, с минимумом энергии и на вырожденные задачи.

Задачи на минимум по времени (оптимальные по быстрдействию) рассматриваются в § 6.2—6.10. В задачах на оптимальное быстрдействие требуется перевести систему из начального состояния в область цели  $S$  за минимальное время.

Задача на минимум расхода топлива рассматривается в § 6.11—6.16. Эта задача связана с минимизацией топлива, потребляемого для перевода системы из начального состояния в область  $S$ . При этом могут быть также заданы и ограничения на время переходного процесса.

Задача на минимум энергии рассматривается в § 6.17—6.20. Задачи такого рода возникают, например, в том случае, когда управление космическим летательным аппаратом осуществляется электрическими двигателями. Ограничения по времени и в этом случае могут быть включены в условия задачи.

В § 6.21 и 6.22 бегло рассматриваются так называемые «вырожденные» задачи. Мы определим вырожденные задачи в § 6.3 и 6.13 по отношению к задачам на оптимальное быстрдействие и на минимум расхода топлива и тем самым дадим обоснование для рассмотрения материала, представленного в § 6.21 и 6.22.

## **ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ БЫСТРОДЕЙСТВИИ**

### **6.2. ФОРМУЛИРОВКА И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ**

Класс задач оптимизации, для которого производится минимизация времени перехода из начального состояния в конечную область, относится к задачам, оптимальным по быстрдействию. В этом параграфе точно сформулируем задачу управления, оптимального по быстрдействию (задача 6.1а), которую рассмотрим на конкретном физическом примере. Большую часть этого параграфа посвятим обсуждению задачи с геометрической точки зрения. Покажем, что оптимальная по быстрдействию задача, по сути дела, сводится к отысканию:

1) первого момента времени, в который область достижимых состояний встречает область  $S$ ;

2) управления, которое это осуществляет.

Теорию гл. 5 в этом параграфе мы не будем использовать; это будет сделано лишь в § 6.3.

**Задача 6.1а. Задача перехвата, оптимального по времени.** Дана динамическая система с состоянием  $\mathbf{x}(t)$ , выходом  $\mathbf{y}(t)$  и управлением  $\mathbf{u}(t)$ , определенная уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{B}[\mathbf{x}(t), t] \mathbf{u}(t); \quad (6.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t)]. \quad (6.2)$$

Предположим, что

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &— n\text{-мерный вектор;} \\ \mathbf{y}(t) &— m\text{-мерный вектор;} \\ \mathbf{u}(t) &— r\text{-мерный вектор} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

и что

$$n \geq r \geq m > 0. \quad (6.4)$$

Таким образом,  $\mathbf{f}$  есть  $n$ -мерная вектор-функция,  $\mathbf{B}[\mathbf{x}, t]$  — матрица-функция размера  $n \times r$  и  $\mathbf{h}$  есть  $m$ -мерная вектор-функция. Будем считать, что компоненты вектора управления  $\mathbf{u}(t)$  ограничены по величине неравенствами

$$|u_j(t)| \leq m_j, \quad j = 1 \ 2 \dots r. \quad (6.5)$$

Пусть  $\mathbf{z}(t)$  — вектор с  $m$  компонентами. Условимся называть  $\mathbf{z}(t)$  желаемым выходом. Пусть

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)$$

— вектор ошибки.

Пусть  $t_0$  — начальное время и  $\mathbf{x}(t_0)$  — начальное состояние динамической системы.

Требуется найти управление, которое:

- 1) удовлетворяет ограничениям (6.5);
- 2) управляет системой таким образом, что в конечный момент времени

$$\mathbf{e}(T) \in E, \quad (6.6)$$

где  $E$  — некоторое заданное подмножество из  $R_m$ ;

- 3) минимизирует время перехода  $T - t_0$ .

Объясним неотмеченные особенности этой задачи при помощи следующего примера.

**Пример 6.1.** Предположим, что ракетой  $A$  необходимо управлять таким образом, чтобы уничтожить ракету  $B$ , как показано на рис. 6.1. Предположим, что в начальный момент времени  $t = t_0$  положение ракеты  $B$  есть  $\mathbf{z}(t_0)$  и ее траектория  $\mathbf{z}(t)$  известна для  $t \geq t_0$ ; вектор  $\mathbf{z}(t)$  имеет три компоненты, определяющие положение ракеты  $B$  в пространстве.

Пусть  $\mathbf{y}(t_0)$  — положение ракеты  $A$  при  $t = t_0$ . Ракету  $A$  несет самолет, и при  $t = t_0$  ракета выпускается для перехвата ракеты  $B$ . Уравнения движения ракеты  $A$  имеют вид (6.1) и (6.2), где выход  $\mathbf{y}(t)$  есть вектор, изображающий положение ракеты  $A$ . Состояние ракеты  $\mathbf{x}(t)$  характеризуется ее положением, скоростью, количеством топлива, углом атаки и т. д. Управление  $\mathbf{u}(t)$  обеспечивается системой управления, которая может использоваться для наведения ракеты, например, положением аэродинамических управляющих плоскостей (рулей) и величиной тяги. Ограничения на величину тяги и на положение рулей (из-за механических упоров) имеют вид (6.5). Вектор ошибки  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)$  есть просто разность между положениями ракеты  $A$  и ракеты  $B$ .

Задача состоит в наведении ракеты  $A$  таким образом, чтобы она приблизилась к ракете  $B$  за минимально возможное время. Под словом «приблизилась» понимается, например, достаточно малая величина нормы ошибки  $\mathbf{e}(T)$  в конечный момент времени:

$$e_1^2(T) + e_2^2(T) + e_3^2(T) \leq \delta, \quad (6.7)$$

где  $\delta$  мало.

Это требование аналогично условию (6.6), где  $E$  — множество, определенное как

$$E = \{ \mathbf{e}(T) : e_1^2(T) + e_2^2(T) + e_3^2(T) \leq \delta \}.$$

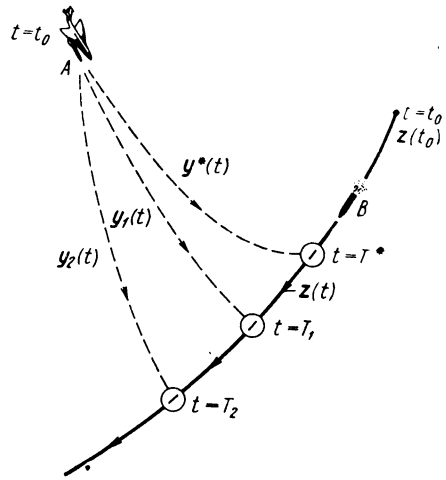


Рис. 6.1. Задача перехвата ракеты  $B$  ракетой  $A$

Обсудим теперь задачу 6.1а примера 6.1. Мы покажем, что требования к вектору ошибки можно преобразовать в требования к фазовым координатам, так как система, описываемая уравнениями (6.1) и (6.2), полностью наблюдаема<sup>1</sup>.

Прежде всего требование  $e(T) \in E$  можно заменить требованием к  $y(T)$ . Из

$$y(t) = e(t) + z(t), \quad e(T) \in E$$

следует

$$y(T) \in Y, \quad (6.8)$$

где  $Y$  — множество, определенное соотношением;

$$Y = \{y(T) : y(T) = e(T) + z(T); \quad e(T) \in E\}. \quad (6.9)$$

Таким образом,  $Y$  зависит от  $E$  и  $z(T)$ , и, следовательно,  $Y$  однозначно определяется  $E$  и  $z(T)$ .

Мы хотим получить соотношение вида  $x(T) \in S$ , где  $S$  — область в пространстве состояний, соответствующая соотношению (6.8). Так как  $y(t) = h[x(t)]$  [уравнение (6.2)], при  $t = T$  имеем

$$y(T) = h[x(T)]. \quad (6.10)$$

Уравнение (6.10) единственным образом определяет  $y(T)$  через  $x(T)$ . Для того чтобы единственным образом определить область  $S$  через множество  $Y$ , необходимо иметь взаимно-однозначное соответствие между состоянием  $x(t)$  и выходом  $y(t)$ . Утверждение  $y(t) = h[x_1(t)] = h[x_2(t)]$  для всех  $t$  должно означать, что  $x_1(t) = x_2(t)$  для всех  $t$ . Если динамическая система, описываемая уравнениями (6.1) и (6.2), полностью наблюдаема, то каждому  $y(T)$  соответствует единственное состояние<sup>2</sup>  $x(T)$ . Следовательно, область  $S$  в пространстве состояний можно определить соотношением

$$S = \{x(T) : y(T) = h[x(T)]; \quad y(T) \in Y\}. \quad (6.11)$$

Следующая лемма суммирует эти результаты.

**Лемма 6.1.** Рассмотрим задачу 6.1а. Заданы  $z(t)$ ,  $T$  и область  $E$ . Если система, описываемая уравнениями (6.1) и (6.2), полностью наблюдаема, то условие  $e(T) \in E$  эквивалентно условию

$$x(T) \in S, \quad (6.12)$$

где  $S$  — вполне определенная область в пространстве состояний, определенная как

$$S = \{x(T) : h[x(T)] = e(T) + z(T); \quad e(T) \in E\}. \quad (6.13)$$

Проиллюстрируем эти понятия следующим примером.

**Пример 6.2** Предположим, что  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — компоненты вектора состояния и  $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$  — выход полностью наблюдаемой динамической системы. Пусть  $z(t) = e^{-t}$  — желаемый выход;  $e(t) = y(t) - z(t)$  и  $E = \{e(T) : |e(T)| \leq 1\}$ . Область  $S$  тогда определяется как

$$S = \{(x_1(T), x_2(T)) : |x_1(T) + x_2(T) - e^{-T}| \leq 1\}. \quad (6.14)$$

Область  $S$  есть функция времени  $T$ . Область  $S$  показана на рис. 6.2, а для  $T = 0,290$  и на рис. 6.2, б для  $T = 0,695$ .

Оставшаяся часть параграфа посвящена геометрической интерпретации задачи нахождения управления, оптимального по времени, в виде движущихся со временем областей в пространстве состояний. Для того

<sup>1</sup> См. § 4.15.

<sup>2</sup> См. теорему 4.6. Действительно, если  $h^{-1}(Y)$  есть обратный образ  $Y$ , то справедливо:  $x \in h^{-1}(Y)$  и  $y \in Y$ .

чтобы зафиксировать эти положения и терминологию, дадим следующие определения:

**Определение 6.1.** Область ограничений определяется как

$$\Omega = \{ \mathbf{u}(t) : |u_j(t)| \leq m_j, j = 1, 2, \dots, r \}. \quad (6.15)$$

$\Omega$  есть подмножество (параллелепипед) в  $r$ -мерном пространстве переменных управления. Записывая  $\mathbf{u}(t) \in \Omega$ , мы подразумеваем, что в момент времени  $t$  компоненты вектора управления  $\mathbf{u}(t)$  удовлетворяют неравенству  $|u_j(t)| \leq m_j$ .

Пусть  $[t_0, T]$  — замкнутый интервал времени. Рассмотрим множество управляющих функций  $\mathbf{u}_{[t_0, T]}$  (см. § 4.4) таких, для которых в любой момент времени  $t$  из  $[t_0, T]$  справедливо соотношение  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{[t_0, T]} \in \Omega$ .

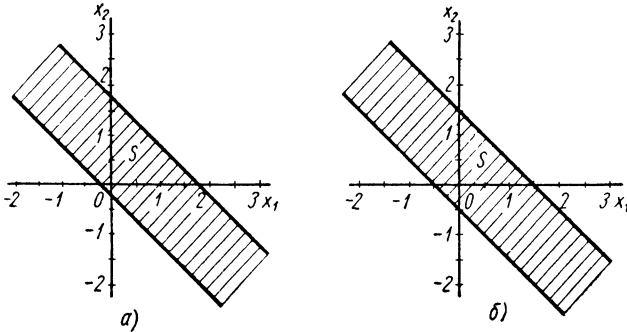


Рис. 6.2. а) Область цели  $S$ , определяемая уравнением (6.14) при  $T = 0,290$ . б) Область цели  $S$  при  $T = 0,695$

**Определение 6.2.** Область допустимых управляющих функций  $U_T$  определяется как

$$U_T = \{ \mathbf{u}_{[t_0, T]} : \mathbf{u}_{[t_0, T]}(t) \in \Omega \text{ для любого } t \in [t_0, T] \}. \quad (6.16)$$

Множество  $U_T$  есть подмножество функционального пространства  $\mathfrak{F}([t_0, T], R_r)$  где  $\mathfrak{F}([t_0, T], R_r)$  есть множество всех кусочно-непрерывных функций из  $[t_0, T]$  в  $R_r$  (см. § 3.15). Таким образом, записывая  $\mathbf{u}_{[t_0, T]} \in U_T$ , подразумевают, что  $\mathbf{u}_{[t_0, T]}$  есть управляющая функция, которая в каждый момент времени удовлетворяет наложенным ограничениям [в частном случае — вида (6.4)].

Предположим теперь, что мы проводим следующий эксперимент. Имеем систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t); t] + \mathbf{B}[\mathbf{x}(t), t] \mathbf{u}(t), \quad (6.17)$$

которая в начальный момент времени  $t_0$  находится в состоянии  $\mathbf{x}(t_0)$ . Приложим к системе управление  $\mathbf{u}_{[t_0, T]} \in U_T$  и рассмотрим поведение вектора состояния  $\mathbf{x}(t)$  для  $t$  из  $[t_0, T]$ . Вся траектория состояния  $\mathbf{x}_{[t_0, T]}$  будет зависеть от начального времени  $t_0$ , начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  и прикладываемого управления  $\mathbf{u}_{[t_0, T]}$ .

Запишем:

$$\mathbf{x}_{[t_0, T]} = \mathbf{x}_{[t_0, T]}(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{u}_{[t_0, T]}). \quad (6.18)$$

Тогда вектор состояния  $\mathbf{x}(t)$  для некоторого  $t \in [t_0, T]$  будет равен

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{[t_0, T]}(t) = \Phi[\mathbf{x}(t_0), t_0, t, \mathbf{u}_{[t_0, T]}]. \quad (6.19)$$

Если мы испробуем каждый элемент из  $U_T$ , то получим множество фазовых траекторий  $\mathbf{x}_{[t_0, T]}$ . Это приводит к следующему определению.

**Определение 6.3**<sup>1</sup>. Под множеством достижимых состояний (в момент времени  $t$ ) будем понимать подмножество  $A_t$  пространства состояний, определенное как

$$A_t = A [t; t_0; \mathbf{x}(t_0); U_t] = \{ \mathbf{x} : \text{существует } \mathbf{u}_{[t_0, T]} \in U_T \text{ такое, что соответствующее решение } \mathbf{x}(t) \text{ системы (6.19), исходящее из } \mathbf{x}(t_0), \text{ есть } \mathbf{x}(t) = \mathbf{x} \} \quad (6.20)^2$$

Границу  $A_t$  обозначим через  $\partial A_t$ .

Предположим теперь, что область достижимых состояний  $A_t$  обладает свойствами:

1.  $A_t$  замкнута и ограничена для любых

$$t \geq t_0 \quad (6.21)$$

т. е.  $A_t$  компактна);

2. Если  $t_1$  и  $t_2$  — произвольные моменты времени и

$$t_0 \leq t_1 \leq t_2, \quad (6.22)$$

то имеет место соотношение включения

$$\{ \mathbf{x}(t_0) \} \subset A_{t_1} \subset A_{t_2}. \quad (6.23)$$

Уравнения (6.22) и (6.23) означают, что множество достижимых состояний «растет» с увеличением времени (рис. 6.3). Множества  $A_{T_1}, A_{T_2}, \dots$ , где  $t_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq T_4 \leq T_5$ , обозначим своими границами<sup>3</sup>.

Мы объяснили ранее, что требования к ошибке системы эквивалентны требованию достижения фазовой траекторией области  $S$ . Область  $S$  есть подмножество пространства состояний и может зависеть от времени.

Рис. 6.3. Области достижимых состояний при возрастании  $t$  в случае движущейся области цели  $S_t$ . Точка  $\mathbf{x}^*(T_4)$  является первой общей точкой  $A_t$  и  $S_t$

Чтобы подчеркнуть ее зависимость от времени, будем писать  $S_t$ . Пусть  $\partial S_t$  обозначает границу  $S_t$ . Предположим, что область  $S_t$  замкнута. На рис. 6.3 показано движение области цели  $S_t$  с увеличением времени; пунктирные кривые обозначают границы  $\partial S_{T_1}, \partial S_{T_2}, \partial S_{T_3}, \dots$  областей цели  $S_{T_1}, S_{T_2}, S_{T_3}, \dots$ , где  $t_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq T_4 \leq T_5$ .

При внимательном рассмотрении рис. 6.3 становится понятной сущность управления, оптимального по быстрдействию. При этом выявляется следующее:

1. Области  $A_t$  и  $S_t$  не имеют общих элементов для  $t < T_4$  или точнее

$$A_t \cap S_t = \emptyset \text{ для } t \in [t_0, T_4), \quad (6.24)$$

где  $\emptyset$  — пустое множество и  $t \in [t_0, T_4)$  означает, что  $t_0 \leq t < T_4$ .

2. При  $t = T_4$  области  $A_{T_4}$  и  $S_{T_4}$  имеют единственную общую точку (обозначенную  $\mathbf{x}^*(T_4)$  на рис. 6.3).

<sup>1</sup> См. также § 4.20.

<sup>2</sup> Это определение справедливо также для любой системы вида  $\dot{\mathbf{x}} = f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$  и любой области допустимых управлений  $U_T$ .

<sup>3</sup> Для того, чтобы вычислить границу  $\partial A_T$  множества  $A_T$ , мы должны приложить к системе (6.17) все элементы  $U_T$ .

3. Для  $t > T_4$  множество  $A_t \cap S_t$  содержит более одного элемента пространства состояний.

Так как область  $A_{T_4}$  есть множество достижимых состояний при  $T_4$ , производимых элементами  $U_{T_4}$ , то существует допустимое управление

$$u^*_{[t_0, T_4]} \in U_{T_4}, \quad (6.25)$$

производящее единственную траекторию

$$x^*_{[t_0, T_4]} \quad (6.26)$$

такую, что

$$\left. \begin{aligned} x^*_{[t_0, T_4]}(t_0) &= x(t_0); \\ x^*_{[t_0, T_4]}(T_4) &= x^*(T_4). \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

Единственность траектории следует из единственности решения системы дифференциальных уравнений. Далее, из рис. 6.3 нетрудно видеть, что состояние  $x^*(T_4)$  принадлежит как границе  $A_{T_4}$ , так и границе  $S_{T_4}$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} x^*(T_4) &\in \partial A_{T_4}; \\ x^*(T_4) &\in \partial S_{T_4}; \\ x^*(T_4) &= \partial A_{T_4} \cap \partial S_{T_4}, \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

откуда следует:

траектория  $x^*_{[t_0, T_4]}$  оптимальна по быстродействию для начального состояния  $x(t_0)$  и области цели  $S_t$ ;

управление  $u^*_{[t_0, T_4]}$ , производящее  $x^*_{[t_0, T_4]}$ , оптимально по быстродействию;

время перехода  $T_4 - t_0$  есть минимально возможное время перехода.

Такие геометрические интерпретации являются удобным инструментом, помогающим понять природу задачи управления, оптимального по быстродействию. Сведем эти важные результаты в следующую теорему.

**Теорема 6.1.** Пусть  $U_t$  — множество допустимых управляющих функций  $u_{[t_0, t]}$ ;  $A_t$  обозначает множество достижимых состояний в момент времени  $t$  и  $S_t$  — движущаяся область. Предположим, что области  $A_t$  и  $S_t$  замкнуты и ограничены для любого  $t \geq t_0$ ;

если  $T_1$  и  $T_2$  — два произвольных момента времени таких, что  $t_0 \leq T_1 \leq T_2$ , то  $\{x(t_0)\} \subset A_{T_1} \subset A_{T_2}$ . Пусть  $Q_t$  обозначает подмножество пространства состояний, определенное как

$$Q_t = A_t \cap S_t, \quad (6.29)$$

тогда:

1. Если

$$Q_t = \emptyset \text{ для всех } t \geq t_0, \quad (6.30)$$

то управления, оптимального по быстродействию, не существует. Поэтому данная задача не имеет решения.

2. Если существует момент времени  $T^*$  такой, что

$$\left. \begin{aligned} Q_t &= \emptyset \text{ для всех } t \in [t_0, T^*]; \\ Q_{T^*} &\neq \emptyset, \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

то задача управления имеет решение и  $T^*$  есть минимальное время.

В предыдущей теореме мы предполагали, что области  $A_t$  и  $S_t$  замкнуты для всех  $t \geq t_0$ . Покажем, что если одна из областей  $A_t$  или  $S_t$  не является замкнутой, то решения задачи об оптимальном быстродействии может не существовать. Предположим, область  $A_t$  открыта; тогда возможен случай, когда состояние  $x^*(T_4)$  не принадлежит  $A_{T_4}$ . Таким образом, хотя соотношение

$$\partial A_{T_4} \cap \partial S_{T_4} = x^*(T_4) \quad (6.32)$$

имеет место, но

$$A_{T_4} \cap S_{T_4} = \emptyset. \quad (6.33)$$

Пусть  $\varepsilon$  — бесконечно малое положительное число. Рассмотрим множество  $Q_{T_4+\varepsilon}$ , определяемое соотношением

$$Q_{T_4+\varepsilon} = A_{T_4+\varepsilon} \cap S_{T_4+\varepsilon}. \quad (6.34)$$

Как показано на рис. 6.3, множество  $Q_{T_4+\varepsilon}$  не является пустым. Это означает, что можно найти управления, переводящие состояние  $x(t_0)$  в область  $S_{T_4}$ , на что требуется время  $T_4 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — сколь угодно мало (но не равно нулю). Можно найти управления, для которых время  $T_4 + \varepsilon$  сколь угодно близко к  $T_4$ , но никогда не равно ему в точности ввиду уравнения (6.33). Таким образом, хотя оптимального управления и не существует, тем не менее можно найти так называемые  $\varepsilon$ -оптимальные решения, вполне удовлетворительные с инженерной точки зрения. Однако в случае  $\varepsilon$ -оптимальных управлений нельзя использовать теорию гл. 5 потому, что все необходимые условия были получены для оптимальных, а не  $\varepsilon$ -оптимальных управлений.

Читатель должен представлять себе трудности, возникающие при попытке решить задачу управления, оптимального по быстродействию «в лоб», путем расчета областей достижимых состояний и попыток геометрически отыскать первую точку контакта  $A_i$  и  $S_i$ . Эта задача почти неразрешима, если размерность пространства состояний больше трех. В следующем параграфе мы покажем, как использование принципа минимума сводит задачу, оптимальную по быстродействию, к решению системы дифференциальных уравнений с граничными условиями. В общем случае такое решение найти очень трудно, но это проще, чем вычисление областей  $A_i$ .

**Упражнение 6.1.** Дана система  $\dot{x}(t) = u(t)$  с начальным состоянием  $x(0)$ . Пусть  $|u(t)| \leq 1$  для всех  $t$  и  $z(t) = t^2$ . Требуется найти управление  $u(t)$  такое, чтобы  $x(T) = z(T)$  и  $T$  было минимальным.

Найдите множество начальных состояний  $\{x(0)\}$ , для которого решения не существует, и определите оптимальное по быстродействию управление для начального состояния  $x(0) = 2$ .

### 6.3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МИНИМУМА

В предыдущем параграфе мы показали, что требования к ошибке (или выходу) наблюдаемой динамической системы могут быть выражены в форме области  $S_i$ , движущейся в пространстве состояний. Была также выяснена геометрическая природа задачи об оптимальном быстродействии и отмечены трудности, возникающие при ее решении прямым методом.

В этом параграфе мы используем принцип минимума Понтрягина для того, чтобы развить систематический подход к решению задач об оптимальном быстродействии. Ниже в первый раз на протяжении книги будет подробно показано использование принципа минимума и его результаты. При необходимости будем повторять некоторые результаты, чтобы читатель оценил значение необходимых условий для решения оптимальных задач.

Переформулируем задачу 6.1а таким образом, чтобы можно было использовать теорему 5.9 (принцип минимума для задач, зависящих от времени, с подвижной областью  $S_i$ ). Затем представим результаты в виде трех последовательных шагов. При первом шаге мы сформулируем необходимые условия так, как они используются в постановке задачи 6.1б. При втором шаге получим соотношение между оптимальным управлением, оптимальной траекторией и соответствующим дополнительным вектором. Мы также определим понятия нормальной и вырожденной задач об оптимальном быстродействии. При третьем шаге рассмотрим порядок, которому

надо следовать для определения управления (управлений), оптимального по быстрдействию.

Сформулируем точную постановку задачи об оптимальном быстродействии.

**Задача 6.16. Управление, оптимальное по быстродействию, для подвижной области  $S_r$ .** Дана система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i(t) = f_i[\mathbf{x}(t), t] + \sum_{j=1}^r b_{ij}[\mathbf{x}(t), t] u_j(t); \\ i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

или, эквивалентно, в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{B}[\mathbf{x}(t), t] \mathbf{u}(t).$$

Предположим <sup>1</sup>:

- 1)  $f_i[\mathbf{x}(t), t]$  и  $b_{ij}[\mathbf{x}(t), t]$  непрерывны относительно  $\mathbf{x}(t)$  и  $t$ ;
- 2)  $\frac{\partial f_i[\mathbf{x}(t), t]}{\partial x_k(t)}$ ,  $\frac{\partial b_{ij}[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial b_{ij}[\mathbf{x}(t), t]}{\partial x_k(t)}$  непрерывны по  $\mathbf{x}(t)$  и  $t$  для  $i, k = 1, 2, \dots, n$  и  $j = 1, 2, \dots, r$ .

Предположим далее, что компоненты  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  ограничены по величине соотношением

$$|u_j(t)| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, r \text{ для любого } t$$

или, более компактно,

$$\mathbf{u}(t) \in \Omega.$$

Заданная гладкая область  $S$  определена соотношениями <sup>2</sup>

$$g_\alpha[\mathbf{x}, t] = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - \beta; \quad \beta \geq 1$$

или, эквивалентно,

$$\mathbf{g}[\mathbf{x}, t] = \mathbf{0}$$

есть  $n - \beta$ -мерный вектор с компонентами  $g_\alpha$ .

Будем считать, что

- 1)  $g_\alpha[\mathbf{x}, t]$ ,  $\frac{\partial g_\alpha[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}}$ ,  $\frac{\partial g_\alpha[\mathbf{x}, t]}{\partial t}$  непрерывны по  $\mathbf{x}$  и  $t$ ;
- 2) векторы (градиенты)  $\frac{\partial g_\alpha[\mathbf{x}, t]}{\partial \mathbf{x}}$  линейно независимы для всех  $(\mathbf{x}, t) \in S$ .

Пусть  $t_0$  — заданный начальный момент времени и  $\mathbf{x}(t_0)$  — заданное начальное состояние системы (6.35).

Функционал определен в виде

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^T dt = T - t_0, \quad (6.38)$$

где  $T$  — свободно.

Найти такое управление  $\mathbf{u}(t)$ , чтобы оно:

- I. Удовлетворяло ограничениям (6.36).
- II. Переводило  $\mathbf{x}(t_0)$  системы (6.31) в область  $S$ .
- III. Минимизировало функционал  $J(\mathbf{u})$  [см. (6.38)].

Сделаем несколько замечаний по этой задаче:

1. Предположения относительно непрерывности приняты такими же, как и в § 5.12 для общей задачи управления.

2. Ограничения (6.36) отличаются от ограничений (6.5). Так как коэффициенты  $n \times r$  матрицы  $\mathbf{B}[\mathbf{x}(t), t]$ ,  $b_{ij}[\mathbf{x}(t), t]$  не были специально

<sup>1</sup> См. § 5.12.

<sup>2</sup> Область типа 2,  $z$  из § 5.12.



оговорены, то в них можно включить постоянные  $m_j$  из соотношения (6.5), не утрачивая при этом общности. Например, система уравнений

$$\dot{x}_i(t) = f_i[\mathbf{x}(t), t] + \sum_{j=1}^r b'_{ij}[\mathbf{x}(t), t] u'_j(t), \quad (6.39)$$

где

$$|u'_j(t)| \leq m_j \quad (6.40)$$

позволяет найти новые управляющие переменные  $u_j(t)$ , удовлетворяющие ограничениям

$$|u_j(t)| \leq 1, \quad (6.41)$$

и новые коэффициенты  $b_{ij}[\mathbf{x}(t), t]$ , если положить, что

$$\left. \begin{aligned} u_j(t) &= \frac{u'_j(t)}{m_j}; \\ b_{ij}(t) &= b'_{ij}[\mathbf{x}(t), t] m_j, \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

и получить систему (6.35). Область ограничений, определяемая уравнением (6.36), есть единичный гиперкуб в  $r$ -мерном пространстве.

3. В общем случае функционал, который надо минимизировать, имеет вид

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^T L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt. \quad (6.43)$$

Для задач на оптимальное быстроедействие мы полагаем

$$L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] = 1, \quad (6.44)$$

чтобы получить  $J(\mathbf{u})$  вида (6.34). Так как  $t_0$  известно и надо минимизировать величину  $T - t_0$ , то  $T$  должно быть свободно. Отметим, что функция  $L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] = 1$  удовлетворяет всем требованиям непрерывности и дифференцируемости § 5.12.

Гамильтониан для системы (6.35) и функционала (6.38)  $H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t]$  в матричной форме имеет вид

$$\begin{aligned} H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t] &= 1 + \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{B}[\mathbf{x}(t), t] \mathbf{u}(t) \rangle = \\ &= 1 + \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] \rangle + \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{B}[\mathbf{x}(t), t] \mathbf{u}(t) \rangle = \\ &= 1 + \langle \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t], \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{B}'[\mathbf{x}(t), t] \mathbf{p}(t) \rangle, \end{aligned} \quad (6.45)$$

где  $\mathbf{p}(t)$  — дополнительный вектор. В записи через компоненты векторов гамильтониан можно представить в виде

$$\begin{aligned} H &= H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t] = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n f_i[\mathbf{x}(t), t] p_i(t) + \sum_{j=1}^r u_j(t) \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}(t), t] p_i(t) \right\}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Предположим, что  $\mathbf{u}^*(t)$  — управление, оптимальное по быстрдействию<sup>1</sup>,  $\mathbf{x}^*(t)$  — оптимальная траектория и  $T^*$  — минимальное время. По определению оптимальные величины должны удовлетворять условиям

$$|u_j^*(t)| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, r; \quad (6.47)$$

$$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}(t_0); \quad (6.48)$$

$$\mathbf{x}^*(T^*) \in S. \quad (6.49)$$

<sup>1</sup> Далее мы часто будем использовать слово «оптимальный» вместо «оптимальный по быстрдействию».

Уравнение (6.49) в силу соотношений (6.37) означает, что

$$\mathbf{g}[\mathbf{x}^*(T^*), T^*] = 0. \quad (6.50)$$

Рассмотрим теперь задачу об оптимальном быстродействии последовательно по шагам.

Содержание шага 1 состоит в изменении формулировки положений теоремы 5.9 применительно к задаче 6.16.

**Шаг 1.** Утверждение 1 теоремы 5.9 предполагает, что существует (оптимальный) дополнительный вектор  $\mathbf{p}^*(t)$ , соответствующий оптимальному управлению  $\mathbf{u}^*(t)$  и оптимальной траектории  $\mathbf{x}^*(t)$ . Существование  $\mathbf{p}^*(t)$  есть необходимое условие. Нужно также, чтобы компоненты  $x_k^*(t)$  и  $p_k^*(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  удовлетворяли каноническим уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k^*(t) &= \frac{\partial H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]}{\partial p_k^*(t)}; \\ \dot{p}_k^*(t) &= - \frac{\partial H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]}{\partial x_k^*(t)} \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

для  $k = 1, 2, \dots, n$ . Однако из выражения (6.46) имеем

$$\begin{aligned} H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] &= \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n f_i[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) + \sum_{j=1}^r u_j^*(t) \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\}, \end{aligned} \quad (6.52)$$

и поэтому канонические уравнения имеют вид

$$\dot{x}_k^*(t) = f_k[\mathbf{x}^*(t), t] + \sum_{j=1}^r b_{kj}[\mathbf{x}^*(t), t] p_j^*(t) \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_k^*(t) &= \\ &= - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f_i[\mathbf{x}^*(t), t]}{\partial x_k^*(t)} \right\} p_i^*(t) - \sum_{j=1}^r u_j^*(t) \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial b_{ij}[\mathbf{x}^*(t), t]}{\partial x_k^*(t)} \right\} p_i^*(t), \end{aligned} \quad (6.54)$$

$k = 1, 2, \dots, n$

Необходимо также [см. выражение (5.433)], чтобы

$$x_k^*(t_0) = x_k(t_0). \quad (6.55)$$

**Замечание 6.1.** Дифференциальное уравнение, полученное для  $\mathbf{p}^*(t)$ , линейно относительно  $\mathbf{p}^*(t)$ . Следовательно, если  $\mathbf{p}^*(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (6.54), то ему удовлетворяет и вектор  $C\mathbf{p}^*(t)$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

Утверждение 2 теоремы 5.9 состоит в следующем:

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] = \min_{\mathbf{u}(t) \in \Omega} H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (6.56)$$

для  $t \in [t_0, T^*]$  или, эквивалентно,

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \leq H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (6.57)$$

для всех  $\mathbf{u}(t) \in \Omega$  и  $t \in [t_0, T^*]$ . Из выражения (6.52) получим, что условие (6.57) сводится к неравенству

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^n f_i[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) + \sum_{j=1}^r u_j^*(t) \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\} &\leq \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^n f_i[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) + \sum_{j=1}^r u_j(t) \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Так как первые члены с обеих сторон неравенства одинаковы, имеем

$$\sum_{j=1}^r u_j^*(t) \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij} [\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\} \leq \sum_{i=1}^n u_i(t) \left\{ \sum_{j=1}^r b_{ij} [\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\} \quad (6.59)$$

для всех  $\mathbf{u}$  ( $t \in \Omega$  и  $t \in [t_0, T^*]$ ). В шаге 2 мы увидим, насколько важным является соотношение (6.59).

**Замечание 6.2.** Если  $\mathbf{p}^*(t)$  удовлетворяет (6.59), то и вектор  $C\mathbf{p}^*(t)$  удовлетворяет этому уравнению ( $C$  — произвольная постоянная).

Утверждение 3 теоремы 5.9 [см. выражение (5.435)] состоит в следующем

$$H[\mathbf{x}^*(T^*), \mathbf{p}^*(T^*), \mathbf{u}^*(T^*), T^*] = \sum_{\alpha=1}^{n-\beta} e_\alpha \frac{\partial g_\alpha[\mathbf{x}^*(T^*), T^*]}{\partial T^*} = \left\langle \mathbf{e}, \frac{\partial \mathbf{g}[\mathbf{x}^*(T^*), T^*]}{\partial T^*} \right\rangle, \quad (6.60)$$

где  $\mathbf{e}$  есть  $n - \beta$ -мерный вектор с компонентами  $e_1, e_2, \dots, e_{n-\beta}$ . Из выражений (6.60) и (6.52) имеем

$$1 + \sum_{i=1}^n f_i[\mathbf{x}^*(T^*), T^*] p_i^*(T^*) + \sum_{j=1}^r u_j^*(T^*) \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}^*(T^*), T^*] p_i^*(T^*) \right\} = \sum_{\alpha=1}^{n-\beta} e_\alpha \frac{\partial g_\alpha[\mathbf{x}^*(T^*), T^*]}{\partial T^*}. \quad (6.61)$$

**Замечание 6.3.** Если область  $S$  не зависит от времени (т. е., если область цели является стационарной в пространстве состояний), то

$$\frac{\partial g_\alpha[\mathbf{x}^*(T^*), T^*]}{\partial T^*} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - \beta \quad (6.62)$$

и поэтому уравнение (6.61) принимает вид

$$1 + \sum_{i=1}^n f_i[\mathbf{x}^*(T^*), T^*] p_i^*(T^*) + \sum_{j=1}^r u_j^*(T^*) \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}^*(T^*), T^*] p_i^*(T^*) \right\} = 0. \quad (6.63)$$

**Замечание 6.4.** Если  $\mathbf{p}^*(T^*)$  удовлетворяет уравнениям (6.61) или (6.63), то вектор  $C\mathbf{p}^*(T^*)$ , где  $C$  — произвольная постоянная, не удовлетворяет уравнениям (6.61) или (6.63). Это противоречит замечаниям 6.1 и 6.3.

Утверждение 4 теоремы 5.9 состоит в том, что вектор  $\mathbf{p}^*(T^*)$  должен быть нормален к области  $S$  при  $t = T^*$ . Область  $S$  при  $t = T^*$  определена при помощи  $n - \beta$  уравнений:

$$\left. \begin{aligned} g_1(\mathbf{x}, T^*) &= 0; \\ g_2(\mathbf{x}, T^*) &= 0; \\ \dots &\dots \dots \dots \\ g_{n-\beta}(\mathbf{x}, T^*) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

Обозначим через  $\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, T^*), \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, T^*), \dots, \mathbf{h}_{n-\beta}(\mathbf{x}, T^*)$  градиенты (векторы; каждый имеет  $n$  компонент):

$$\mathbf{h}_\alpha[\mathbf{x}, T^*] = \frac{\partial g_\alpha[\mathbf{x}, T^*]}{\partial \mathbf{x}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - \beta. \quad (6.65)$$

Необходимо, чтобы вектор  $\mathbf{p}^*(T^*)$  был некоторой линейной комбинацией этих векторов в точке  $\mathbf{x}^*(T^*)$ . Иначе говоря, должно выполняться соотношение

$$\mathbf{p}^*(T^*) = \sum_{\alpha=1}^{n-\beta} k_{\alpha} \mathbf{h}_{\alpha}[\mathbf{x}^*(T^*), T^*], \quad (6.66)$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_{n-\beta}$  — произвольные постоянные.

**Замечание 6.5.** Если  $\mathbf{p}^*(T^*)$  удовлетворяет соотношению (6.66), то это относится также и к вектору  $C\mathbf{p}^*(T^*)$ , где  $C$  — постоянная, так как выражение (6.66) определяет направление вектора, а не его величину. Этим завершается получение необходимых условий для задачи 6.1б. Напомним, что все сделанные утверждения имеют следующий вид: если  $\mathbf{u}^*(t)$  — оптимальное управление и  $\mathbf{x}^*(t)$  — оптимальное состояние, то необходимо, чтобы существовал вектор  $\mathbf{p}^*(t)$ , удовлетворяющий уравнениям (6.51)—(6.66).

**Шаг 2.** Получим из неравенства (6.59) уравнение, которое связывает  $\mathbf{u}^*(t)$  с  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$  для  $t \in [t_0, T^*]$ . Далее «исключим» оптимальное управление из всех уравнений.

Определим функции  $q_1^*(t), q_2^*(t), \dots, q_r^*(t)$  при помощи уравнений

$$q_j^*(t) = \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t), \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (6.67)$$

или эквивалентного им векторного выражения

$$\mathbf{q}^*(t) = \mathbf{B}'[\mathbf{x}^*(t), t] \mathbf{p}^*(t), \quad (6.68)$$

где  $\mathbf{q}^*(t)$  —  $r$ -мерный вектор.

Таким образом, вектор  $\mathbf{q}^*(t)$  получается при помощи линейного преобразования (матрица которого есть  $\mathbf{B}'[\mathbf{x}^*(t), t]$ ) из вектора  $\mathbf{p}^*(t)$ .

При использовании функций  $q_j^*(t)$  уравнение (6.59) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^r u_j^*(t) q_j^*(t) \leq \sum_{j=1}^r u_j(t) q_j^*(t) \quad (6.69)$$

для всех  $|u_j(t)| \leq 1, j = 1, 2, \dots, r$  и любого  $t \in [t_0, T^*]$ .

Уравнение (6.69) означает, что функция

$$\Phi[\mathbf{u}(t)] = \sum_{j=1}^r u_j(t) q_j^*(t) \quad (6.70)$$

достигает абсолютного минимума при

$$u_j(t) = u_j^*(t). \quad (6.71)$$

При этом справедливо соотношение

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in \Omega} \Phi[\mathbf{u}(t)] = \min_{\mathbf{u}(t) \in \Omega} \sum_{j=1}^r u_j(t) q_j^*(t) = \sum_{j=1}^r \left\{ \min_{|u_j(t)| \leq 1} u_j(t) q_j^*(t) \right\}. \quad (6.72)$$

**Замечание 6.6.** Можно поменять местами  $\min$  и знак  $\sum$ , так как функции  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  ограничены независимо друг от друга. Иначе говоря, если, например,  $u_1(t) = +1$ , то  $u_2(t), \dots, u_r(t)$  могут принимать любые значения, удовлетворяющие ограничениям по величине.

Заметим, что

$$\min_{|u_j(t)| \leq 1} \{u_j(t) q_j^*(t)\} = -|q_j^*(t)|. \quad (6.73)$$

Управление  $u_j^*(t)$  будет минимизировать функцию  $u_j(t)q_j^*(t)$ . Следовательно, в силу условия (6.73) управления  $u_j^*(t)$  должны быть функциями  $q_j^*(t)$  вида:

$$\left. \begin{aligned} u_j^*(t) &= +1, & \text{если } q_j^*(t) < 0; \\ u_j^*(t) &= -1, & \text{если } q_j^*(t) > 0; \\ u_j^*(t) &\text{ неопределенно,} & \text{если } q_j^*(t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.74)$$

Для более компактной записи выражения (6.74) можно использовать функцию  $\text{sign}$ <sup>1</sup>:

$$u_j^*(t) = -\text{sign} \{q_j^*(t)\} = -\text{sign} \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij} [\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\} \quad (6.75)$$

для  $j = 1, 2, \dots, r$  и  $t \in [t_0, T^*]$ .

Уравнение (6.75) связывает компоненты оптимального по быстродействию управления  $\mathbf{u}^*(t)$  с состоянием  $\mathbf{x}^*(t)$  и дополнительным вектором  $\mathbf{p}^*(t)$ . Если  $\mathbf{p}^*(t)$  таково, что выражение (6.75) удовлетворяется, то это уравнение справедливо и для любого вектора  $c\mathbf{p}^*(t)$ , где  $c > 0$ , так как  $\text{sign} \{c\} = +1$ .

Уравнение (6.75) означает, что  $u_j^*(t)$  есть вполне определенная функция  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $\mathbf{p}^*(t)$  и  $t$ , если аргумент функции  $\text{sign}$  не равен нулю. Однако при  $q_j^*(t) = 0$  величину  $u_j^*(t)$  из уравнения 6.75 определить нельзя.

Выделим теперь два случая: первый назовем нормальным, а второй — вырожденным.

**Определение 6.4. Нормальная задача об оптимальном быстродействии.** Предположим, что на интервале  $[t_0, T^*]$  имеется счетное множество точек  $t_{1j}, t_{2j}, t_{3j}, \dots$ ,

$$t_{\gamma j} \in [t_0, T^*], \quad \gamma = 1, 2, 3, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (6.76)$$

таких, что

$$\begin{aligned} q_i^*(t) &= \sum_{j=1}^n b_{ij} [\mathbf{x}^*(t), t] p_j^*(t) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{в том и только в том случае, если } t = t_{\gamma j}; \\ \text{не равна нулю} & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.77)$$

В этом случае задачу об оптимальном быстродействии будем называть нормальной.

На рис. 6.4 показана функция  $q_i^*(t)$  и соответствующее  $u_j^*(t)$ , найденное по уравнению (6.75). Функция  $q_i^*(t)$  равна нулю только в изолированные моменты времени, и поэтому управление, оптимальное по быстродействию, есть кусочно-постоянная функция с простыми скачками. Если все функции  $q_i^*(t)$  имеют такие же свойства, то задача управления будет нормальной. Обычно говорят, что управление  $u_j^*(t)$  «переключается» при  $t = t_{\gamma j}$  и что число переключений  $u_j^*(t)$  равно наибольшему числу  $\gamma j$

<sup>1</sup> Функция знака, записываемая как  $\text{sign} \{ \}$ , определяется следующим образом. Пусть  $a = \text{sign} \{b\}$ , тогда ее можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} a &= +1, & \text{если } & b > 0 \\ a &= -1, & \text{если } & b < 0 \\ a & & \text{неопределенно,} & \text{если } b = 0. \end{aligned} \right\}$$

Заметим, что  $\text{sign} \{ab\} = \text{sign} \{a\} \text{sign} \{b\}$ .

(или  $\infty$ ). Управление  $u_i^*(t)$ , показанное на рис. 6.4, переключается 4 раза. Следовательно, число переключений равно четырем.

**Определение 6.5. Вырожденная задача об оптимальном быстродействии.** Предположим, на интервале  $[t_0, T^*]$  есть один (или более) подынтервал  $[T_1, T_2]_j$  из  $[t_0, T^*]$  такой, что

$$q_i^*(t) = \sum_{i=1}^n b_{ij} [\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) = 0 \text{ для всех } t \in [T_1, T_2]_j. \quad (6.78)$$

Такую задачу называют вырожденной, а интервал  $[T_1, T_2]_j$  (или интервалы) — интервалом вырожденности.

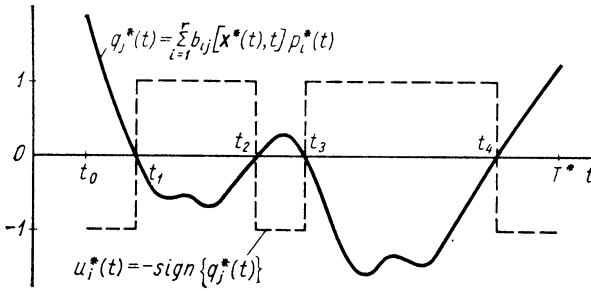


Рис. 6.4. Функция  $q_j^*(t)$ , дающая вполне определенное управление  $u_j^*(t)$

Функция  $q_j^*(t)$ , показанная на рис. 6.5, равна нулю для всех  $t$  из  $[T_1, T_2]$  и поэтому соответствует вырожденной задаче. Таким образом, в случае вырожденной задачи существует по крайней мере один подынтервал времени, в течение которого соотношение  $u_i^*(t) = -\text{sign} \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij} [\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\}$  не определяет оптимального управления как функции от  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$ .

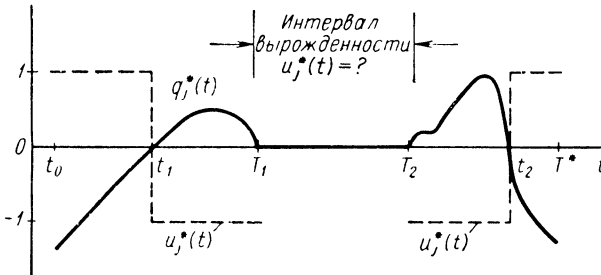


Рис. 6.5. Показанная на рисунке функция  $q_j^*(t)$  соответствует вырожденной задаче об оптимальном по быстродействию управлении

Последнее утверждение не означает, что оптимальное по быстродействию управление не существует или не может быть определено. Оно лишь означает, что необходимое условие

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \leq H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t]$$

не дает определенного соотношения между  $\mathbf{u}^*(t)$ ,  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $\mathbf{p}^*(t)$ ,  $t$ .

Мы будем рассматривать вырожденные задачи в конце настоящей главы.

Рассмотрим нормальную задачу об оптимальном быстродействии. В этом случае уравнение (6.75) можно подставить в уравнения (6.52)—(6.54), (6.56)—(6.58), (6.60)—(6.61) и тем самым исключить  $\mathbf{u}^*(t)$  из всех необходимых условий. Поэтому все необходимые условия, сформулированные через  $\mathbf{u}^*(t)$ , в шаге 1 сведутся к необходимым условиям, не зависящим от  $\mathbf{u}^*(t)$ . Как мы увидим в шаге 3, это обстоятельство позволит нам найти управление, оптимальное по быстродействию.

Сформулируем две теоремы, в которых подытожим эти идеи.

**Теорема 6.2. Релейный принцип.** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — оптимальное по быстродействию управление для задачи 6.16, а  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$  — соответствующие ему фазовая траектория и дополнительный вектор. Если задача нормальная, то компоненты  $u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_r^*(t)$  управления  $\mathbf{u}^*(t)$  должны определяться соотношениями

$$u_j^*(t) = - \operatorname{sign} \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij} [\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\} \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (6.79)$$

для  $t \in [t_0, T^*]$ <sup>1</sup>. Уравнение (6.79) можно записать более компактно:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t) &= - \operatorname{SIGN} \{ \mathbf{q}^*(t) \} = \\ &= - \operatorname{SIGN} \{ \mathbf{B}' [\mathbf{x}(t), t] \mathbf{p}^*(t) \}. \end{aligned} \quad (6.80)^2$$

Таким образом, если задача нормальная, то компоненты управления, оптимального по быстродействию, есть кусочно-постоянные (или релейные) функции времени.

Предлагаем читателю при помощи прямой подстановки доказать следующую теорему.

**Теорема 6.3. Упрощенные необходимые условия.** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — оптимальное по быстродействию управление для задачи 6.16,  $\mathbf{x}^*(t)$  — состояние на оптимальной по быстродействию траектории и  $\mathbf{p}^*(t)$  — соответствующий дополнительный вектор. Пусть  $T^*$  — минимальное время. Если задача нормальная, то необходимо, чтобы:

а) удовлетворялась теорема 6.2;

б) состояние  $\mathbf{x}^*(t)$  и дополнительный вектор  $\mathbf{p}^*(t)$  удовлетворяли упрощенным каноническим уравнениям

$$\dot{x}_k(t) = f_k [\mathbf{x}^*(t), t] - \sum_{i=1}^r b_{ki} [\mathbf{x}^*(t), t] \operatorname{sign} \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ii} [\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\} \quad (6.81)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_k^*(t) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i [\mathbf{x}^*(t), t]}{\partial x_k^*(t)} p_i^*(t) + \\ &+ \left( \sum_{j=1}^r \operatorname{sign} \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij} [\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\} \right) \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_{ij} [\mathbf{x}^*(t), t]}{\partial x_k^*(t)} p_i^*(t) \end{aligned} \quad (6.82)$$

для  $k = 1, 2, \dots, n$  и  $t \in [t_0, T^*]$ ;

в) гамильтониан (6.52) вдоль оптимальной траектории определялся уравнением

$$\begin{aligned} H [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] &= 1 + \sum_{i=1}^n f_i [\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) - \\ &- \sum_{i=1}^r \left| \sum_{i=1}^n b_{ij} [\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right| \quad t \in [t_0, T^*]; \end{aligned} \quad (6.83)$$

<sup>1</sup> За исключением счетного множества моментов переключения  $t_{vj}$ .

<sup>2</sup> Векторная функция  $\operatorname{SIGN} \{ \}$  определяется следующим образом: пусть  $a_1, a_2, \dots, a_r$  — компоненты вектора  $\mathbf{a}$  и  $b_1, b_2, \dots, b_r$  — компоненты  $\mathbf{b}$ ; тогда  $\mathbf{a} = \operatorname{SIGN} \{ \mathbf{b} \}$  может быть представлено в виде  $a_j = \operatorname{sign} \{ b_j \}$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ .

г) в конечный момент времени  $T^*$  выполнялось соотношение [см. выражение (6.61)]

$$1 + \sum_{i=1}^n f_i [\mathbf{x}^*(T^*), T^*] p_i^*(T^*) - \sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^n b_{ij} [\mathbf{x}^*(T^*), T^*] p_i^*(T^*) \right| = \\ = \sum_{\alpha=1}^{n-\beta} e_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha} [\mathbf{x}^*(T^*), T^*]}{\partial T^*}; \quad (6.84)$$

д) в начальный момент времени  $t_0$

$$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}(t_0), \quad (6.85)$$

в конечный момент времени  $T^*$

$$g_{\alpha} [\mathbf{x}^*(T^*), T^*] = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - \beta; \quad \beta \geq 1; \quad (6.86)$$

$$\mathbf{p}^*(T^*) = \sum_{\alpha=1}^{n-\beta} k_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha} [\mathbf{x}^*(T^*), T^*]}{\partial \mathbf{x}^*(T^*)}. \quad (6.87)$$

Дадим геометрическую интерпретацию теоремы 6.3. Предположим, что  $n = 3$  и  $r = 2$ . Как показано на рис. 6.6, матрица размера  $2 \times 3$   $\mathbf{B}' [\mathbf{x}^*(t), t]$  связана с преобразованием, отображающим 3-мерный век-

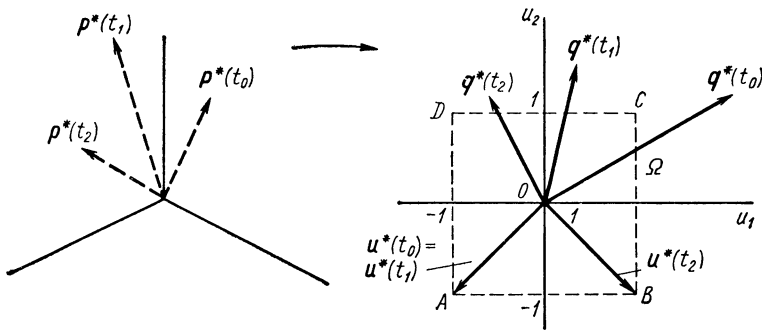


Рис. 6.6. Геометрическая интерпретация того обстоятельства, что управление  $\mathbf{u}^*(t)$  должно минимизировать скалярное произведение  $\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{q}^*(t) \rangle$

тор  $\mathbf{p}^*(t)$  в 2-мерный вектор  $\mathbf{q}^*(t) = \mathbf{B}' [\mathbf{x}^*(t), t] \mathbf{p}^*(t)$ . Для того чтобы минимизировать скалярное произведение  $\langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{q}^*(t) \rangle$ , вектор управления  $\mathbf{u}^*(t)$  должен иметь максимальную величину и быть направлен, грубо говоря, противоположно вектору  $\mathbf{q}^*(t)$ . Так, если  $\mathbf{q}^*(t)$  находится в первом квадранте, то вектор  $\mathbf{u}^*(t)$  должен «упираться» в угол  $A$  квадрата ограничений. Если  $\mathbf{q}^*(t)$  во втором квадранте, то  $\mathbf{u}^*(t)$  должен быть направлен в угол  $B$  и т. д.

Необходимые упрощенные условия, даваемые теоремами 6.2 и 6.3, приводят к симметричному методу нахождения оптимального по быстродействию управления. Это будет подробно рассмотрено в шаге 3. Сейчас мы хотим напомнить читателю, что теоремы 6.2 и 6.3 связывают оптимальные величины и представляют собой необходимые условия. Если для данного управления  $\mathbf{u}(t)$  и соответствующей траектории не выполняется любое из необходимых условий, то из этого следует, что  $\mathbf{u}(t)$  не является оптимальным по быстродействию управлением.

Следующий пример иллюстрирует результаты теорем 6.2 и 6.3 для конкретной системы.



**Пример 6.3.** Рассмотрим динамическую систему с фазовыми координатами  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  и управляющими функциями  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , описываемую уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + x_1(t)u_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - tx_2^2(t) + u_2(t); \\ \dot{x}_3(t) &= -t^2x_1^3(t) - x_3(t).\end{aligned}$$

Предположим, что управляющие функции  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  ограничены по величине неравенствами

$$|u_1(t)| \leq 1; \quad |u_2(t)| \leq 1.$$

Будем считать, что в начальный момент времени  $t_0 = 0$  система находится в состоянии

$$x_1(0) = -1; \quad x_2(0) = -1; \quad x_3(0) = 10$$

Предположим, что область  $S$  описывается уравнениями

$$\begin{aligned}g_1(x_1, x_2, x_3, t) &= x_3 = 0; \\ g_2(x_1, x_2, x_3, t) &= x_1^2 + x_2^2 - t^2 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Последнее уравнение показывает, что область  $S$  есть расширяющаяся окружность в плоскости  $x_1x_2$  с радиусом  $\sqrt{t^2 + 1}$ .

Задача состоит в отыскании оптимального по быстродействию управления, переводящего систему из начального состояния  $(-1, -1, 10)$  в область  $S$ . Мы не знаем, существует ли оптимальное по быстродействию управление, а если существует, то является ли оно единственным. Будем считать, что это решение существует и оно единственно. Кроме того, исследуемая задача нормальна, и поэтому мы можем рассматривать необходимые условия.

Гамильтониан данной задачи равен:

$$\begin{aligned}H &= H[x_1(t), x_2(t), x_3(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t), u_1(t), u_2(t), t] = \\ &= 1 - x_2(t)p_1(t) + x_1(t)u_1(t)p_1(t) + x_1(t)p_2(t) - tx_2^2(t)p_2(t) + \\ &\quad + u_2(t)p_2(t) - t^2x_1^3(t)p_3(t) - x_3(t)p_3(t).\end{aligned}$$

Упрощенные необходимые условия определяются следующим образом:

Из соотношения (6.79) имеем

$$\begin{aligned}u_1^*(t) &= -\text{sign}\{x_1^*(t)p_1^*(t)\}; \\ u_2^*(t) &= -\text{sign}\{p_2^*(t)\};\end{aligned}$$

из уравнения (6.81) имеем

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^*(t) &= -x_2^*(t) - x_1^*(t)\text{sign}\{x_1^*(t)p_1^*(t)\}; \\ \dot{x}_2^*(t) &= x_1^*(t) - tx_2^{*2}(t) - \text{sign}\{p_2^*(t)\}; \\ \dot{x}_3^*(t) &= -t^2x_1^{*3}(t) - x_3^*(t);\end{aligned}$$

из выражения (6.82) имеем

$$\begin{aligned}\dot{p}_1^*(t) &= +p_1^*(t)\text{sign}\{x_1^*(t)p_1^*(t)\} - p_2^*(t) + 3t^2x_1^{*2}(t)p_3^*(t); \\ \dot{p}_2^*(t) &= +p_1^*(t) + 2tx_2^*(t)p_2^*(t); \\ \dot{p}_3^*(t) &= +p_3^*(t).\end{aligned}$$

Из уравнения (6.84) находим, что для минимального времени  $T^*$

$$\begin{aligned}1 - x_2^*(T^*)p_1^*(T^*) - |x_1^*(T^*)p_1^*(T^*)| + x_1^*(T^*)p_2^*(T^*) - \\ - T^*x_2^{*2}(T^*)p_2^*(T^*) - |p_2^*(T^*)| - T^{*2}x_1^{*3}(T^*)p_3^*(T^*) - x_3^*(T^*)p_3^*(T^*) = \\ = e_10 + e_22T^*,\end{aligned}$$

где  $e_2$  — некоторая постоянная.

В начальный момент времени  $t_0 = 0$  имеем  $x_1^*(0) = -1$ ;  $x_2^*(0) = -1$  и  $x_3^*(0) = 10$ .

Для минимального времени  $T^*$  должно быть

$$x_1^{*2}(T^*) + x_2^{*2}(T^*) - T^{*2} - 1 = 0; \quad x_3^*(T^*) = 0$$

и [по соотношению (6.87)]

$$p_1^*(T^*) = k_1 0 + k_2 2x_1^*(T^*);$$

$$p_2^*(T^*) = k_1 0 + k_2 2x_2^*(T^*);$$

$$p_3^*(T^*) = k_1 1 + k_2 0,$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — некоторые постоянные.

**Шаг 3.** В шагах 1 и 2 мы установили соотношения, которые должны выполняться для оптимального по быстродействию управления  $u^*(t)$ , состояния  $x^*(t)$ , соответствующего  $p^*(t)$ , и минимального времени  $T^*$ . Однако задача состоит в том, чтобы найти оптимальное по быстродействию управление, и поэтому возникает вопрос: как можно при помощи всех этих теорем отыскать оптимальное по быстродействию управление для задачи 6.1б? Ответ на этот вопрос будет дан ниже. При этом каждый шаг нашего рассуждения будет озаглавлен, что даст возможность читателю проследить логическую связь между ними.

**Шаг 3а. Формирование гамильтониана.** Начнем с того, что сформируем гамильтониан  $H[x(t), p(t), u(t), t]$  для системы  $\dot{x}(t) = f[x(t), t] + B[x(t), t]u(t)$  и функционала  $J(u) = \int_0^t 1 dt$ . Гамильтониан с помощью выражений (6.45) и (6.46) записывается в виде

$$H[x(t), p(t), u(t), t] = 1 + \langle f[x(t), t], p(t) \rangle + \langle u(t), B'[x(t), t]p(t) \rangle, \quad (6.88)$$

где подчеркивается, что  $x(t)$ ,  $p(t)$ ,  $u(t)$  — векторы, представляющие собой функции от времени. На этом шаге мы не накладываем ограничений ни на значения векторов  $x(t)$ ,  $p(t)$ ,  $u(t)$ , ни на величину  $t$ .

**Шаг 3б. Минимизация гамильтониана.** Гамильтониан  $H[x(t), p(t), u(t), t]$  зависит от  $2n + r + 1$  переменных. Предположим, что мы зафиксировали  $x(t)$ ,  $p(t)$  и  $t$  и рассматриваем поведение гамильтониана (который теперь является только функцией  $u$ , так как  $x(t)$ ,  $p(t)$  и  $t$  постоянны) при изменении  $u(t)$  в области ограничений  $\Omega$ . В частности, мы хотим найти управление, при котором гамильтониан имеет абсолютный минимум. Поэтому определим  $H$ -минимальное управление следующим образом.

**Определение 6.6.**  $H$ -минимальное управление. Допустимое управление  $u^0(t)$  называется  $H$ -минимальным, если оно удовлетворяет соотношению

$$H[x(t), p(t), u^0(t), t] \leq H[x(t), p(t), u(t), t] \quad (6.89)$$

для всех  $u(t) \in \Omega$  и всех  $x(t)$ ,  $p(t)$  и  $t$ .

Ранее было установлено, что  $H$ -минимальное управление  $u^0(t)$  для гамильтониана типа (6.88) определяется уравнением

$$u_j^0(t) = - \operatorname{sign} \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[x(t), t] p_i(t) \right\}, \quad (6.90)$$

$$j = 1, 2, \dots, r,$$

или в векторной форме

$$u^0(t) = - \operatorname{SIGN} \{ B'[x(t), t] p(t) \}. \quad (6.91)$$

Подставим  $H$ -минимальное управление  $u^0(t)$  в выражение (6.88):

$$H[x(t), p(t), u^0(t), t] = 1 + \langle f[x(t), t], p(t) \rangle - \langle \operatorname{SIGN} \{ B'[x(t), t] p(t) \}, B'[x(t), t] p(t) \rangle. \quad (6.92)$$

Следовательно,

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^0(t), t] = 1 + \sum_{i=1}^n f_i[\mathbf{x}(t), t] p_i(t) - \sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}(t), t] p_i(t) \right|. \quad (6.93)$$

Правая часть выражения (6.93) является функцией только от  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{p}(t)$ . Определим функцию  $H^0[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), t]$  при помощи соотношения

$$H^0[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), t] = \min_{\mathbf{u}(t) \in \Omega} H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t]. \quad (6.94)$$

Еще раз напомним читателю, что эти определения и уравнения не связаны явно с траекториями и оптимальными величинами.

**Шаг 3в. Ограничение  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{p}(t)$ .** Потребуем, чтобы (пока еще неопределенные) векторы  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{p}(t)$  удовлетворяли дифференциальным уравнениям

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H^0[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), t]}{\partial \mathbf{p}(t)}; \quad (6.95)$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = - \frac{\partial H^0[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), t]}{\partial \mathbf{x}} \quad (6.96)$$

или, эквивалентно, дифференциальным уравнениям

$$\dot{x}_k(t) = f_k[\mathbf{x}(t), t] - \sum_{j=1}^r b_{kj}[\mathbf{x}(t), t] \operatorname{sign} \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}(t), t] p_i(t) \right\} \quad (6.97)$$

$$\dot{p}_k(t) = - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f_i[\mathbf{x}(t), t]}{\partial x_k(t)} \right\} p_i(t) +$$

$$+ \left[ \sum_{j=1}^r \operatorname{sign} \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}(t), t] p_i(t) \right\} \right] \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial b_{ij}[\mathbf{x}(t), t]}{\partial x_k(t)} \right\} p_i(t) \quad (6.98)$$

для  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Отметим, что

$$\frac{\partial H^0[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), t]}{\partial \mathbf{p}(t)} = \frac{\partial H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^0(t), t]}{\partial \mathbf{p}(t)} \Big|_{\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^0(t)} \quad (6.99)$$

и

$$\frac{\partial H^0[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} = \frac{\partial H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^0(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} \Big|_{\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^0(t)}. \quad (6.100)$$

**Шаг 3г. «Опыт».** Нашей целью является отыскание оптимального по быстродействию управления  $\mathbf{u}^*(t)$ , переводящего систему  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{B}[\mathbf{x}(t), t] \mathbf{u}(t)$  из заданного начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  в область  $S$ . Примем, что данная задача нормальна (см. определение 6.4). Промоделируем уравнения (6.97) и (6.98) на аналоговой вычислительной машине. В известный начальный момент времени  $t_0$  мы используем принятые нами начальные значения фазовых координат в качестве начальных условий системы уравнений (6.97). В качестве начальных значений функций  $p_1(t_0), p_2(t_0), \dots, p_n(t_0)$  будем использовать некоторые предполагаемые величины.

Пусть  $q_j(t), j = 1, 2, \dots, r$  — функции, определенные соотношениями

$$q_j(t) = \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}(t), t] p_i(t). \quad (6.101)$$

Предположим, что

$$q_j(t_0) \neq 0 \text{ для всех } j = 1, 2, \dots, r. \quad (6.102)$$

Уравнения (6.102), (6.101) и (6.90) означают, что числа

$$u_j^0(t_0) = -\text{sign}\{q_j(t_0)\}$$

равны +1 или -1. Таким образом, решения уравнений (6.97) и (6.98) вполне определены, по крайней мере для  $t$ , близкого к  $t_0$ . Обозначим решения уравнений (6.97) и (6.98) через

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}[t, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{p}(t_0)]; \\ \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}[t, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{p}(t_0)], \end{aligned} \right\} \quad (6.103)$$

чтобы подчеркнуть их зависимость от известного начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  и предполагаемого начального значения  $\mathbf{p}(t_0)$ .

«Опыт» состоит в следующем. Измеряя сигналы  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{p}(t)$ , в каждый момент времени получим и зарегистрируем сигналы

$$q_j(t) = \sum_{i=1}^n b_{ij} |\mathbf{x}(t), t| p_i(t), \quad j = 1, 2, \dots, r; \quad (6.104)$$

$$\dot{q}_j(t), \ddot{q}_j(t), \overset{\dots}{q}_j(t), \dots, \quad j = 1, 2, \dots, r; \quad (6.105)$$

$$H^0[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), t] = 1 + \sum_{i=1}^n \dot{t}_i |\mathbf{x}(t), t| p_i(t) - \sum_{j=1}^r |q_j(t)|; \quad (6.106)$$

$$g_\alpha[\mathbf{x}(t), t], \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - \beta; \quad (6.107)$$

$$\frac{\partial g_\alpha[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - \beta; \quad (6.108)$$

$$h_\alpha[\mathbf{x}(t), t] = \frac{\partial g_\alpha[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - \beta. \quad (6.109)$$

Используя конкретное (выбранное наугад) значение  $\mathbf{p}(t_0)$ , последовательно для каждого момента времени  $t$  из некоторого интервала  $[t_0, T]$ , зададимся следующими вопросами:

**Вопрос 1.** Если  $q_j(t) = 0$ , то  $\dot{q}_j(t) \neq 0$ ? Если  $\dot{q}_j(t) = 0$ , то  $\ddot{q}_j(t) \neq 0$ ? (и так далее). Если ответ на первый вопрос положительный, (т. е. «да»), то мы задаем второй вопрос. Если ответ отрицательный (т. е. «нет»), то мы изменяем величину  $\mathbf{p}(t_0)$  и повторяем снова первый вопрос.

**Вопрос 2.** Если ответ на первый вопрос «да», то существует ли время  $T$ , для которого удовлетворяются соотношения

$$g_\alpha[\mathbf{x}(T), T] = 0 \quad (6.110)$$

для всех  $\alpha = 1, 2, \dots, n - \beta$ ? Если ответ на второй вопрос «нет», мы изменяем  $\mathbf{p}(t_0)$  и начинаем все сначала. Если ответ «да», то задаем третий вопрос.

**Вопрос 3.** Если ответ на второй вопрос «да», то существуют ли постоянные  $e_1, e_2, \dots, e_{n-\beta}$  такие, что удовлетворяется соотношение

$$H^0[\mathbf{x}(T), \mathbf{p}(T), t] = \sum_{\alpha=1}^{n-\beta} e_\alpha \frac{\partial g_\alpha[\mathbf{x}(T), T]}{\partial T} ? \quad (6.111)$$

Если ответ «нет», то надо изменить  $\mathbf{p}(t_0)$  и начать все сначала. Если ответ «да», то переходим к вопросу 4.

**Вопрос 4.** Если ответ на третий вопрос «да», то существуют ли постоянные  $k_1, k_2, \dots, k_{n-b}$  такие, что удовлетворяется соотношение

$$p(T) = \sum_{\alpha=1}^{n-b} k_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha} [x(T), T]}{\partial x(T)} ? \quad (6.112)$$

Если ответ «нет», то надо изменить  $p(t_0)$  и начать все сначала. Если ответ «да», то это означает, что мы нашли  $p(t_0)$  такое, при котором ответы на все вопросы 1—4 положительны. В этом случае мы запоминаем принятое  $p(t_0)$  и начинаем эксперимент сначала, пока не найдем все векторы  $p(t_0)$ , для которых ответы на вопросы 1—4 положительны. Логическая последовательность вопросов показана на рис. 6.7.

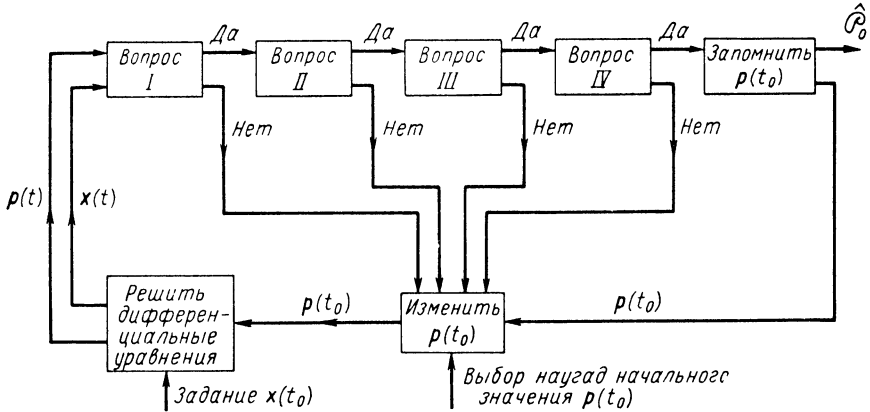


Рис. 6.7. Логическая диаграмма «опыта», которую можно использовать для отыскания оптимального по быстродействию управления

**Шаг 3д. Возможные управления, оптимальные по быстродействию.** Формализуем результаты «опыта», проделанного в шаге 3г. Грубо говоря, мы определили множество  $\hat{\mathfrak{P}}_0$ , являющееся множеством начальных значений  $\hat{p}(t_0)$ , соответствующих заданному  $x(t_0)$  и обладающее тем свойством, что ответы на все вопросы 1—4 будут положительными (т. е. «да»). Ясно, что  $\hat{\mathfrak{P}}_0$  есть подпространство  $n$ -мерного пространства  $R_n$ . Можно представлять себе  $\hat{\mathfrak{P}}_0$  как «выход» логического процесса, изображенного на рис. 6.7. Более точно  $\hat{\mathfrak{P}}_0$  определяется следующим образом.

**Определение 6.7.** Пусть  $\hat{\mathfrak{P}}_0$  — область начальных состояний дополнительной переменной  $\hat{p}(t_0)$ , обладающая свойствами: 1) для каждого  $\hat{p}(t_0) \in \hat{\mathfrak{P}}_0$  соответствующие решения уравнений (6.97) и (6.98), обозначенные через

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{x}[t, t_0, x(t_0), \hat{p}(t_0)]; \\ \hat{p}(t) &= \hat{p}[t, t_0, x(t_0), \hat{p}(t_0)], \end{aligned} \right\} \quad (6.113)$$

удовлетворяют соотношению

$$q_j(t) = \sum_{i=1}^n b_{ij} [\hat{x}(t), t] \hat{p}_i(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (6.114)$$

лишь на счетном множестве точек  $t$ ; 2) существует время  $\hat{T}$  (зависящее от  $\mathbf{x}(t_0)$  и  $\hat{\mathbf{p}}(t_0)$ ), такое, что можно найти постоянные  $e_1, e_2, \dots, e_{n-\beta}$  и  $k_1, k_2, \dots, k_{n-\beta}$ , при которых соблюдаются следующие соотношения:

$$H^0[\hat{\mathbf{x}}(\hat{T}), \hat{\mathbf{p}}(\hat{T}), \hat{T}] = \sum_{i=1}^n f_i[\hat{\mathbf{x}}(\hat{T}), \hat{T}] \hat{p}_i(\hat{T}) - \\ - \sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^n b_{ij}[\hat{\mathbf{x}}(\hat{T}), \hat{T}] \hat{p}_i(\hat{T}) \right| = \sum_{\alpha=1}^{n-\beta} e_\alpha \frac{\partial g_\alpha[\hat{\mathbf{x}}(\hat{T}), \hat{T}]}{\partial \hat{T}}; \quad (6.115)$$

$$g_\alpha[\hat{\mathbf{x}}(\hat{T}), \hat{T}] = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - \beta; \quad (6.116)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(\hat{T}) = \sum_{\alpha=1}^{n-\beta} k_\alpha \frac{\partial g_\alpha[\hat{\mathbf{x}}(\hat{T}), \hat{T}]}{\partial \hat{\mathbf{x}}(\hat{T})}. \quad (6.117)$$

Советуем читателю вернуться к теореме 6.3 и сравнить соотношения (6.115) с (6.84), (6.116) с (6.86) и (6.117) с (6.87). В силу того обстоятельства, что функции  $\hat{q}_j(t)$  равны нулю лишь на счетном множестве  $t$ , а также аналогичности уравнений (6.97) и (6.98) с уравнениями (6.81) и (6.82) получим следующую лемму.

**Лемма 6.2.** Каждое решение  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  и  $\hat{\mathbf{p}}(t)$ ,  $t \in [t_0, \hat{T}]$ , производимое элементом множества  $\mathfrak{F}_0$ , удовлетворяет всем упрощенным необходимым условиям теоремы 6.3.

Мы показали, что  $H$ -минимальное управление  $\mathbf{u}^0(t)$  (см. определение 6.6) дается соотношением [см. соотношение (6.91)]

$$\mathbf{u}^0(t) = -\text{SIGN}\{\mathbf{B}'[\mathbf{x}(t), t]\mathbf{p}(t)\}$$

для любых  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{p}(t)$  и  $t$ . Для  $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\mathbf{p}(t) = \hat{\mathbf{p}}(t)$  и  $t \in [t_0, \hat{T}]$ , находим

$$\mathbf{u}^0(t) \Big|_{\substack{\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{p}(t) = \hat{\mathbf{p}}(t)}} = \hat{\mathbf{u}}^0(t) = -\text{SIGN}\{\mathbf{B}'[\hat{\mathbf{x}}(t), t]\hat{\mathbf{p}}(t)\}, \quad t \in [t_0, \hat{T}]. \quad (6.118)$$

Сравнивая выражение (6.118) с (6.91) и имея в виду лемму 6.2, получим следующую лемму.

**Лемма 6.3.** Каждое управление  $\hat{\mathbf{u}}^0(t)$ , произведенное элементом из  $\mathfrak{F}_0$ , удовлетворяет необходимым условиям теоремы 6.2. Заметим, что

$$H[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{p}}(t), \hat{\mathbf{u}}^0(t), t] \leq H[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{p}}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (6.119)$$

для всех  $\mathbf{u}(t) \in \Omega$  и  $t \in [t_0, \hat{T}]$ .

Уясним теперь смысл лемм 6.2 и 6.3 и полезность необходимых условий при отыскании управления, оптимального по быстродействию.

Для конкретности предположим, что существуют три различных управления, оптимальных по быстродействию, переводящих систему из заданного начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  в область  $S$ . Все три управления, по определению, требуют одного и того же минимального времени  $T^*$ . Обозначим эти (оптимальные по быстродействию) управления через

$$\mathbf{u}_1^*(t), \mathbf{u}_2^*(t), \mathbf{u}_3^*(t), \quad t \in [t_0, T^*]. \quad (6.120)$$

Если провести «опыт» шага 3г, то определим множество  $\widehat{\mathfrak{F}}_0$ . Предположим, что мы можем найти [по выражению (6.118)] пять различных управлений, соответствующих элементам  $\widehat{\mathfrak{F}}_0$ . Обозначим эти управления через

$$\widehat{\mathbf{u}}_1^0(t), \widehat{\mathbf{u}}_2^0(t), \widehat{\mathbf{u}}_3^0(t), \widehat{\mathbf{u}}_4^0(t), \widehat{\mathbf{u}}_5^0(t), \quad (6.121)$$

а интервалы, на которых они определены, через

$$[t_0, \widehat{T}_1], [t_0, \widehat{T}_2], [t_0, \widehat{T}_3], [t_0, \widehat{T}_4], [t_0, \widehat{T}_5] \quad (6.122)$$

соответственно. Можно утверждать, что три из пяти управлений (6.121) будут тождественны трем управлениям, оптимальным по быстродействию [см. (6.120)]. Опять-таки для определенности предположим:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\mathbf{u}}_1^0(t) &= \mathbf{u}_1^*(t), & \widehat{T}_1 &= T^*, & t &\in [t_0, T^*]; \\ \widehat{\mathbf{u}}_2^0(t) &= \mathbf{u}_2^*(t), & \widehat{T}_2 &= T^*, & t &\in [t_0, T^*]; \\ \widehat{\mathbf{u}}_3^0(t) &= \mathbf{u}_3^*(t), & \widehat{T}_3 &= T^*, & t &\in [t_0, T^*]. \end{aligned} \right\} \quad (6.123)$$

Возникает вопрос: Каково значение управлений  $\widehat{\mathbf{u}}_4^0(t)$  и  $\widehat{\mathbf{u}}_5^0(t)$ ? Эти два управления должны быть локально оптимальными по быстродействию. Так как принцип минимума есть условие локальное, то оно не может отличить локальных оптимальных управлений от глобальных. Единственный путь определить, какие из управлений  $\widehat{\mathbf{u}}_1^0(t), \dots, \widehat{\mathbf{u}}_5^0(t)$  являются глобально-оптимальными, — это измерить и сравнить времена  $\widehat{T}_1, \dots, \dots, \widehat{T}_5$  и, таким образом, найти, что

$$\left. \begin{aligned} \widehat{T}_1 &= \widehat{T}_2 = \widehat{T}_3 := \widehat{T}^*; \\ \widehat{T}_4 &> T^*; \\ \widehat{T}_5 &> T^*. \end{aligned} \right\} \quad (6.124)$$

По этой причине мы и подчеркиваем, что необходимые условия дают нам лишь управления, которые могут оказаться оптимальными.

В следующем параграфе обсудим полученные выше результаты.

**Упражнение 6.2.** Рассмотрите динамическую систему из примера 6.3. Используя теоремы § 5.13 и 5.14, получите необходимые условия оптимального управления для следующих областей цели:

а)  $S$  — начало координат трехмерного пространства;

б)  $S$  — состояние  $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

в)  $S$  — плоскость  $x_1 = 0$ ;

г)  $S$  — движущаяся точка, описываемая уравнениями  $x_1 = t$ ;  $x_2 = t^2$ ;  $x_3 = \sin t$ ;

д)  $S$  — движущаяся плоскость  $x_1 = t + t^2 + t^3$ .

**Упражнение 6.3.** Рассмотрите задачу из примера 6.3. Для этого частного случая опишите «опыт», который вы проделали бы для определения возможных управлений, оптимальных по быстродействию. (У к а з а н и е: воспроизведите методику шага 3). Для данного частного вида уравнений укажите пути упрощения поиска множества  $\widehat{\mathfrak{F}}_0$ .

**Упражнение 6.4.** Рассмотрите задачу из примера 6.3 полагая, что управляющие функции  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  ограничены неравенствами

$$-1 \leq u_1(t) \leq +3; \quad -5 \leq u_2(t) \leq +2,$$

и получите упрощенные необходимые условия.

#### 6.4. ЗАМЕЧАНИЯ

В предыдущем параграфе были получены необходимые условия для оптимального по быстродействию управления и разработан идеализированный систематический способ определения управлений, одно из которых может оказаться оптимальным по быстродействию, а также установлено (см. теорему 6.2), что если задача нормальна, то компоненты управления, оптимального по быстродействию, являются кусочно-постоянными функциями времени. Мы не получили никаких результатов для вырожденной задачи, которая будет рассмотрена в § 6.21.

Так как для нормальной задачи компоненты оптимального по быстродействию управления должны быть кусочно-постоянными функциями времени, то одно из необходимых условий, а именно:  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \leq H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t]$ ;  $\mathbf{u}(t) \in \Omega$  позволяет ограничить поиск оптимальных управлений классом  $|u_j(t)| = 1, j = 1, 2, \dots, r$ . Это, пожалуй, наиболее полезный результат, полученный из принципа минимума, в то время как остальные необходимые условия дают скорее соответствующие граничные условия и условия трансверсальности.

Читатель, вероятно, заметил,<sup>1</sup> что гамильтониан

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t] = 1 + \langle \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t], \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{B}'[\mathbf{x}(t), t] \mathbf{p}(t) \rangle \quad (6.125)$$

и дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\partial H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \mathbf{p}(t)}; \\ \dot{\mathbf{p}}(t) &= - \frac{\partial H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} \end{aligned} \right\} \quad (6.126)$$

полностью определены системой и функционалом и, таким образом, не зависят от граничных условий при  $t_0$  и области  $S$ . К тому же,  $H$ -минимальное управление  $\mathbf{u}^0(t)$  (см. определение 6.6), определяемое уравнением

$$\mathbf{u}^0(t) = - \text{SIGN} \{ \mathbf{B}'[\mathbf{x}(t), t] \mathbf{p}(t) \} \quad (6.127)$$

независимо (функционально) от наложенных граничных условий. Таким образом, шаги За—Зв, описанные в § 6.3, совершенно одинаковы для любой задачи об оптимальном быстродействии. Необходимые условия для гамильтониана и дополнительной переменной в конечный момент времени  $T^*$  вместе с заданным начальным состоянием и уравнениями области  $S$  дают достаточно граничных условий для решения системы  $2n$  дифференциальных уравнений.

В § 6.3 мы показали пошаговый процесс, использованный для определения управлений  $\hat{\mathbf{u}}^0(t)$ , результирующих траекторий  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  и соответствующих дополнительных переменных  $\hat{\mathbf{p}}(t)$ , удовлетворяющих всем необходимым условиям. Для того чтобы выделить эти величины, дадим следующее определение.

**Определение 6.8. Экстремальные переменные.** Управление  $\hat{\mathbf{u}}^0(t)$  называется экстремальным, если  $\hat{\mathbf{u}}^0(t)$  и соответствующие ему траектория  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  и дополнительная переменная  $\hat{\mathbf{p}}(t)$  удовлетворяют всем необходимым условиям [т. е. уравнениям (6.113) и (6.115)—(6.119)]. Будем также называть  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  и  $\hat{\mathbf{p}}(t)$  экстремальными траекториями состояния и дополнительной переменной соответственно.

<sup>1</sup> Это показано также в табл. 5.2.



Как было замечено в § 6.3, в общем случае может быть много экстремальных управлений. Каждое экстремальное управление дает траекторию, которая может быть оптимальной либо локально, либо глобально<sup>1</sup>. Так как экстремальное управление удовлетворяет всем необходимым условиям, можно отметить следующее.

**Замечание 6.7.** Если оптимальное управление  $u^*(t)$  существует и единственно и нет других локальных оптимальных управлений, то существует только одно экстремальное управление  $\hat{u}^0(t)$ , которое и является оптимальным по быстродействию, т. е.  $\hat{u}^0(t) = u^*(t)$ .

Ясно, что предположение об отсутствии других локально-оптимальных управлений, сделанное в замечании 6.7, превращает принцип минимума в необходимое и достаточное условие.

**Замечание 6.8.** Если имеется только  $m_1$  различных оптимальных управлений и если есть  $m_2$  управлений, оптимальных локально, но не являющихся оптимальными глобально, то всего будет  $m_1 + m_2$  экстремальных управлений.

**Замечание 6.9.** Если глобально-оптимальное управление не существует и есть  $m_2$  различных локально-оптимальных управлений, то имеется  $m_2$  экстремальных управлений.

Следовательно, из существования экстремальных управлений не вытекает необходимость существования глобально-оптимального управления.

**Замечание 6.10.** Если оптимальное по быстродействию управление существует, то его можно найти, вычислив время  $T$ , требуемое каждым из экстремальных управлений, и выбрав управление, минимизирующее  $T$ .

Сделанные замечания приводят к заключению, что имея дело с задачей об оптимальном по быстродействию управлении (типа задачи 6.1б), мы должны знать ответы на следующие вопросы:

- 1) существует ли управление, оптимальное по быстродействию?
- 2) единственно ли оптимальное управление?
- 3) является ли задача нормальной?
- 4) не содержится ли дополнительной информации в необходимых условиях для данной системы и области  $S$ ?

К сожалению, для произвольных нелинейных систем и областей  $S$  ответов на эти вопросы пока еще не получено. Имеется, однако, ряд результатов для класса линейных систем. Так как этот класс систем исключительно важен, мы посвятим ему несколько параграфов, чтобы получить дополнительные результаты, имеющие большое значение как с теоретической, так и с практической точек зрения.

## 6.5. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ<sup>2</sup>

В этом параграфе мы применим результаты, полученные для задачи 6.1б к случаю линейных систем с постоянными параметрами.

На протяжении всего параграфа мы будем рассматривать в качестве области  $S$  начало координат фазового пространства. Такую задачу будем называть задачей о регуляторе, оптимальном по быстродействию. К этому типу относится большинство задач, которые рассматриваются в гл. 7.

<sup>1</sup> См. также § 5.17. Локальные оптимальные по быстродействию управления могут соответствовать точкам типа «седло»

<sup>2</sup> [179], [142], [17], [48], [144] и [166].

Порядок действий будет следующим:

1. Сначала мы сформулируем задачу 6.1 *в*, чтобы ясно представить себе её точную постановку.

2. После этого с помощью теоремы 6.4 мы установим необходимые условия, которым должно удовлетворять управление, оптимальное по быстродействию.

3. Далее, с помощью теоремы 6.6 мы сформулируем порядок исследования задачи на нормальность.

4. Теорема 6.7 позволит нам обосновать единственность оптимального по быстродействию управления в случае, когда задача об оптимальном управлении является нормальной.

5. Теорема 6.8 даст нам возможность сделать очень полезные выводы относительно числа переключений оптимального по быстродействию управления.

6. Наконец, мы докажем теорему 6.8 относительно единственности экстремальных управлений.

Рассмотрим следующую частную задачу.

**Задача 6.1в. Задача об оптимальном по быстродействию регуляторе для линейной системы с постоянными параметрами.** Дана динамическая система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (6.128)$$

где

состояние системы  $\mathbf{x}(t)$  есть  $n$ -мерный вектор;

матрица системы  $\mathbf{A}$  есть постоянная матрица размера  $n \times n$ ;

матрица коэффициентов при управляющих функциях («усилений»)  $\mathbf{B}$  есть постоянная матрица размера  $n \times r$ ;

управление  $\mathbf{u}(t)$  есть  $r$ -мерный вектор.

Считаем, что система [уравнение (6.128)] полностью управляема и компоненты  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , ...,  $u_r(t)$  ограничены по величине:

$$|u_j(t)| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (6.129)$$

В заданный начальный момент времени  $t_0 = 0$  первоначальное состояние системы равно:

$$\mathbf{x}(0) = \xi. \quad (6.130)$$

Найти управление  $\mathbf{u}^*(t)$ , переводящее систему из  $\xi$  в  $\mathbf{0}$  за минимальное время.

Обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  собственные значения матрицы системы  $\mathbf{A}$ , а через  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$  — векторы-столбцы матрицы  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \dots & \mathbf{b}_r \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{bmatrix}. \quad (6.131)$$

Мы приняли, что система полностью управляема<sup>1</sup>. Это, естественно, означает, что управления, переводящие систему (6.128) из любого начального состояния  $\xi$  и начало координат  $\mathbf{0}$ , существуют. Напомним, что система уравнений (6.128) полностью управляема в том и только в том случае, если матрица размера  $n \times (rn)$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (6.132)$$

содержит  $n$  линейно-независимых векторов-столбцов.

Если выход  $\mathbf{y}(t)$  линейной системы (6.128) связан с её состоянием  $\mathbf{x}(t)$  и управлением  $\mathbf{u}(t)$  соотношением

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (6.133)$$

<sup>1</sup> См. § 4.15 и 4.16.

то управление, переводящее состояние в  $\mathbf{0}$ , может быть «продолжено» таким образом, чтобы оно переводило выход в нуль, а затем удерживало его в этом состоянии.

Так, при  $t = T^*$  имеем

$$\mathbf{x}(T^*) = \mathbf{0}, \quad (6.134)$$

тогда

$$\mathbf{y}(T^*) = \mathbf{D}\mathbf{u}(T^*). \quad (6.135)$$

Если «продолжить» управление  $\mathbf{u}(t)$ , приняв, что

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \text{ для любых } t > T^*, \quad (6.136)$$

то получим

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{ для любого } t > T^*. \quad (6.137)$$

Сформулируем теперь необходимые условия для задачи 6.1в. Прежде всего составим для нашей задачи гамильтониан:

$$\begin{aligned} H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)] &= 1 + \langle \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t) \rangle = \\ &= 1 + \langle \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{B}'\mathbf{p}(t) \rangle. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Полагая, что оптимальное по быстродействию управление  $\mathbf{u}^*(t)$  существует, для получения необходимых условий можно использовать теорему 5.5. Эти необходимые условия подытоживает следующая теорема.

**Теорема 6.4. Необходимые условия для задачи 6.1в.** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — оптимальное по быстродействию управление, переводящее начальное состояние  $\xi$  в начало координат  $\mathbf{0}$ . Обозначим через  $\mathbf{x}^*(t)$  траекторию системы (6.128), соответствующую  $\mathbf{u}^*(t)$ , исходящую из  $\xi$  при  $t_0 = 0$  и попадающую в начало координат  $\mathbf{0}$  за минимальное время  $T^*$  (т. е.  $\mathbf{x}^*(0) = \xi$ ,  $\mathbf{x}^*(T^*) = \mathbf{0}$ ). В этом случае существует соответствующий дополнительный вектор  $\mathbf{p}^*(t)$  такой, что:

а)  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$  являются решениями канонических уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \frac{\partial H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)]}{\partial \mathbf{p}^*(t)}; \quad (6.139)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\frac{\partial H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)]}{\partial \mathbf{x}^*(t)} = -\mathbf{A}'\mathbf{p}^*(t) \quad (6.140)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{x}^*(0) = \xi; \quad \mathbf{x}^*(T^*) = \mathbf{0}; \quad (6.141)$$

б) соотношение [см. уравнения (5.400) и (6.138)]

$$\begin{aligned} 1 + \langle \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{B}'\mathbf{p}^*(t) \rangle &\leq \\ &\leq 1 + \langle \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{B}'\mathbf{p}^*(t) \rangle \end{aligned} \quad (6.142)$$

выполняется для всех допустимых управлений  $\mathbf{u}(t)$  при  $t \in [0, T^*]$ . Уравнение (6.142), в свою очередь, дает соотношение

$$\mathbf{u}^*(t) = -\text{SIGN}\{q^*(t)\} = -\text{SIGN}\{\mathbf{B}'\mathbf{p}^*(t)\}, \quad (6.143)$$

где  $q^*(t) = \mathbf{B}'\mathbf{p}^*(t)$ .

При помощи обозначений (6.131) уравнение (6.143) можно записать в выражении через компоненты:

$$\begin{aligned} u_j^*(t) &= -\text{sign}\{q_j^*(t)\} = -\text{sign}\{\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle\}, \\ j &= 1, 2, \dots, r; \end{aligned} \quad (6.144)$$

в) для всех  $t \in [0, T^*]$  имеет место соотношение [см. уравнения (5.401) и (6.138)]

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] = 1 + \langle \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{B}'\mathbf{p}^*(t) \rangle = 0. \quad (6.145)$$

В оставшейся части параграфа мы исследуем свойства оптимального по быстродействию управления (такие, как единственность) на основе необходимых условий теоремы 6.4.

Рассмотрим дифференциальное уравнение относительно дополнительной переменной  $\mathbf{p}^*(t)$ :

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\mathbf{A}'\mathbf{p}^*(t). \quad (6.146)$$

Отметим, что уравнение (6.146) однородное, с постоянными параметрами, сопряжено<sup>1</sup> с уравнением (6.139) и не зависит от  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{u}^*(t)$ .

Необходимые условия теоремы 6.4 не содержат дополнительной информации ни относительно начального значения дополнительной переменной  $\mathbf{p}^*(0)$ , ни относительно конечного значения  $\mathbf{p}^*(T^*)$ . Тем не менее, мы можем установить некоторые свойства  $\mathbf{p}^*(t)$  из уравнения (6.145) при помощи следующей леммы.

**Лемма 6.4.** Дополнительная переменная  $\mathbf{p}^*(t)$  должна быть ненулевым вектором:

$$\mathbf{p}^*(t) \neq \mathbf{0} \text{ для } t \in [0, T^*]. \quad (6.147)$$

**Доказательство.** Предположим, что  $\mathbf{p}^*(t) = \mathbf{0}$ . Тогда подстановка  $\mathbf{p}^*(t) = \mathbf{0}$  в уравнение (6.145) приводит к противоречию:  $1 = 0$ , а следовательно,

$$\mathbf{p}^*(t) \neq \mathbf{0}.$$

Так как уравнение (6.145) должно удовлетворяться для  $t \in [0, T^*]$ , то можно получить следующие соотношения:

$$\text{а) } t = 0, \quad 1 + \langle \mathbf{A}\xi, \mathbf{p}^*(0) \rangle + \langle \mathbf{u}^*(0), \mathbf{B}'\mathbf{p}^*(0) \rangle = 0; \quad (6.148)$$

$$\text{б) } t = T^*, \quad 1 + \langle \mathbf{u}^*(T^*), \mathbf{B}'\mathbf{p}^*(T^*) \rangle = 0. \quad (6.149)$$

Мы не можем, однако, решить уравнения (6.148) и (6.149) ни для  $\mathbf{p}^*(0)$ , ни для  $\mathbf{p}^*(T^*)$ .

Условимся обозначать неизвестное ненулевое начальное значение дополнительной переменной через  $\boldsymbol{\pi}$ :

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}^*(0); \quad \boldsymbol{\pi} \neq \mathbf{0}. \quad (6.150)^2$$

Решение дифференциального уравнения (6.146) тогда запишется в виде

$$\mathbf{p}^*(t) = e^{-\mathbf{A}'t}\boldsymbol{\pi}. \quad (6.151)$$

Если подставить выражение (6.151) в соотношения (6.143) и (6.144), то получим

$$\mathbf{u}^*(t) = -\text{SIGN}\{\mathbf{B}'e^{-\mathbf{A}'t}\boldsymbol{\pi}\}, \quad (6.152)$$

и, следовательно,

$$u_j^*(t) = -\text{sign}\{q_j^*(t)\} = -\text{sign}\{\langle \mathbf{b}_j, e^{-\mathbf{A}'t}\boldsymbol{\pi} \rangle\}, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (6.153)$$

<sup>1</sup> См. § 3.25.

<sup>2</sup> Вектор  $\boldsymbol{\pi}$  не следует путать с числом 3,1415 ...



Итак, мы показали, что из уравнения (6.155) следует (6.162), но уравнение (6.155) означает, что задача вырожденная. Поэтому, если задача вырожденная, то должно выполняться уравнение (6.162). Иначе говоря, уравнение (6.162) является необходимым условием вырожденности задачи 6.1в. Предлагаем читателю самостоятельно проверить, что уравнение (6.162) является также и достаточным условием вырожденности. Сформулируем теперь доказанную теорему.

**Теорема 6.5. Необходимые и достаточные условия вырожденности задачи 6.1в.** Задача об оптимальном управлении 6.1в вырождена в том и только в том случае, если для некоторого  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  матрица

$$G_j = [b_j | Ab_j | A^2 b_j | \dots | A^{n-1} b_j] \quad (6.163)$$

является вырожденной.

**Упражнение 6.5.** Докажите достаточность условий теоремы 6.5. Указание: используйте теорему 2.3 (Кейли—Гамильтона) и то обстоятельство, что  $G_j$  не зависит от  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$ ,  $p^*(t)$  и  $t$ .

Используя теорему 6.5, можно получить необходимые и достаточные условия нормальности задачи 6.1в. Прежде всего, если задача не вырождена и число переключений счетно, то ясно, что задача нормальна. Если  $\det G_j \neq 0$  для всех  $j = 1, 2, \dots, r$ , то задача не вырождена. Далее, если задача не вырождена, то в силу непрерывности и дифференцируемости элементов  $e^{-A't}$  можно доказать счетность множества времен переключения и получить следующую теорему.

**Теорема 6.6. Необходимые и достаточные условия нормальности задачи 6.1в.** Задача об оптимальном быстродействии 6.1в нормальна в том случае, если не вырождены все матрицы  $G_1, G_2, \dots, G_r$  размера  $n \times n$ :

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= [b_1 | Ab_1 | A^2 b_1 | \dots | A^{n-1} b_1]; \\ G_2 &= [b_2 | Ab_2 | A^2 b_2 | \dots | A^{n-1} b_2]; \\ &\dots \\ G_r &= [b_r | Ab_r | A^2 b_r | \dots | A^{n-1} b_r]. \end{aligned} \right\} \quad (6.164)$$

**Упражнение 6.6.** Докажите теорему 6.6.

Легко заметить, что необходимые и достаточные условия теоремы 6.6 для нормальности задачи об оптимальном управлении 6.1в идентичны необходимым и достаточным условиям нормальности<sup>1</sup> системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Таким образом, можно видеть, как понятие нормальности, развитое в гл. 4, возникает в задачах оптимизации.

Установим взаимосвязь между нормальной системой и нормальной задачей об оптимальном по быстродействию управлении. Проверим, является ли данная система нормальной, и установим понятия нормальности. Покажем, что если управляемая линейная система нормальна и если оптимальное по быстродействию управление  $u^*(t)$  существует, то такое управление единственно. Перед тем, как приступить к формулировке и доказательству теоремы, напомним, что в задаче 6.1в конечным состоянием является начало координат фазового пространства. Как установлено в упражнении 6.7, теорема может быть обобщена на случай, когда конечное состояние  $x^*(T^*) = \theta$  есть любое состояние в фазовом пространстве.

<sup>1</sup> См. § 4.21.

**Теорема 6.7. Единственность управления, оптимального по быстродействию.** Если в задаче 6.1в линейная система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

нормальна (или эквивалентно, когда нормальна задача об оптимальном управлении), то оптимальное по быстродействию управление единственно (если оно существует).

**Доказательство.** Предположим, что  $\mathbf{u}_1^*(t)$  и  $\mathbf{u}_2^*(t)$  — два различных оптимальных по быстродействию управления, переводящих начальное состояние  $\xi$  в  $\mathbf{0}$  за (одно и то же) минимальное время  $T^*$ . Пусть  $\mathbf{x}_1^*(t)$  и  $\mathbf{x}_2^*(t)$  — различные траектории, исходящие из  $\xi$ . Тогда

$$\mathbf{x}_1^*(t) = e^{At} \left[ \xi + \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}_1^*(\tau) d\tau \right]; \quad (6.165)$$

$$\mathbf{x}_2^*(t) = e^{At} \left[ \xi + \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}_2^*(\tau) d\tau \right]. \quad (6.166)$$

При  $t = T^*$  должно быть

$$\mathbf{x}_1^*(T^*) = \mathbf{x}_2^*(T^*) = \mathbf{0}. \quad (6.167)$$

Так как матрица  $e^{At}$  невырожденная, получим:

$$\int_0^{T^*} e^{-At} \mathbf{B}\mathbf{u}_1^*(t) dt = \int_0^{T^*} e^{-At} \mathbf{B}\mathbf{u}_2^*(t) dt. \quad (6.168)$$

Используем выражение (6.168) и необходимые условия, чтобы установить

$$\mathbf{u}_1^*(t) = \mathbf{u}_2^*(t) \quad \text{для } t \in [0, T^*]. \quad (6.169)$$

Так как оба управления  $\mathbf{u}_1^*(t)$  и  $\mathbf{u}_2^*(t)$  предполагаются оптимальными, то существуют дополнительные переменные  $\mathbf{p}_1^*(t) = e^{-A't} \boldsymbol{\pi}_1$  и  $\mathbf{p}_2^*(t) = e^{-A't} \boldsymbol{\pi}_2$ , соответствующие  $\mathbf{u}_1^*(t)$  и  $\mathbf{u}_2^*(t)$ , такие, что соотношения

$$\mathbf{u}_1^*(t) = -\text{SIGN} \{ \mathbf{B}' e^{-A't} \boldsymbol{\pi}_1 \}; \quad (6.170)$$

$$\mathbf{u}_2^*(t) = -\text{SIGN} \{ \mathbf{B}' e^{-A't} \boldsymbol{\pi}_2 \} \quad (6.171)$$

однозначно определяют (ввиду нормальности) управления  $\mathbf{u}_1^*(t)$  и  $\mathbf{u}_2^*(t)$ , за исключением, возможно, счетного множества моментов переключения. Это, в свою очередь [см. соотношение (6.142)], означает, что

$$\langle \mathbf{B}\mathbf{u}_1^*(t), \mathbf{p}_1^*(t) \rangle \leq \langle \mathbf{B}\mathbf{u}_2^*(t), \mathbf{p}_2^*(t) \rangle \quad (6.172)$$

или эквивалентное ему

$$\langle \mathbf{B}\mathbf{u}_1^*(t), e^{-A't} \boldsymbol{\pi}_1 \rangle \leq \langle \mathbf{B}\mathbf{u}_2^*(t), e^{-A't} \boldsymbol{\pi}_2 \rangle \quad (6.173)$$

есть равенство при  $\mathbf{u}_1^*(t) = \mathbf{u}_2^*(t)$ , или строгое неравенство при  $\mathbf{u}_1^*(t) \neq \mathbf{u}_2^*(t)$ .

Если выполняется равенство (6.168), то должно удовлетворяться и соотношение

$$\left\langle \boldsymbol{\pi}_1, \int_0^{T^*} e^{-At} \mathbf{B}\mathbf{u}_1^*(t) dt \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\pi}_1, \int_0^{T^*} e^{-At} \mathbf{B}\mathbf{u}_2^*(t) dt \right\rangle \quad (6.174)$$

или эквивалентное ему

$$\int_0^{T^*} \langle e^{-A't} \pi_1, \mathbf{B} \mathbf{u}_1^*(t) \rangle dt = \int_0^{T^*} \langle e^{-A't} \pi_1, \mathbf{B} \mathbf{u}_2^*(t) \rangle dt. \quad (6.175)$$

Из соотношений (6.175) и (6.173) непосредственно вытекает, что

$$\mathbf{u}_1^*(t) = \mathbf{u}_2^*(t) \quad \text{для } t \in [0, T^*].$$

Читатель должен отметить, что доказать единственность управления нам позволило предположение о нормальности задачи. Если бы задача не была нормальной, то могло бы быть

$$\langle \mathbf{B} \mathbf{u}_1^*(t), e^{-A't} \pi_1 \rangle = \langle \mathbf{B} \mathbf{u}_2^*(t), e^{-A't} \pi_1 \rangle$$

при  $\mathbf{u}_1^*(t) \neq \mathbf{u}_2^*(t)$ .

**Упражнение 6.7.** Рассмотрите задачу 6.1в в предположении, что область  $S$  — любое заданное состояние  $\theta$ , а не  $0$ . Покажите, что оптимальное по быстродействию управление единственно (если оно существует), когда задача нормальна.

Следующей мы докажем очень полезную теорему<sup>1</sup> относительно «числа переключений» управления, оптимального по быстродействию. Напомним, что если задача нормальна, то компоненты оптимального управления есть кусочно-постоянные функции времени. Как показано на рис. 6.4, управляющая переменная в моменты переключения перескакивает с  $+1$  на  $-1$  и с  $-1$  на  $+1$ . Следующая теорема дает верхнюю границу числа переключений для случая, когда собственные значения матрицы системы  $\mathbf{A}$  — действительные числа. Как мы увидим в гл. 7, эта теорема исключительно полезна при проектировании систем, оптимальных по быстродействию.

**Теорема 6.8. Число переключений.** Рассмотрим задачу 6.1в. Предположим, что система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (6.176)$$

нормальна и собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы системы  $\mathbf{A}$  — действительные числа. Пусть  $u_j^*(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  — компоненты (единственного) оптимального по быстродействию управления (если оно существует), а  $t_{vj}$  — моменты переключения (см. определение 6.4) кусочно-постоянных функций  $u_j^*(t)$ . Тогда максимальное число переключений  $\gamma_j$  не превосходит  $n - 1$  для всех  $j = 1, 2, \dots, r$ . Иначе говоря, каждое кусочно-постоянное управление  $u_j^*(t)$  может переключаться (с  $+1$  на  $-1$  и с  $-1$  на  $+1$ ) не более  $n - 1$  раз.

**Доказательство.** Докажем эту теорему при дополнительном предположении о том, что  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  различны. Если два или более значений одинаковы, то теорема останется справедливой, и ее доказательство можно найти в работе [179] (гл. 3, теорема 10).

Известно [см. соотношение (6.153)], что компоненты  $u_j^*(t)$  оптимального по быстродействию управления определяются уравнениями:

$$u_j^*(t) = -\text{sign} \{ \langle e^{-A't} \mathbf{b}_j, \boldsymbol{\pi} \rangle \}, \quad \boldsymbol{\pi} \neq \mathbf{0}; \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (6.177)$$

По определению моментов переключения  $t_{vj}$  имеем

$$\langle e^{-A't_{vj}} \mathbf{b}_j, \boldsymbol{\pi} \rangle = 0, \quad \gamma_j = 1, 2, \dots \quad (6.178)$$

<sup>1</sup> Эту теорему впервые доказал Беллман [19].



Пусть  $\Lambda$  — диагональная матрица собственных значений:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (6.179)$$

$\Lambda$  связана с матрицей системы  $A$  преобразованием подобия <sup>1</sup>:

$$\Lambda = P^{-1}AP. \quad (6.180)$$

Пусть теперь  $e^{\Lambda t}$  — диагональная матрица:

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (6.181)$$

Известно <sup>2</sup>, что матрицы  $e^{\Lambda t}$  и  $e^{At}$  связаны соотношением

$$e^{\Lambda t} = P^{-1}e^{At}P. \quad (6.182)$$

Из последнего выражения заключаем, что

$$e^{-At} = Pe^{-\Lambda t}P^{-1}, \quad (6.183)$$

и поэтому соотношение (6.177) сводится к уравнению

$$u_j^*(t) = -\text{sign} \{ \langle Pe^{-\Lambda t}P^{-1}b_j, \pi \rangle \} = -\text{sign} \left\{ \sum_{k=1}^n \rho_{kj} e^{-\lambda_k t} \right\}. \quad (6.184)$$

Постоянные  $\rho_{kj}$  зависят от элементов матриц  $P$  и  $P^{-1}$ , от компонент вектора  $b_j$  и от компонент вектора  $\pi$ . Очевидно, что число переключений равно числу нулей функции

$$g_j^*(t) = \sum_{k=1}^n \rho_{kj} e^{-\lambda_k t}. \quad (6.185)$$

Но эта функция есть сумма  $n$  экспонент. Нетрудно заметить <sup>3</sup>, что число нулей суммы  $n$  действительных экспоненциальных функций времени не превышает  $n - 1$ . Следовательно, теорема доказана.

Хотя теорема 6.8 была сформулирована для случая, когда в качестве области цели рассматривалось начало координат фазового пространства, из доказательства этой теоремы видно, что она применима и для случаев, когда область цели может и не быть началом координат.

Возникает естественный вопрос: можно ли получить какие-нибудь результаты для случая комплексных собственных значений  $A$ ? Если любые из собственных значений  $A$  комплексны <sup>4</sup>, то число переключений конечно, но зависит от расстояния между начальным и конечным значениями.

Для установления этого предположим, что два из собственных значений  $A$  равны:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + j\omega; \\ \lambda_2 &= \alpha - j\omega. \end{aligned} \right\} \quad (6.186)$$

Тогда аргумент функции  $\text{sign}$  в уравнении (6.177) будет содержать член вида

$$e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (6.187)$$

<sup>1</sup> См. § 2.10.

<sup>2</sup> См. § 3.21 и 3.22, в частности, уравнения (3.298), (3.319), (3.320), (3.322).

<sup>3</sup> Строгое доказательство содержит лемма в работе [179].

<sup>4</sup> Собственные значения должны быть, естественно, комплексно сопряженными парами, так как  $A$  — действительная матрица.

Верхней границы числа нулей синусоидальной функции найти нельзя, если не задана ее область определения (т. е. временной интервал).

Подытожим полученные результаты. Во-первых, мы сформулировали условия, при которых задача 6.1в вырождена (теорема 6.5) и нормальна (теорема 6.6). Мы нашли, что требование нормальности задачи 6.1в эквивалентно требованию, чтобы система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

была нормальна<sup>1</sup>.

Во-вторых, при помощи теоремы 6.7 мы обосновали единственность оптимального по быстродействию управления.

В-третьих, мы нашли верхнюю границу числа переключений (теорема 6.8) в предположении, что матрица  $A$  имеет действительные собственные значения.

Все полученные до сих пор результаты касались свойств управления, оптимального по быстродействию. Завершим этот параграф обсуждением свойств экстремальных управлений для задачи 6.1в.

Напомним, что экстремальное управление (см. определение 6.8) есть управление, удовлетворяющее всем необходимым условиям. В соответствии с постановкой задачи 6.1в и теоремой 6.4 сформулируем следующее определение.

**Определение 6.9.** Экстремальное управление для задачи 6.1в. Допустимое управление  $\hat{u}^0(t)$  называют экстремальным, если соответствующие ему траектории  $\hat{x}(t)$  и переменная  $\hat{p}(t)$  удовлетворяют соотношениям

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\hat{u}^0(t); \quad (6.188)$$

$$\dot{\hat{p}}(t) = -A'\hat{p}(t); \quad (6.189)$$

$$\hat{x}(0) = \xi, \quad \hat{x}(\hat{T}) = 0; \quad (6.190)$$

$$1 + \langle A\hat{x}(t), \hat{p}(t) \rangle + \langle \hat{u}^0(t), B'\hat{p}(t) \rangle \leq 1 + \langle A\hat{x}(t), \hat{p}(t) \rangle + \langle \hat{u}(t), B'\hat{p}(t) \rangle \quad (6.191)$$

для любых  $u(t) \in \Omega$  и  $t \in [0, \hat{T}]$ , причем

$$1 + \langle A\hat{x}(t), \hat{p}(t) \rangle + \langle \hat{u}^0(t), B'\hat{p}(t) \rangle = 0. \quad (6.192)$$

В § 6.4 отмечалось (см. замечание 6.8), что каждое экстремальное управление соответствует глобальному или локальному оптимальному управлению. Докажем исключительно полезную теорему, устанавливающую, что для нормальных систем существует только одно экстремальное управление, которое поэтому должно быть оптимальным по быстродействию.

**Теорема 6.9.** Единственность экстремальных управлений для задачи 6.1в.

Предположим, что  $\hat{u}_1^0(t)$ ,  $0 \leq t \leq \hat{T}_1$  и  $\hat{u}_2^0(t)$ ,  $0 \leq t \leq \hat{T}_2$  — два экстремальных управления для задачи 6.1в (см. определение 6.9). Если система  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  нормальна и оптимальное по быстродействию управление  $u^*(t)$  существует, то

$$\hat{T}_1 = \hat{T}_2 = T^* \quad (6.193)$$

и

$$\hat{u}_1^0(t) = \hat{u}_2^0(t) = u^*(t). \quad (6.194)$$

<sup>1</sup> См. § 4.21.

**Доказательство.** Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 6.7. Предположим сначала, что экстремальные управления  $\hat{\mathbf{u}}_1^0(t)$  и  $\hat{\mathbf{u}}_2^0(t)$  различны и

$$\hat{T}_1 > \hat{T}_2. \quad (6.195)$$

Экстремальные траектории  $\hat{\mathbf{x}}_1(t)$  и  $\hat{\mathbf{x}}_2(t)$  определяются соотношениями

$$\hat{\mathbf{x}}_1(t) = e^{At} \left[ \xi + \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_1^0(\tau) d\tau \right]; \quad (6.196)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2(t) = e^{At} \left[ \xi + \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_2^0(\tau) d\tau \right], \quad (6.197)$$

но из условия (6.190) имеем

$$\hat{\mathbf{x}}_1(\hat{T}_1) = \hat{\mathbf{x}}_2(\hat{T}_2) = 0, \quad (6.198)$$

и поэтому

$$\xi = - \int_0^{\hat{T}_1} e^{-At} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_1^0(t) dt = - \int_0^{\hat{T}_2} e^{-At} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_2^0(t) dt. \quad (6.199)$$

Управлению  $\hat{\mathbf{u}}_1^0(t)$  соответствует (экстремальная) дополнительная переменная  $\hat{\mathbf{p}}_1(t)$ :

$$\hat{\mathbf{p}}_1(t) = e^{-A't} \hat{\boldsymbol{\pi}}_1; \quad (6.200)$$

аналогично для  $\hat{\mathbf{u}}_2^0(t)$  имеем

$$\hat{\mathbf{p}}_2(t) = e^{-A't} \hat{\boldsymbol{\pi}}_2. \quad (6.201)$$

Образует скалярное произведение  $\langle \xi, \hat{\boldsymbol{\pi}}_1 \rangle$ :

$$\langle \xi, \hat{\boldsymbol{\pi}}_1 \rangle = - \left\langle \hat{\boldsymbol{\pi}}_1, \int_0^{\hat{T}_1} e^{-A't} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_1^0(t) dt \right\rangle = \left\langle \hat{\boldsymbol{\pi}}_1, \int_0^{\hat{T}_1} e^{-A't} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_2^0(t) dt \right\rangle. \quad (6.202)$$

Так как  $\hat{\boldsymbol{\pi}}_1$  — постоянный вектор, получим

$$\int_0^{\hat{T}_1} - \langle e^{-A't} \hat{\boldsymbol{\pi}}_1, \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_1^0(t) \rangle dt = \int_0^{\hat{T}_2} - \langle e^{-A't} \hat{\boldsymbol{\pi}}_1, \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_2^0(t) \rangle dt. \quad (6.203)$$

Учитывая (6.200), имеем

$$\int_0^{\hat{T}_1} - \langle \hat{\mathbf{p}}_1(t), \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_1^0(t) \rangle dt = \int_0^{\hat{T}_2} - \langle \hat{\mathbf{p}}_1(t), \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_2^0(t) \rangle dt. \quad (6.204)$$

Так как  $\hat{\mathbf{u}}_1^0(t)$  — экстремальное управление, из уравнения (6.191) найдем соотношение

$$\langle \hat{\mathbf{p}}_1(t), \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_1^0(t) \rangle \leq \langle \hat{\mathbf{p}}_1(t), \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_2^0(t) \rangle \quad t \in [0, \hat{T}_2]. \quad (6.205)$$

Так как система нормальна, последнее соотношение будет равенством при  $\hat{\mathbf{u}}_1^0(t) = \hat{\mathbf{u}}_2^0(t)$  и строгим неравенством при  $\hat{\mathbf{u}}_1^0(t) \neq \hat{\mathbf{u}}_2^0(t)$ . Далее, поскольку система нормальна, соотношение

$$\hat{\mathbf{u}}_1^0(t) = -\text{SIGN}\{\mathbf{B}'\hat{\mathbf{p}}_1(t)\}, \quad t \in [0, \hat{T}_1] \quad (6.206)$$

однозначно определяет  $\hat{\mathbf{u}}_1^0(t)$ , за исключением счетного множества моментов переключения. Из соотношения (6.206) получим

$$\langle \hat{\mathbf{p}}_1(t), \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}_1^0(t) \rangle \leq 0, \quad t \in [0, \hat{T}_1]. \quad (6.207)$$

Неравенство (6.207) является строгим, если хотя бы одна из компонент  $\hat{\mathbf{u}}_1^0(t)$  равна  $+1$  или  $-1$ . Так как  $\hat{T}_2 < \hat{T}_1$ , можно заметить, что допущение о нормальности предполагает справедливость неравенств

$$\int_0^{\hat{T}_1} -\langle \hat{\mathbf{p}}_1(t), \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}_1^0(t) \rangle dt > \int_0^{\hat{T}_2} -\langle \hat{\mathbf{p}}_1(t), \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}_1^0(t) \rangle dt > 0 \quad (6.208)$$

и

$$\int_0^{\hat{T}_2} -\langle \hat{\mathbf{p}}_1(t), \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}_1^0(t) \rangle dt > \int_0^{\hat{T}_2} -\langle \hat{\mathbf{p}}_1(t), \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}_2^0(t) \rangle dt. \quad (6.209)$$

Из неравенств (6.208) и (6.209) для различных  $\hat{\mathbf{u}}_1^0(t)$  и  $\hat{\mathbf{u}}_2^0(t)$  получим соотношение

$$\int_0^{\hat{T}_1} -\langle \hat{\mathbf{p}}_1(t), \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}_1^0(t) \rangle dt > \int_0^{\hat{T}_2} -\langle \hat{\mathbf{p}}_1(t), \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}_2^0(t) \rangle dt. \quad (6.210)$$

Но равенство (6.204) и неравенство (6.210) противоречат друг другу. Следовательно,  $\hat{\mathbf{u}}_1^0(t)$  и  $\hat{\mathbf{u}}_2^0(t)$  не могут быть различны, и поэтому  $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$  и  $\hat{\mathbf{u}}_1^0(t) = \hat{\mathbf{u}}_2^0(t)$ . Так как экстремальное управление единственно и мы предполагали, что оптимальное по быстродействию управление  $\mathbf{u}^*(t)$  существует (оно единственно в силу нормальности), то должны удовлетворяться условия (6.193) и (6.194), и теорема доказана. Эта теорема устанавливает, что существует только одно оптимальное управление.

Мы доказали теорему, считая, что конечной областью является начало координат фазового пространства. К сожалению, теорема не справедлива, если начало координат не является конечным состоянием системы. Иначе говоря, если мы хотим перевести систему из начального состояния  $\xi$  в конечное состояние  $\theta \neq \mathbf{0}$  за минимальное время, то может оказаться больше одного экстремального управления. Предлагаем читателю самостоятельно найти причину этого, проделав следующее упражнение.

**Упражнение 6.8.** Попробуйте воспроизвести доказательство теоремы 6.9 для случая, когда конечное состояние  $\theta \neq \mathbf{0}$ . Точно укажите место в логических построениях, где вы зашли в тупик. Не кажется ли вам, что для заданного конечного состояния  $\theta$  существует множество начальных состояний таких, для которых экстремальные управления единственны? Если да, то попытайтесь найти это множество начальных состояний.

Продвинемся несколько дальше в некоторых особенностях доказательства теоремы 6.9. Заметим, что мы не использовали то обстоятельство, что гамильтониан вдоль оптимальной траектории должен быть равен нулю. Таким образом, мы смогли доказать теорему 6.9, опираясь лишь на то, что экстремальное управление минимизирует гамильтониан. По этой

причине в гл. 7 редко будем использовать необходимое условие  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t)] = 0$ .

В следующих четырех параграфах мы получим дополнительные результаты относительно задачи 6.1в. В частности, в § 6.6 рассмотрим структуру разомкнутых и замкнутых систем, оптимальных по быстродействию, а в § 6.7 введем понятие минимальных изохрон и вновь обратимся к геометрическим свойствам управления, оптимального по быстродействию. В § 6.8 без точного доказательства обсудим проблему существования управления, оптимального по быстродействию, и рассмотрим теорему существования, наиболее полезную с инженерной точки зрения. В § 6.9 приведем уравнения Гамильтона—Якоби для задачи об оптимальном быстродействии и обсудим трудности, связанные с его решением.

### 6.6. СТРУКТУРА ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА И ПРОБЛЕМА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В предыдущем параграфе были установлены наиболее общие результаты, полученные в области задач об оптимальном по быстродействию регуляторе. В этом параграфе будет рассмотрен итеративный процесс, который может быть использован для определения управления, оптимального по быстродействию. Эта методика аналогична уже рассмотренной в шаге 3 в § 6.3. Далее отметим трудности, связанные с этим итеративным методом, и приведем библиографию, где описываются различные итерационные способы. Мы не будем глубоко вдаваться в итерационные способы решения, так как считаем, что они находятся вне пределов данной книги, имеющей вводный характер. Наконец, определим задачу обратной связи и тем самым подготовимся к задачам, которые будут решены в гл. 7.

Рассматривая задачу 6.1в, будем считать, что система  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  нормальна и оптимальное по быстродействию управление существует (оно единственно согласно теореме 6.7). Ниже по шагам описан итерационный процесс, которому можно следовать при решении задачи 6.1в.

Дана нормальная линейная система с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}. \quad (6.211)$$

Заданы ограничения на управления:

$$|u_j(t)| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, r \text{ для любого } t. \quad (6.212)$$

Для нахождения оптимального управления, переводящего  $\boldsymbol{\xi}$  в  $\mathbf{0}$ , можно поступать следующим образом:

**Шаг 1.** Выбрать наугад начальное значение  $\boldsymbol{\pi}$  такое, чтобы

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\pi} \rangle \geq 0. \quad (6.213)$$

**Шаг 2.** Вычислить  $\mathbf{p}(t)$  по соотношению

$$\mathbf{p}(t) = e^{-\mathbf{A}^T t} \boldsymbol{\pi}. \quad (6.214)$$

**Шаг 3.** Вычислить управляющие переменные  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  по уравнению

$$u_j(t) = -\text{sign} \{ \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{p}(t) \rangle \}, \quad (6.215)$$

где  $\mathbf{b}_j$  — векторы-столбцы матрицы  $\mathbf{B}$ .

**Шаг 4.** Решить уравнение (6.211) для начального состояния  $\boldsymbol{\xi}$  и управления, вычисленного в шаге 3. Так как  $\boldsymbol{\pi}$  однозначно определяет

управляющий вектор, а  $\xi$  однозначно определяет траекторию (при заданном управлении), то состояние в каждый момент времени является функцией как  $\xi$ , так и  $\pi$ . Чтобы подчеркнуть эту зависимость, обозначим решение уравнения (6.211) через

$$x_{\xi, \pi}(t). \quad (6.216)$$

**Шаг 5.** Просчитать  $x_{\xi, \pi}(t)$ . Если существует  $T$  такое, что

$$x_{\xi, \pi}(T) = 0, \quad (6.217)$$

то управление, найденное в шаге 3, экстремально (см. определение 7.9) и по теореме 6.9 оптимально по быстродействию. Если условие (6.217) не удовлетворяется, то нужно изменить  $\pi$  в шаге 1 и так повторять весь процесс, пока не будет удовлетворяться это условие. Последний процесс — итеративный, так как для того, чтобы найти оптимальное по быстродействию управление, нужно начальное значение  $\pi$  изменять

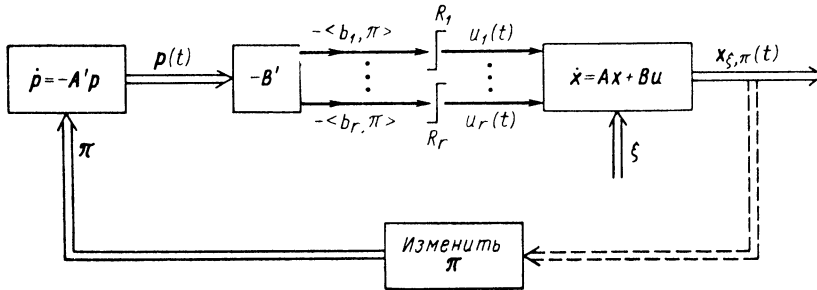


Рис. 6.8. «Разомкнутая» структура задачи об оптимальном быстродействии

много раз. Первое и последующие значения  $\pi$  должны быть такими, чтобы выполнялось соотношение (6.213). Это соотношение непосредственно вытекает из выражений (6.202); (6.203) и (6.208).

Весь порядок расчета от шага 1 до шага 5 изображен на рис. 6.8 в виде блок-диаграммы. Двойные стрелки изображают «ход» векторных сигналов, одиночные — скалярных. Символ «реле» использован для обозначения операции «sign»<sup>1</sup>. Выходами «реле»  $R_1, R_2, \dots, R_r$  являются управляющие переменные  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ . Блок, обозначенный «изменить  $\pi$ », «прогоняет»  $x_{\xi, \pi}(t)$  и после «достаточного» времени решает, следует ли вводить в систему новое значение  $\pi$ . При этом возникают два вопроса:

1. Как долго следует ждать, прежде чем изменить  $\pi$ ?
2. Как выбрать новое значение  $\pi$ , основываясь на значениях, которые уже использовались ранее и величину «промаха» между  $x_{\xi, \pi}(t)$  и 0?

Ответы на эти вопросы являются предметом многих исследований<sup>2</sup>, которые основаны на применении итерационных методов; последних касаться не будем, так как они выходят за рамки данной книги. Заметим только, что эти способы сложны и требуют использования ЦВМ, обладающих большой памятью и высоким быстродействием.

Рассмотренный способ есть способ управления без обратной связи. Иными словами, для заданного начального состояния  $\xi$  мы ищем оптимальное по быстродействию управление  $u^*(t)$ , которое зависит от исходного состояния  $\xi$  и времени  $t$ . Это управление не зависит от текущих

<sup>1</sup> Идеализированное поляризованное реле есть инженерная реализация функции sign. Этот символ и его смысл будут одинаковыми на протяжении всей книги.

<sup>2</sup> См. [170], [16], [95], [57], [175], [123], [83] и [60].

значений  $\mathbf{x}(t)$  для  $t > 0$ . Недостатки метода управления без обратной связи хорошо знакомы инженеру. Дополнительная трудность, связанная с таким типом вычислений, состоит в следующем. Предположим, что собственные значения матрицы системы  $\mathbf{A}$  имеют отрицательные вещественные части, т. е. система устойчива. Тогда сопряженная динамическая система  $\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{A}'\mathbf{p}(t)$  будет неустойчива, потому что собственные значения матрицы  $-\mathbf{A}'$  имеют положительные вещественные части. Таким образом, малая «ошибка» в начальном значении дополнительной переменной  $\mathbf{p}$  будет «усиливаться» с ростом времени и может вызвать значительные отклонения вычисленного управления от оптимального<sup>1</sup>. Поэтому полезно исследовать, можно ли получить оптимальное по быстродействию управление  $\mathbf{u}^*(t)$  (в момент времени  $t$ ) как функцию состояния  $\mathbf{x}^*(t)$  (в тот же момент  $t$ ). Если это возможно, то мы получим оптимальную систему с обратной связью, обладающую свойством: в любой момент времени управление полностью определяется ее состоянием.

Существует «функция переключения»  $\mathbf{h}[\mathbf{x}^*(t)]$  такая, что оптимальное по быстродействию управление  $\mathbf{u}^*(t)$  выражается формулой

$$\mathbf{u}^*(t) = -\text{SIGN} \{ \mathbf{h}[\mathbf{x}^*(t)] \}. \quad (6.218)$$

Уравнение (6.218) часто называют законом управления с обратной связью. Далее приводится эвристическое подтверждение уравнения (6.218).

Пусть  $\mathbf{x}^*(t)$  — состояние на оптимальной траектории из  $\xi$  в  $\mathbf{0}$ . Обозначим через  $\mathbf{p}^*(t)$  величину дополнительной переменной в тот же момент времени. Очевидно, что удовлетворяется соотношение

$$\mathbf{x}^*(T^*) = \mathbf{0} = e^{\mathbf{A}(T^*-t)} \left[ \mathbf{x}^*(t) - \int_t^{T^*} e^{-\mathbf{A}(\tau-t)} \mathbf{B} \text{SIGN} \{ \mathbf{B}'\mathbf{p}^*(\tau) \} d\tau \right]. \quad (6.219)$$

Так как матрица  $e^{\mathbf{A}(T^*-t)}$  невырожденная, то имеем

$$\mathbf{x}^*(t) = \int_t^{T^*} e^{-\mathbf{A}(\tau-t)} \mathbf{B} \text{SIGN} \{ \mathbf{B}'\mathbf{p}^*(\tau) \} d\tau. \quad (6.220)$$

Но

$$\mathbf{p}^*(\tau) = e^{-\mathbf{A}'(\tau-t)} \mathbf{p}^*(t), \quad \tau \geq t. \quad (6.221)$$

Время  $T^* - t$ , требующееся для перевода  $\mathbf{x}^*(t)$  в  $\mathbf{0}$ , должно быть функцией от  $\mathbf{x}^*(t)$ , т. е.

$$T^* = t - \alpha[\mathbf{x}^*(t)]; \quad (6.222)$$

на основании (6.222) и (6.221) приходим к выводу, что выражение (6.220) определяет соотношение между  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$ , которое можно записать в виде

$$\mathbf{p}^*(t) = \mathbf{p}^*[\mathbf{x}^*(t)]. \quad (6.223)^2$$

Так как  $\mathbf{u}^*(t) = -\text{SIGN} \{ \mathbf{B}'\mathbf{p}^*(t) \}$ , из формул (6.223) и (6.218) получим

$$\mathbf{h}[\mathbf{x}^*(t)] = \mathbf{B}'\mathbf{p}^*[\mathbf{x}^*(t)]. \quad (6.224)$$

<sup>1</sup> Если сопряженная система моделируется на аналоговой машине, то дополнительные ошибки будут вызываться насыщением усилителей и усилением собственных шумов и дрейфа.

<sup>2</sup> Это соотношение может и не быть однозначным. Иначе говоря, данному  $\mathbf{x}^*(t)$  могут соответствовать более чем одна  $\mathbf{p}^*(t)$ , дающие оптимальное управление (см. [123]).

Итак, существование функции переключения доказано. Все задачи, которые будут рассмотрены в гл. 7, связаны с отысканием этой функции переключения. Как мы увидим дальше, функция переключения будет определяться с помощью «гиперплоскостей переключения» в пространстве состояний (или фазовых координат) системы.

Блок-схема оптимальной системы с обратной связью показана на рис. 6.9. Функции  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  измеряются в каждый момент времени и вводятся в подсистему, обозначенную «ВМ» («вычислительная машина»). Выходами ВМ являются функции переключения  $h_1[\mathbf{x}(t)], h_2[\mathbf{x}(t)], \dots, h_r[\mathbf{x}(t)]$ , которые затем подаются на идеальные реле  $R_1, R_2, \dots, R_r$  для получения управляющих переменных, оптимальных по быстродействию. Получение функций  $h_1[\mathbf{x}(t)], \dots, h_r[\mathbf{x}(t)]$  и их инженерная реализация является основой задачи об оптимальном по

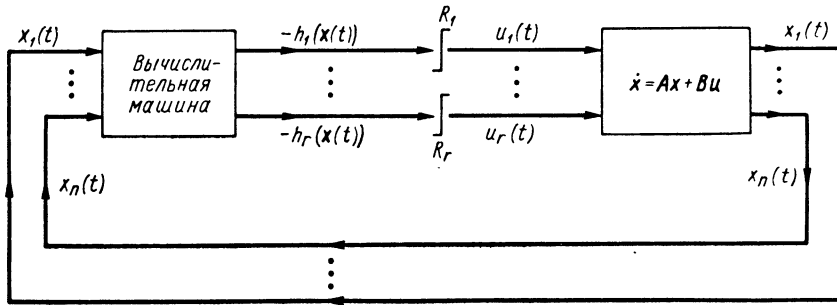


Рис. 6.9. Структура оптимальной по быстродействию системы управления с обратной связью

быстродействию управлению. Изложение некоторых способов отыскания функций переключения и описание типов нелинейных функций, необходимых для технического осуществления оптимальных по быстродействию систем, содержит гл. 7 данной книги.

## 6.7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УПРАВЛЕНИЯ, ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

В § 6.2 мы обсуждали геометрическую природу задачи об оптимальном по быстродействию управлении при помощи областей достижимых состояний. Далее мы перешли от геометрических соображений к аналитическим результатам, полученным из необходимых условий, даваемых принципом минимума. В этом параграфе попытаемся дать геометрическую интерпретацию необходимых условий. Ограничим наше обсуждение задачей 6.1в и будем предполагать, что задача нормальна в соответствии с определением 6.4. Заметим также, что материал настоящего параграфа представляет собой конкретизацию замечаний § 5.21.

Рассмотрим поверхность минимального времени, и будем трактовать оптимальное по быстродействию управление как управление, заставляющее систему двигаться по поверхности минимального времени в направлении наискорейшего убывания. После этого мы окажемся в состоянии установить соответствие между дополнительной переменной и градиентом поверхности минимального времени. Наши рассуждения по своей природе будут эвристическими, так как мы прежде всего заинтересованы в том, чтобы дать геометрическую интерпретацию необходимых условий.



Пусть  $\mathbf{x}$  — состояние в пространстве фазовых координат. Предположим, что существует оптимальное по быстродействию управление (единственное), переводящее  $\mathbf{x}$  в  $\mathbf{0}$ . Обозначим минимальное время, требующееся для перевода  $\mathbf{x}$  в  $\mathbf{0}$ , через

$$T^*(\mathbf{x}). \quad (6.225)$$

Покажем, что минимальное время  $T^*(\mathbf{x})$  зависит только от состояния  $\mathbf{x}$  и не зависит явно от времени, т. е.

$$\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial t} = 0. \quad (6.226)^1$$

Это утверждение справедливо, так как инвариантность во времени системы  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  предполагает, что минимальное время может быть только функцией состояния. Иначе говоря, если  $\mathbf{x}$  есть состояние системы при  $t = 0$  и минимальное время, требующееся для перевода  $\mathbf{x}$  в  $\mathbf{0}$ , есть  $T^*(\mathbf{x})$ , а  $\mathbf{x}$  — состояние системы при  $t = t_0$ , то оптимальное управление переведет  $\mathbf{x}$  в  $\mathbf{0}$  в момент времени  $t_0 + T^*(\mathbf{x})$  [см. уравнения (4.266) и (4.267)].

Поскольку время, требующееся для перевода системы из  $\mathbf{0}$  в  $\mathbf{0}$ , равно нулю и мы рассматриваем решения только для положительных времен, то очевидно, что  $T^*(\mathbf{x})$  обладает свойствами:

$$T^*(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{если } \mathbf{x} = \mathbf{0}; \quad (6.227)$$

$$T^*(\mathbf{x}) > 0, \quad \text{если } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (6.228)$$

В дальнейшем для градиента функции  $T^*(\mathbf{x})$  по  $\mathbf{x}$  будем использовать обозначение

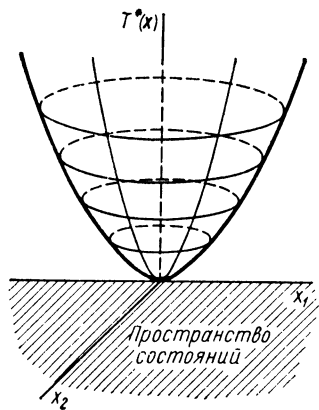


Рис. 6.10. Поверхность минимальной стоимости  $T^*(\mathbf{x})$  (минимального времени) в функции от  $\mathbf{x}$

$$\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (6.229)$$

Рассмотрим далее некоторые свойства функции  $T^*(\mathbf{x})$ . Полезно считать  $T^*(\mathbf{x})$  поверхностью минимального времени задачи 6.1в и представлять ее наглядно так, как это показано на рис. 6.10.

Определим понятие минимальной изохроны<sup>2</sup>.

**Определение 6.10. Минимальные изохроны.** Пусть  $S(\tau)$  — множество состояний, из которых можно перейти в  $\mathbf{0}$  за одно и то же минимальное время  $\tau$ ,  $\tau \geq 0$ . Будем называть  $S(\tau)$   $\tau$ -минимальной изохроной. Эта функция  $S(\tau)$  определяется соотношением

$$S(\tau) = \{\mathbf{x} : T^*(\mathbf{x}) = \tau; \tau \geq 0\}. \quad (6.230)$$

<sup>1</sup> Авторы столкнулись с тем, что это уравнение сбивает с толку слушателей, которые читают его как «частная производная времени  $T$  по времени равна нулю» и которые не понимают смысла частной производной. Мы надеемся, что читатель, изучивший § 3.12, не впадет в аналогичное заблуждение.

<sup>2</sup> Понятие минимальной изохроны будет использоваться в гл. 7, 8 и 10.

Допустим, что  $\hat{S}(\tau)$  обозначает множество состояний, из которых можно перейти в начало координат при помощи оптимального по быстродействию управления за время, меньшее или равное  $\tau$ :

$$\hat{S}(\tau) = \{x : T^*(x) \leq \tau; \tau \geq 0\}. \quad (6.231)$$

Из уравнений (6.230) и (6.231) заключаем, что  $\hat{S}(\tau)$  есть подмножество из  $S(\tau)$ . Можно убедиться<sup>1</sup>, что  $S(\tau)$  является границей  $\hat{S}(\tau)$  и что  $\hat{S}(\tau)$  замкнуто.

Докажем, что множество  $\hat{S}(\tau)$  строго выпуклое. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — два различных состояния на  $\tau$ -минимальной изохроне:

$$x_1 \in S(\tau), \quad x_2 \in S(\tau). \quad (6.232)$$

В силу нормальности мы знаем, что существуют единственные оптимальные управления:  $u_1^*(t) = -\text{SIGN}\{B'p_1^*(t)\}$ , переводящее  $x_1$  в  $0$ , и  $u_2^*(t) = -\text{SIGN}\{B'p_2^*(t)\}$  [отличное от  $u_1^*(t)$ ], переводящее  $x_2$  в  $0$ . Таким образом, должны быть справедливы уравнения

$$x_1 = \int_0^\tau e^{-At} B \text{SIGN}\{B'p_1^*(t)\} dt; \quad (6.233)$$

$$x_2 = \int_0^\tau e^{-At} B \text{SIGN}\{B'p_2^*(t)\} dt. \quad (6.234)$$

Предположим, что  $x$  — состояние на (открытом) отрезке, соединяющем  $x_1$  и  $x_2$ , как показано на рис. 6.11. Выберем

$$0 < \alpha < 1 \quad (6.235)$$

и рассмотрим состояние  $x$ , определенное соотношением

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (6.236)$$

Из соотношений (6.236), (6.234) и (6.233) получим

$$x = \int_0^\tau e^{-At} B [\alpha \text{SIGN}\{B'p_1^*(t)\} + (1 - \alpha) \text{SIGN}\{B'p_2^*(t)\}] dt. \quad (6.237)$$

Пусть теперь  $u^*(t) = -\text{SIGN}\{B'p^*(t)\}$  — оптимальное по быстродействию управление, переводящее  $x$  в  $0$ , и  $\tau'$  — соответствующее минимальное время (т. е.  $T^*(x) = \tau'$ ). Покажем, что

$$\tau' < \tau. \quad (6.238)$$

Чтобы доказать это, заметим

$$x = \int_0^{\tau'} e^{-At} B \text{SIGN}\{B'p^*(t)\} dt. \quad (6.239)$$

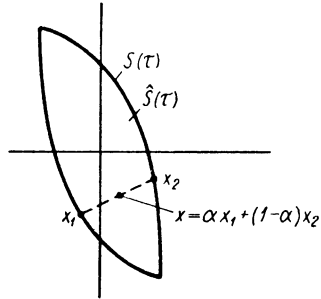


Рис. 6.11. Иллюстрация выпуклости  $\hat{S}(\tau)$

<sup>1</sup> Строгое доказательство, см. в работе [201].

Из выражения (6.237) следует, что управление

$$\alpha \mathbf{u}_1^*(t) + (1 - \alpha) \mathbf{u}_2^*(t) = \alpha \text{SIGN} \{ \mathbf{B}' \mathbf{p}_1^*(t) \} + (1 - \alpha) \text{SIGN} \{ \mathbf{B}' \mathbf{p}_2^*(t) \} \quad (6.240)$$

переводит  $\mathbf{x}$  в  $\mathbf{0}$ . Однако это управление не является оптимальным по быстродействию, поскольку оно не является вектором, компоненты которого есть функции типа sign. Для доказательства этого предположим, что в некоторый момент времени  $\hat{t}$  мы имеем<sup>1</sup>

$$\mathbf{u}_1^*(\hat{t}) = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2^*(\hat{t}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (6.241)$$

Отсюда можно получить

$$\alpha \mathbf{u}_1^*(\hat{t}) + (1 - \alpha) \mathbf{u}_2^*(\hat{t}) = \begin{bmatrix} 2\alpha - 1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (6.242)$$

Но так как  $0 < \alpha < 1$ , имеем неравенство

$$-1 < 2\alpha - 1 < +1, \quad (6.243)$$

и поэтому управление (6.242) не может быть оптимальным по быстродействию (почему?). Если это управление не оптимально и переводит  $\mathbf{x}$  в  $\mathbf{0}$  за время  $\tau$ , то оптимальное управление потребует, чтобы  $\tau' < \tau$ . Таким образом, утверждение (6.238) доказано. Мы убедились, что  $S(\tau)$  есть граница  $\hat{S}(\tau)$ . Следовательно, состояние  $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  является элементом внутренней части  $\hat{S}(\tau)$ , и поэтому множество  $\hat{S}(\tau)$  строго выпукло.

Подытожим наши рассуждения следующей леммой.

**Лемма 6.5.**  $\tau$ -минимальная изохрона  $S(\tau)$  есть граница замкнутого и строго выпуклого множества  $\hat{S}(\tau)$ .

**Упражнение 6.9.** Докажите, что функция  $T^*(\mathbf{x})$  для задачи 6.1в непрерывна.

**Упражнение 6.10.** Докажите, что  $\hat{S}(\tau)$  замкнуто и  $S(\tau)$  есть граница  $\hat{S}(\tau)$ .

Отметим, что  $\tau$ -минимальные изохроны «растут» с увеличением  $\tau$ . Предположим, что  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — два произвольных времени, причем

$$0 < \tau_1 < \tau_2. \quad (6.244)$$

Тогда можно показать, что

$$\mathbf{0} \subset \hat{S}(\tau_1) \subset \hat{S}(\tau_2). \quad (6.245)$$

**Упражнение 6.11.** Докажите соотношение (6.245).

<sup>1</sup> Такой момент времени  $\hat{t}$  существует, потому что управления  $\mathbf{u}_1^*(t)$  и  $\mathbf{u}_2^*(t)$ , по предположению, различны.

Соотношение включения (6.245) означает, что минимальные изохроны увеличивают свое «расстояние» от начала координат с увеличением времени, причем это возрастание является «гладким». Для пояснения этого положения дадим эвристическое геометрическое доказательство.

Предположим, что  $\xi$  — начальное состояние при  $t = 0$ , и будем считать, что для перевода  $\xi$  в  $0$  при помощи оптимального управления  $u^*(t)$  требуется время  $0 \leq t \leq \tau$ . Таким образом,  $\xi \in S(\tau)$ . На рис. 6.12 показана оптимальная траектория  $x^*$ , соединяющая  $\xi$  с  $0$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  — малое положительное время. Рассмотрим состояние  $x^*(\varepsilon)$  при  $t = \varepsilon$ .

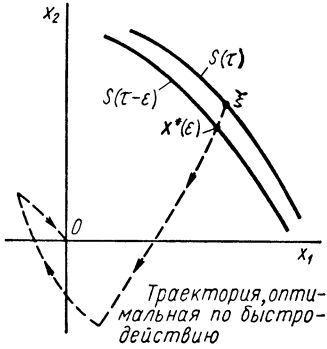


Рис. 6.12. Минимальные изохроны  $S(\tau)$  и  $S(\tau - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Оптимальная по быстрдействию траектория из  $x^*(\varepsilon)$  к  $0$  является частью оптимальной по быстрдействию траектории из  $\xi$  к  $0$

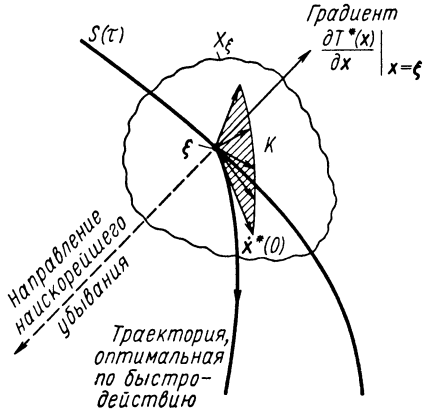


Рис. 6.13. Оптимальное по быстрдействию управление  $u^*(0)$  дает вектор  $x^*(0)$ , который направлен, насколько можно точнее, в направлении наибыстрейшего убывания

По принципу оптимальности<sup>1</sup> управление  $u^*(t)$  для  $\varepsilon \leq t \leq \tau$  есть оптимальное управление, переводящее  $x^*(\varepsilon)$  в  $0$  за минимальное время  $\tau - \varepsilon$ . Таким образом,  $x^*(\varepsilon) \in S(\tau - \varepsilon)$ . Так как фазовая траектория непрерывна, то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  состояние  $x^*(\varepsilon)$  стремится к  $\xi$ . Если повторить этот эксперимент для всех  $\xi \in S(\tau)$ , то можно обнаружить, что изохроны  $S(\tau)$  и  $S(\tau - \varepsilon)$  «приближаются друг к другу все ближе» при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Обсудим теперь геометрические свойства оптимального по быстрдействию управления  $u^*(t)$ . Предположим, что  $\xi$  — начальное состояние, причем  $\xi \in S(\tau)$ . На рис. 6.13 показано, что существует область  $X_\xi$  фазового пространства, где градиент  $\frac{\partial T^*(x)}{\partial x}$  определен для всех  $x \in X_\xi$ . Другими словами, компоненты вектора-градиента

$$\nabla T^*(x) = \frac{\partial T^*(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^*(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial T^*(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (6.246)$$

являются вполне определенными функциями для всех  $x \in X_\xi$ . Градиент  $T^*$  при  $x = \xi$ , т. е. вектор  $\frac{\partial T^*(x)}{\partial x} \Big|_{x=\xi}$  определяет направление наиболее быстрого изменения функции  $T^*(x)$  в точке  $\xi$ . Как показано на рис. 6.13,

<sup>1</sup> См. § 5.16 и 5.19.

градиент нормален к кривой  $S(\tau)$  в точке  $\mathbf{x} = \xi$  и направлен «от начала координат». Направление вектора  $-\left.\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\xi}$  (показан штриховой линией на рис. 6.13) устанавливает направление «наискорейшего убывания» на поверхности  $T^*(\mathbf{x})$  в точке  $\xi$ . Итак, если построить поверхность  $T^*(\mathbf{x})$  и положить на нее шарик в точке  $\xi$ , то он начнет катиться вниз по поверхности  $T^*(\mathbf{x})$  в направлении вектора  $-\left.\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\xi}$ .

При  $t = 0$  имеем

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}\mathbf{u}(0), \quad \mathbf{u}(0) \in \Omega. \quad (6.247)$$

Направление и величина вектора  $\dot{\mathbf{x}}(0)$ , очевидно, зависят от вектора  $\mathbf{A}\xi$ , который определяется состоянием  $\xi$ , и от вектора  $\mathbf{B}\mathbf{u}(0)$ , величина и направление которого могут выбираться в пределах наложенных ограничений  $\mathbf{u}(0) \in \Omega$ . Если «перепробовать» все управления  $\mathbf{u}(0)$  из  $\Omega$ , то получится множество векторов  $\{\dot{\mathbf{x}}(0)\}$ , которые образуют конус  $K$ . Будем считать, что этот конус показан на рис. 6.13. Таким образом, ограничение  $\mathbf{u}(0) \in \Omega$  определяет область направлений на рис. 6.13, и мы не можем сделать так, чтобы вектор  $\dot{\mathbf{x}}(0)$  был направлен вдоль  $-\left.\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\xi}$ .

Однако имеется вектор  $\dot{\mathbf{x}}^*(0)$ , направленный в сторону наискорейшего убывания при наложенных ограничениях. Обозначим через  $\mathbf{u}^*(0)$  управляющий вектор такой, что

$$\dot{\mathbf{x}}^*(0) = \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(0). \quad (6.248)$$

Рассмотрим, чем отличается вектор  $\dot{\mathbf{x}}^*(0)$  от всех остальных возможных векторов  $\dot{\mathbf{x}}(0)$ ? Нетрудно увидеть, что  $\dot{\mathbf{x}}^*(0)$  удовлетворяет соотношению (см. рис. 6.13)

$$\left\langle \dot{\mathbf{x}}^*(0), \left.\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\xi} \right\rangle \leq \left\langle \dot{\mathbf{x}}(0), \left.\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\xi} \right\rangle \quad (6.249)$$

для всех  $\dot{\mathbf{x}}(0) \in K$ . Аналогично из уравнений (6.248) и (6.249) находим, что для всех  $\mathbf{u}(0) \in \Omega$

$$\left\langle \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(0), \left.\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\xi} \right\rangle \leq \left\langle \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}\mathbf{u}(0), \left.\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\xi} \right\rangle \quad (6.250)$$

или

$$\left\langle \mathbf{u}^*(0), \mathbf{B}' \left.\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\xi} \right\rangle \leq \left\langle \mathbf{u}(0), \mathbf{B}' \left.\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\xi} \right\rangle. \quad (6.251)$$

Итак, вектор управления  $\mathbf{u}^*(0)$ , удовлетворяющий (6.251), устанавливает направление наискорейшего убывания (совместимого с ограничениями) вдоль поверхности минимального времени  $T^*(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x} = \xi$ . При этом управление  $\mathbf{u}^*(0)$ , удовлетворяющее (6.251), должно удовлетворять также и соотношению

$$\langle \mathbf{u}^*(0), \mathbf{B}'\boldsymbol{\pi} \rangle \leq \langle \mathbf{u}(0), \mathbf{B}'\boldsymbol{\pi} \rangle, \quad (6.252)$$

где  $\boldsymbol{\pi}$  — произвольный вектор, направленный «наружу» и нормальный к минимальной изохроне  $S(\tau)$  в точке  $\xi$ , т. е.

$$\boldsymbol{\pi} = c \left.\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\xi}, \quad c > 0 \quad (6.253)$$

для любой положительной константы  $c$ .

Физически  $\mathbf{u}^*(0)$  должно быть оптимальным управлением в точке  $\mathbf{x} = \xi$ , потому что оно заставляет состояние системы или изображающую точку в фазовом пространстве двигаться, максимизируя скорость изме-

нения минимального времени. Если  $u^*(0)$  — оптимальное управление, то из необходимых условий известно, что существует переменная  $p^*(0)$ , при которой имеет место соотношение

$$1 + \langle A\xi, p^*(0) \rangle + \langle u^*(0), B'p^*(0) \rangle \leq 1 + \langle A\xi, p^*(0) \rangle + \langle u(0), B'p^*(0) \rangle \quad (6.254)$$

для всех  $u(0) \in \Omega$   
или эквивалентное ему

$$\langle u^*(0), B'p^*(0) \rangle \leq \langle u(0), B'p^*(0) \rangle. \quad (6.255)$$

Из сравнения соотношений (6.255), (6.253) и (6.252) сделаем следующее важное замечание.

**Замечание 6.11**<sup>1</sup>. Если  $u^*(0)$  — оптимальное управление при  $x^*(0) = \xi$ , то начальное значение  $p^*(0)$  должно иметь то же направление, что и градиент  $\left. \frac{\partial T^*(x)}{\partial x} \right|_{x=\xi}$ , если оно существует. То же самое можно высказать и иначе. Начальное значение  $p^*(0)$  должно быть внешней нормалью к изохроне  $S(\tau)$  при  $x = \xi$ .

Обсудим далее важный случай, когда начальное состояние является «углом» минимальной изохроны. Предположим, что  $\xi \in S(\tau)$ , и, как показано на рис. 6.14, является углом изохроны; пусть  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — состояния вблизи  $\xi$  на изохроне  $S(\tau)$ . Будем говорить, что  $\xi_1$  находится «справа» от  $\xi$ , а  $\xi_2$  — слева.

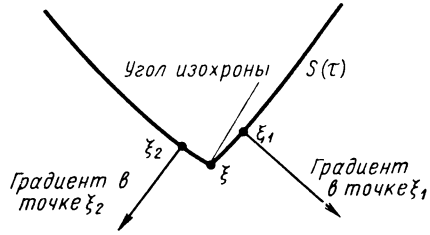


Рис. 6.14. Если  $\xi$  является углом минимальной изохроны, то направление наискорейшего убывания неопределенно

Утверждение « $\xi$  находится в углу изохроны  $S(\tau)$ » означает, что градиент  $\left. \frac{\partial T^*(x)}{\partial x} \right|_{x=\xi}$  при  $x = \xi$  не определен. Как показано на рис. 6.14, векторы  $\left. \frac{\partial T^*(x)}{\partial x} \right|_{x=\xi_1}$  и  $\left. \frac{\partial T^*(x)}{\partial x} \right|_{x=\xi_2}$  определены для всех  $\xi_1$  справа от  $\xi$  и для всех  $\xi_2$  слева от  $\xi$ , однако

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow \xi} \left\{ \left. \frac{\partial T^*(x)}{\partial x} \right|_{x=\xi_1} \right\} \neq \lim_{\xi_2 \rightarrow \xi} \left\{ \left. \frac{\partial T^*(x)}{\partial x} \right|_{x=\xi_2} \right\}. \quad (6.256)$$

Таким образом, при  $x = \xi$  мы не можем найти направление наискорейшего убывания по градиенту при  $x = \xi$ , так как последний не определен. Это означает, что оптимальное по быстродействию управление в этой точке нельзя определить при помощи геометрического доказательства, приведенного в предыдущем обсуждении. Если, однако,  $p^*(0)$  есть вектор, соответствующий  $\xi$  и  $u^*(0)$ , то соотношение (6.255) остается в силе. Мы просто утратили соответствие между  $p^*(0)$  и нормалью к минимальной изохроне<sup>2</sup>.

В предыдущем обсуждении мы ограничились начальными состояниями, расположенными на данной минимальной изохроне. Заметим, что те же замечания в силу принципа оптимальности (§ 5.16) справедливы

<sup>1</sup> Геометрическая интерпретация, содержащаяся в этом замечании, является исходной точкой итерационных способов, описанных в работах [166] и [57].

<sup>2</sup> Это соображение, по сути дела, показывает, что теория Гамильтона—Якоби слабее принципа минимума. Пока поверхности минимального времени не имеют «углов», оба теоретических подхода эквивалентны. Сила принципа минимума Понтрягина и обнаруживается как раз в тех задачах, где градиент минимального времени не определен повсюду; по крайней мере, это справедливо с практической точки зрения.

относительно любого состояния  $\mathbf{x}^*(t)$  на оптимальной траектории к началу координат. Подытожим наши выводы следующим замечанием.

**Замечание 6.12.** Пусть  $\mathbf{x}^*(t)$  — состояние на оптимальной траектории и пусть  $\mathbf{p}^*(t)$  — соответствующая дополнительная переменная. Предположим, что  $\mathbf{x}^*(t) \in S(T)$ . Тогда  $\mathbf{p}^*(t)$  — внешняя нормаль к  $S(T)$  в точке  $\mathbf{x}^*(t)$  в случае, если градиент  $\left. \frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(t)}$  определен.

Следующее упражнение поможет конкретизировать идеи данного параграфа.

**Упражнение 6.12.** Рассмотрите систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t); \quad |u(t)| \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.257)$$

В § 7.2 будет доказано, что минимальное время  $T^*(x_1, x_2)$ , необходимое для перевода любого состояния  $(x_1, x_2)$  в  $(0, 0)$ , определяется соотношениями

$$T^*(x_1, x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} x_2 + \sqrt{4x_1 + 2x_2^2}, & \text{если } x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2|, \\ -x_2 + \sqrt{-4x_1 + 2x_2^2}, & \text{если } x_1 < -\frac{1}{2} x_2 |x_2|; \\ |x_2|, & \text{если } x_1 = -\frac{1}{2} x_2 |x_2|. \end{array} \right\} \quad (6.258)$$

Начертите минимальную изохрону  $S(4)$ . Вычислите градиент

$$\left. \frac{\partial T^*(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial T^*(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T^*(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{array} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \quad \text{для } \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (6.259)$$

Начертите этот вектор, исходящим из точки  $\hat{\mathbf{x}}$ . Для всех  $|u| \leq 1$  вычислите множество векторов  $\left\{ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \right\}$  по уравнению (6.257) при  $\hat{\mathbf{x}}$  и начертите их исходящими также из  $\hat{\mathbf{x}}$  т. е. постройте область  $K$ , показанную на рис. 6.13). Убедитесь, что оптимальное управление при  $\hat{\mathbf{x}}$  должно быть равно  $-1$ . Повторите для точки  $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Минимальная изохрона  $S(4)$ , которую вы нарисовали, имеет два «угла». Вычислите градиенты по обе стороны угла и удостоверьтесь, что градиент имеет скачок в двух точках.

## 6.8. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В этом параграфе мы приводим обсуждение теоремы 6.10, которая гарантирует существование оптимального по быстрдействию управления к началу координат из любого начального состояния в фазовом пространстве.

Вопрос о существовании оптимального управления при движении из произвольного начального состояния в произвольную область  $S$  исключительно сложен. Полезно рассмотреть частный вопрос о существовании оптимального управления к началу координат с эвристической точки зрения.

Предположим, что нам задана полностью управляемая динамическая система и управление ограничено по величине соотношением  $\mathbf{u}(t) \in \Omega$ . Используя предположения об управляемости системы, мы можем найти по крайней мере одно управление, которое переведет любое начальное состояние  $\xi$  в  $\mathbf{0}$  в течение конечного времени. Может, однако, оказаться, что начальное состояние  $\xi$  настолько далеко от начала координат, что перевести  $\xi$  в  $\mathbf{0}$  могут лишь управления, не удовлетворяющие ограниче-

нию  $\mathbf{u}(t) \in \Omega$ . В этом случае существуют начальные состояния, которые не могут быть переведены в  $\mathbf{0}$  управлениями, удовлетворяющими ограничению.

Можно высказать следующее замечание: для заданной полностью управляемой динамической системы  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$  и области ограничений  $\Omega$   $n$ -мерное фазовое пространство  $R_n$  можно разделить на два подпространства  $\Psi_\Omega$  и  $R_n - \Psi_\Omega$  со следующими свойствами:

1. Если  $\xi \in \Psi_\Omega$ , то существует хотя бы одно допустимое управление, переводящее  $\xi$  в  $\mathbf{0}$  в течение конечного времени.

2. Если  $\xi \in R_n - \Psi_\Omega$ , то не существует оптимальных управлений, переводящих  $\xi$  в любой из элементов  $\Psi_\Omega$  в течение конечного времени (и поэтому  $\xi$  нельзя перевести в  $\mathbf{0}$  при помощи допустимого управления).

По сути дела, ограниченные управления не дают достаточного «толчка» для того чтобы перевести состояния из  $R_n - \Psi_\Omega$  в  $\Psi_\Omega$  и, следовательно, в начало координат.

С физической точки зрения управление  $\mathbf{u}(t)$  может прибавлять или отнимать энергию от динамической системы. Если представить себе состояние  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , как состояние с нулевой энергией, то можно заметить, что системы, для которых множество  $R_n - \Psi_\Omega$  не является пустым, по сути дела неустойчивы. По этой причине можно полагать, что устойчивая, полностью управляемая динамическая система характеризуется соотношением  $\Psi_\Omega = R_n$ , а для неустойчивой, полностью управляемой системы имеется  $\Psi_\Omega \subset R_n$ , но  $\Psi_\Omega \neq R_n$ .

Теорема<sup>1</sup>, полезная для подтверждения этого и гарантирующая существование оптимального по быстродействию управления к началу координат из любого начального состояния, может быть сформулирована следующим образом.

**Теорема 6.10.** Рассмотрим оптимальное по быстродействию управление для управляемой системы  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  в соответствии с задачей 6.1в. Если собственные значения  $\mathbf{A}$  имеют не положительные (отрицательные или нулевые) вещественные части, то оптимальное по быстродействию управление к началу координат существует для любого начального состояния из  $R_n$ .

Строгое доказательство этой теоремы можно найти в [179]. Рассмотрим суть доказательства на примере системы с различными действительными собственными значениями и с единственной управляющей переменной  $u(t)$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \lambda_i x_i(t) + b_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ |u(t)| &\leq 1; \\ \xi_i &= x_i(0); \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (6.260)$$

Решение системы (6.260) для любого  $u(t)$  дается формулой

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} \left[ \xi_i + \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} b_i u(\tau) d\tau \right]. \quad (6.261)$$

<sup>1</sup> Соответствующие ссылки, относящиеся к теоремам существования, будут даны в § 6.10 и 6.23.



Предположим, что мы нашли допустимое управление  $\hat{u}(t)$ , для которого  $x_1(\hat{T}) = x_2(\hat{T}) = \dots = x_n(\hat{T}) = 0$ . Это означает, что соотношение

$$\xi_i = - \int_0^{\hat{T}} e^{\lambda_i t} b_i \hat{u}(t) dt \quad (6.262)$$

удовлетворяется для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Так как  $|\hat{u}(t)| \leq 1$ , можно сделать вывод, что

$$\begin{aligned} |\xi_i| &= \left| \int_0^{\hat{T}} e^{-\lambda_i t} b_i \hat{u}(t) dt \right| \leq \int_0^{\hat{T}} e^{-\lambda_i t} |b_i| |\hat{u}(t)| dt \leq \\ &\leq \int_0^{\hat{T}} e^{-\lambda_i t} |b_i| dt = - \frac{|b_i|}{\lambda_i} (e^{-\lambda_i \hat{T}} - 1) \end{aligned} \quad (6.263)$$

для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Предположим, что одно из собственных значений, например  $\lambda_1$ , положительно [это означает, что система (6.260) неустойчива]. Из (6.263) получим

$$|\xi_1| \leq - \frac{|b_1|}{\lambda_1} (e^{-\lambda_1 \hat{T}} - 1), \quad (6.264)$$

откуда

$$e^{-\lambda_1 \hat{T}} \leq 1 - \frac{\lambda_1 |\xi_1|}{|b_1|}. \quad (6.265)$$

Очевидно, что соотношение (6.265) не может удовлетворяться для любых действительных положительных и конечных  $\hat{T}$ , если для начального значения координаты  $\xi_1$  справедливо неравенство

$$|\xi_1| \geq \frac{|b_1|}{\lambda_1}. \quad (6.266)$$

Таким образом, если  $\lambda_1 > 0$  и  $|\xi_1| \geq \frac{|b_1|}{\lambda_1}$ , то нельзя найти  $\hat{T}$  такое, что  $x_1(\hat{T}) = 0$  и, следовательно, оптимального управления не существует.

Если все собственные значения  $\lambda_i$  не положительны, то легко показать, что уравнение (6.263) может быть справедливо для любых  $|\xi_i|$  и  $i = 1, 2, \dots, n$ , так как можно подобрать достаточно большое значение  $\hat{T}$ . Это, в свою очередь, означает, что оптимальное по быстродействию управление существует для всех начальных состояний системы (почему?)<sup>1</sup>.

**Пример 6.4.** Рассмотрим оптимальное по быстродействию управление для системы

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad x(0) = \xi. \quad (6.267)$$

Если  $a \leq 0$ , то (по теореме 6.10) оптимальное по быстродействию управление к состоянию  $x = 0$  существует для всех  $\xi$ . Если  $a > 0$ , то система неустойчива. Найдем область начальных состояний  $\Psi_\Omega$ , для которой существует оптимальное по быстродействию управление. Если оптимальное по быстродействию управление  $u^*(t)$  существует, то  $|u^*(t)| = 1$  и мы имеем

$$\xi = - \int_0^{\tau} e^{-at} u^*(t) dt,$$

<sup>1</sup> См. работу [179].

откуда найдем

$$\begin{aligned} |\xi| &= \left| \int_0^{\tau} e^{-at} u^*(t) dt \right| \leq \int_0^{\tau} |e^{-at} u^*(t)| dt \leq \int_0^{\tau} e^{-at} |u^*(t)| dt = \\ &= \int_0^{\tau} e^{-at} dt = -\frac{1}{a} (e^{-a\tau} - 1). \end{aligned} \quad (6.268)$$

Чтобы соотношение (2.268) выполнялось для некоторого конечного положительного  $\tau$ , необходимо иметь

$$|\xi| < \frac{1}{a}.$$

Таким образом, область начальных значений  $\Psi_{\Omega}$ , для которой существует оптимальное управление в начало координат, определяется соотношением

$$\Psi_{\Omega} = \left\{ \xi : |\xi| < \frac{1}{a}, a > 0 \right\}. \quad (6.269)$$

Если  $|\xi| \geq \frac{1}{a}$ , то оптимального управления не существует. Таким образом, область  $\Psi_{\Omega}$  представляет собой открытое множество, содержащее начало координат.

**Упражнение 6.13.** Рассмотрите управление к началу координат  $(0, 0)$  для следующих систем второго порядка, полагая  $|u(t)| \leq 1$ :

- а)  $\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t);$   
 $\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t) + u(t);$   
 б)  $\dot{x}_1(t) = x_2(t);$   
 $\dot{x}_2(t) = x_2(t) + u(t);$   
 в)  $\dot{x}_1(t) = x_2(t);$   
 $\dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t).$

Для каждой из систем найдите область исходных состояний  $\Psi_{\Omega}$ , для которой такое управление  $[u(0, 0)]$  существует (примите, что если существует допустимое экстремальное управление, то оптимальное управление существует).

## 6.9. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

В § 5.19 мы обсуждали изменение минимального времени вдоль оптимальной траектории, а в § 6.7 рассматривали геометрические свойства оптимального управления для задачи 6.1в. В данном параграфе мы свяжем эти представления воедино и изучим уравнение Гамильтона—Якоби для задачи об оптимальном быстродействии. Нашей целью будет показать, как можно использовать общие результаты гл. 5 для задачи об оптимальном быстродействии 6.1в.

На протяжении всего параграфа мы будем иметь дело с оптимальным по быстродействию управлением нормальной системой  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  с областью цели  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$  (начало координат). При этом используем следующие обозначения: если нам задано состояние  $\mathbf{x}$ , то через  $T^*(\mathbf{x})$  обозначим минимальное время, требующееся для перевода  $\mathbf{x}$  в  $\mathbf{0}$ , а через  $\mathbf{u}^*$  — значение оптимального управления в состоянии  $\mathbf{x}$ .

Конкретные задачи данного параграфа состоят в следующем:

- 1) показать, как можно использовать уравнение Гамильтона—Якоби для проверки, может ли данная функция  $T(\mathbf{x})$ , найденная в результате решения задачи об оптимальном управлении, быть равной  $T^*(\mathbf{x})$ ;
- 2) указать на трудности, которые возникают в случае, если предположение о том, что данное управление оптимально, неверно;
- 3) отметить трудности, связанные с определением оптимального по быстродействию управления непосредственно из уравнения Гамильтона—Якоби.

Перейдем к обсуждению использования уравнения Гамильтона—Якоби, рассматривая его как необходимое условие. Из общей теории § 5.19 можно вывести следующую лемму.

**Лемма 6.6.** Пусть  $\mathbf{x}^*$  — состояние на оптимальной по быстродействию траектории и  $\mathbf{u}^*$  — значение оптимального управления при  $\mathbf{x}^*$ . Так как  $\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial t} = 0$  для любых  $\mathbf{x}$ , необходимо, чтобы  $T^*(\mathbf{x})$  удовлетворяло соотношению

$$1 + \left\langle \mathbf{A}\mathbf{x}^*, \frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \right\rangle + \left\langle \mathbf{u}^*, \mathbf{B}' \frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \right\rangle = 0 \quad (6.270)$$

при условии, что  $\frac{\partial T^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$  существует.

**Упражнение 6.14.** Докажите лемму 6.6. Указание см. уравнение (5.695)

Эта лемма полезна в том случае, когда задача об оптимальном управлении уже решена и мы хотим узнать, может ли данная функция  $T(\mathbf{x})$  оказаться выражением, определяющим минимальное время как функцию состояния. Если данная функция не удовлетворяет уравнению (6.270) хотя бы в одной точке, то  $T(\mathbf{x})$  можно немедленно исключить из числа возможных вариантов минимального времени. Покажем это на следующем примере.

**Пример 6.5.** Предположим, что линейная система описывается следующими уравнениями:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad |u(t)| \leq 1. \quad (6.271)$$

Можно убедиться, что оптимальным является управление<sup>1</sup>

$$u^* = -1, \text{ если } \mathbf{x} = \mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad (6.272)$$

$$u^* = -1, \text{ если } \mathbf{x} = \mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.273)$$

Предположим, что каким-то образом мы нашли соотношение

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2, \quad (6.274)$$

которое выражает минимальное время как функцию от состояния. Эта догадка небезосновательна, потому что  $T(\mathbf{x}) > 0$  для всех  $\mathbf{x}$ ,  $T(0) = 0$  и  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} T(\mathbf{x}) = \infty$ .

Покажем теперь, что наша догадка неправильна.

Прежде всего вычислим градиент  $T(\mathbf{x})$ . Из соотношения (6.274) находим, что этот градиент равен

$$\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (6.275)$$

Вычислим его при  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_a$  и  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_b$ :

$$\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad (6.276)$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.277)$$

При  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_a$  левая часть уравнения (6.270) равна:

$$1 + \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle - 1 \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = 1 + 2 - 4 = -1 \neq 0. \quad (6.278)$$

<sup>1</sup> См. § 7.2.

Можно заключить, что  $T(\mathbf{x})$  по соотношению (6.274) не может быть формулой, выражающей минимальное время, потому что при  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha$  уравнение (6.270) не выполняется. Посмотрим, что получится, если испытать  $T(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\beta$ . В ней левая часть выражения (6.270) равна:

$$1 + \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle - 1 \left\{ [0, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = 1 + 1 - 2 = 0. \quad (6.279)$$

Это означает, что  $T(\mathbf{x})$  удовлетворяет необходимому условию леммы 6.6 при  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\beta$ , и на основе этого испытания мы можем заключить, что  $T(\mathbf{x})$  может быть минимальным временем. Однако испытание при  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha$  исключает эту возможность.

Предположим теперь, что при определении оптимального управления допущена ошибка. Например, мы полагаем, что

$$u^* = +1, \text{ если } \mathbf{x} = \mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.280)$$

Тогда вместо выражения (6.279) мы получим

$$1 + \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle + 1 \left\{ [0, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = 1 + 1 + 2 = 4 \neq 0, \quad (6.281)$$

и можно было бы исключить  $T(\mathbf{x})$  из рассмотрения. Верно, что  $T(\mathbf{x}) \neq T^*(\mathbf{x})$ , но на основе выражения (6.281) нельзя делать заключение, так как неверно выбрано значение  $u^* = +1$  для  $\mathbf{x}_\beta$ . Иначе говоря, если допущена ошибка при определении оптимального закона управления, то в ходе такой проверки можно исключить из рассмотрения правильную зависимость  $T^*(\mathbf{x})$ .

Практически эта лемма не очень полезна, так как инженеру чаще всего нужно построить оптимальную систему с обратной связью, а не проверить, равно ли данное  $T(\mathbf{x})$  оптимальному  $T^*(\mathbf{x})$  или нет. Тем не менее использование уравнения Гамильтона—Якоби в качестве необходимого условия имеет значение в теоретических исследованиях и для проверки правильности результатов, получаемых при использовании принципа минимума.

В гл. 5 уравнение Гамильтона—Якоби в основном рассматривалось как достаточное условие. Обсудим теперь проблему решения уравнения Гамильтона—Якоби и отыскания оптимального управления. При этом советуем читателю вернуться к теореме 5.12 и внимательно ее еще раз посмотреть.

Мы знаем, что гамильтониан задачи об оптимальном быстродействии 6.1в равен:

$$H[\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}] = 1 + \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{B}'\mathbf{p} \rangle. \quad (6.282)$$

Так как система  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$  нормальна, то, согласно определению 5.12, нормален и гамильтониан, и поэтому  $H$ -минимальное управление равно:

$$\tilde{\mathbf{u}} = -\text{SIGN}\{\mathbf{B}'\mathbf{p}\}. \quad (6.283)$$

Из соотношений (6.283) и (6.282) получим

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{u}}) &= 1 + \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle - \langle \text{SIGN}\{\mathbf{B}'\mathbf{p}\}, \mathbf{B}'\mathbf{p} \rangle = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i p_k - \sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^n b_{ij} p_i \right|. \end{aligned} \quad (6.284)$$

Рассмотрим уравнение в частных производных (уравнение Гамильтона—Якоби):

$$1 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^n b_{ij} \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right| = 0. \quad (6.285)$$

Предположим, что мы оказались в состоянии найти решение

$$\hat{T}(\mathbf{x}) \quad (6.286)$$

дифференциального уравнения в частных производных (6.285), причем

1) функция

$$\hat{T}(0) = 0; \quad (6.287)$$

2) управляющий вектор

$$\hat{u} = - \text{SIGN} \left\{ \mathbf{B}' \frac{\partial \hat{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\}. \quad (6.288)$$

Подстановка этого решения в уравнение системы дает:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\text{SIGN} \left\{ \mathbf{B}' \frac{\partial \hat{T}[\mathbf{x}(t)]}{\partial \mathbf{x}(t)} \right\}. \quad (6.289)$$

Решение этого уравнения

$$\hat{\mathbf{x}}(t) \text{ с начальным условием } \hat{\mathbf{x}}(0) = \xi, \quad (6.290)$$

обладает свойством

$$\mathbf{x}[\hat{T}(\xi)] = 0. \quad (6.291)$$

Иначе говоря, решение  $\hat{T}(\mathbf{x})$  уравнения Гамильтона — Якоби (6.285) определяет управление  $\hat{u}$  [см. соотношение (6.288)], которое, в свою очередь, производит траекторию  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ , достигающую начала координат за время  $\hat{T}(\xi)$ , где  $\xi$  — данное начальное состояние. Если это так, то управление  $\hat{u}(t)$  будет оптимально по быстродействию, по крайней мере по отношению к близким к нему управлениям, т. е.  $\hat{u}(t)$  будет оптимальным локально. Поясним это на очень простом примере.

**Пример 6.6.** Предположим, что нам задана система первого порядка

$$\dot{x}(t) = 2u(t); \quad |u(t)| \leq 1; \quad x(0) = \xi. \quad (6.292)$$

Требуется перевести произвольное начальное состояние  $\xi$  в 0 за минимальное время. Гамильтониан для этой задачи имеет вид

$$H(\mathbf{x}, p, u) = 1 + 2up, \quad (6.293)$$

где  $H$ -минимальное управление  $\tilde{u}$  определяется соотношением

$$\tilde{u} = - \text{sign} \{p\}. \quad (6.294)$$

Уравнение Гамильтона—Якоби для данной задачи имеет вид

$$1 - 2 \left| \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial x} \right| = 0. \quad (6.295)$$

Определим две области  $X_1$  и  $X_2$  (одномерного) фазового пространства следующим образом:

$$X_1 = \{x : x > 0\}; \quad X_2 = \{x : x < 0\}. \quad (6.296)$$

Легко убедиться, что функция

$$\hat{T}(x) = \frac{1}{2} |x| \quad (6.297)$$

есть решение дифференциального уравнения в частных производных (6.295) для всех  $x \in X_1 \cup X_2$ , так как

$$\frac{\partial \hat{T}(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \quad \text{для } x \in X_1; \quad (6.298)$$

$$\frac{\partial \hat{T}(x)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \quad \text{для } x \in X_2. \quad (6.299)$$

Заметим, что

$$\left. \frac{\partial \hat{T}(x)}{\partial x} \right|_{x=0} \text{ неопределенна} \quad (6.300)$$

и

$$\hat{T}(0) = 0. \quad (6.301)$$

Рассмотрим управление  $\hat{u}$ , определенное как

$$\hat{u} = - \operatorname{sign} \left\{ \frac{\partial \hat{T}(x)}{\partial x} \right\}, \quad (6.302)$$

откуда

$$\hat{u} = -1, \quad x \in X_1; \quad (6.303)$$

$$\hat{u} = +1, \quad x \in X_2; \quad (6.304)$$

$$\hat{u} \text{ неопределенно при } x = 0. \quad (6.305)$$

Предположим, что  $\xi \in X_1$ , т. е.  $\xi > 0$ . В результате подстановки выражения (6.303) в формулы (6.292) получим

$$\dot{x}(t) = -2; \quad (6.306)$$

$$\hat{x}(t) = \xi - 2t; \quad \xi \in X_1. \quad (6.307)$$

Из соотношения (6.297) имеем

$$\hat{T}(\xi) = \frac{1}{2} \xi; \quad \xi \in X_1. \quad (6.308)$$

Следовательно,

$$\hat{x}[T(\xi)] = \xi - \xi = 0. \quad (6.309)$$

Далее, для любых  $t \in [0, \hat{T}(\xi)]$  имеем

$$\hat{x}(t) = \xi - 2t > 0. \quad (6.310)$$

Это означает, что

$$\hat{x}(t) \in X_1. \quad (6.311)$$

Таким образом, постоянное управление

$$\hat{u} = -1 \quad (6.312)$$

оптимально по быстрдействию для любых  $x \in X_1$ .

По аналогии доказывается, что управление

$$\hat{u} = +1 \quad (6.313)$$

оптимально по быстрдействию для всех  $x \in X_2$ .

Мы выбрали области  $X_1$  и  $X_2$  такими, чтобы  $\frac{\partial T(x)}{\partial x}$  было вполне определенным.

Для данной системы мы не встретили никаких трудностей при отыскании оптимального управления с помощью уравнения Гамильтона—Якоби, так как было достаточно просто:

1) угадать решение уравнения Гамильтона—Якоби, удовлетворяющее граничным условиям;

2) определить две области  $X_1$  и  $X_2$ ;

3) установить, что  $x[\hat{T}(\xi)] = 0$ .

Если же мы попытаемся найти оптимальное управление для систем более высокого порядка, то сразу столкнемся со следующими трудностями<sup>1</sup>:

1. Почти невозможно найти решение уравнения Гамильтона—Якоби для систем выше второго порядка.

<sup>1</sup> Следующие замечания являются выводами авторов из их опыта по части решения различных задач об оптимальном быстрдействии.

2. Для системы  $n$ -го порядка необходимо подразделить фазовое пространство по крайней мере на  $2n$  областей  $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ , указать которые для систем выше второго порядка исключительно трудно. Поэтому в настоящее время проектирование оптимальных систем с обратной связью чаще всего производится при помощи необходимых условий принципа минимума, а не достаточных условий, определяемых уравнением Гамильтона—Якоби.

### 6.10. КОММЕНТАРИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

В предыдущих параграфах мы анализировали задачу об оптимальном быстродействии с различных точек зрения. Нашей целью было связать математические и геометрические аспекты проблемы таким образом, чтобы читатель оценил их значение.

Можно заметить, что наиболее «сильные» теоремы были сформулированы для задачи о линейном оптимальном по быстродействию регуляторе с постоянными параметрами (см. задачу 6.1в). Некоторые из этих теорем относятся и к оптимальному по быстродействию управлению к началу координат линейной системой с переменными по времени коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (6.314)$$

при условии, что задача об оптимальном быстродействии нормальна. В частности, теорема 6.7 и упражнение 6.7, которые устанавливают единственность оптимального управления, справедливы и для системы с переменными параметрами (6.314)<sup>1</sup>. Кроме этого, теорема 6.9 (которая устанавливает единственность экстремального управления в случае, если начало координат является конечным состоянием) также справедлива для системы (6.314)<sup>2</sup>. Теорема относительно числа переключений (теорема 6.8) и наиболее полезная теорема существования (теорема 6.9) не имеют прямых аналогов для систем с переменными параметрами, потому что они сформулированы в терминах собственных значений (постоянных) матрицы системы  $\mathbf{A}$ .

Если обратиться к нелинейной задаче об оптимальном быстродействии (задача 6.1б), то в современной литературе можно найти очень мало<sup>3</sup> полезных результатов, если иметь в виду общие характеристики или теоремы. Трудности не являются принципиальными, они связаны скорее с тем обстоятельством, что мы не можем написать аналитических выражений для решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Теоретические результаты для задачи об оптимальном быстродействии в гл. 7 будут использованы при расчете оптимальных по быстродействию систем. Целью гл. 7 является отыскание оптимального по быстродействию управления в функции от состояния, т. е. решение задачи об оптимальной по быстродействию обратной связи. Нам кажется, что прежде чем читатель сможет оценить общие понятия задачи об оптимальном быстродействии, ему следует познакомиться с подробным решением некоторых конкретных задач. Различные упражнения гл. 7 предназначены для иллюстрации геометрических представлений, обсуждавшихся в предыдущих параграфах. В гл. 7 мы будем, насколько это возможно, приводить практическую реализацию оптимальных по быстродействию законов управления, чтобы можно было оценить относительную сложность необ-

<sup>1</sup> См. [179], стр. 204.

<sup>2</sup> См. [179], стр. 204 и 205.

<sup>3</sup> Нелинейная задача об оптимальном быстродействии с теоретической точки зрения рассматривается в работах [89], [169], [62], [145], [190] и [208], где обсуждается, в основном, проблема существования решения.

ходимой аппаратуры. Мы советуем читателю, уставшему от общих понятий и теорем, пропустить оставшуюся часть данной главы и перейти к гл. 7.

Упражнения, приведенные ниже, предназначены для того, чтобы познакомить читателя с оптимальным по быстродействию управлением линейными системами с переменными параметрами.

**Упражнение 6.15.** Для каждой из следующих систем найдите необходимые и достаточные условия нормальности задачи об оптимальном быстродействии. Считайте, что все переменные коэффициенты являются бесконечно дифференцируемыми функциями времени. Используя определения 6.4 и 6.5 и материал, предшествующий теореме 6.5 рассмотрите системы:

а)  $\dot{x}_1(t) = x_2(t);$

$$\dot{x}_2(t) = +a_1(t)x_1(t) + a_2(t)x_2(t) + b_1(t)u(t), \quad |u(t)| \leq 1;$$

б) 
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} |u_1(t)| \leq 1; \\ |u_2(t)| \leq 1; \end{matrix}$$

в)  $\dot{x}_1(t) = x_2(t) + b_1(t)u(t);$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t) + b_2(t)u(t), \quad |u(t)| \leq 1;$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1(t) + b_3(t)u(t);$$

г)  $\dot{x}_1(t) = a(t)x_2(t);$

$$\dot{x}_2(t) = -a(t)x_1(t) + u(t), \quad |u(t)| \leq 1.$$

**Упражнение 6.16.** Докажите теорему 6.7 для системы  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t) \times \times u(t)$ . Указание: см. [179].

**Упражнение 6.17.** Докажите теорему 6.9 для системы  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ . Указание: см. [179].

## ЗАДАЧИ НА ОПТИМУМ РАСХОДА ТОПЛИВА

### 6.11. ВВЕДЕНИЕ <sup>1</sup>

В этом и последующих пяти параграфах рассматриваются задачи на оптимум расхода топлива. Целью этого изучения является «перекинуть мост» от теоретических результатов главы 5 к конкретным практическим системам, которые рассматриваются в гл. 8.

Основным источником таких задач являются проблемы управления самолетами и космическими летательными аппаратами, начиная от простейших задач управления положением спутника и включая такие сложные задачи, как задача встречи космических летательных аппаратов на орбите и задача «мягкой» посадки. Во всех этих случаях управляющие силы и моменты появляются за счет расхода топлива или рабочего тела, запасы которых ограничены.

Задачи на оптимум расхода топлива сложнее задач об оптимальном быстродействии. Дополнительные усложнения возникают как в аналитической части задачи, так и при практической реализации системы. Некоторые из причин этих дополнительных усложнений рассматриваются в § 6.15 и гл. 8. Сейчас лишь отметим, что экономия топлива составляет основу таких задач, хотя при проектировании часто бывает необходимо рассматривать и другие параметры (такие, как время переходного процесса).

<sup>1</sup> Имеется большое число работ, где рассматривается общая задача на оптимум расхода топлива, интересный материал содержится в [166].



## 6.12. ОБСУЖДЕНИЕ ЗАДАЧИ И ОГРАНИЧЕНИЙ

Часто представляет интерес поступательное или вращательное движения некоторой массы, а также сложное движение. Управление осуществляется механизмом, потребляющим топливо и производящим тяги или моменты, а в ряде случаев одновременное действие тяги и момента. Потребляемое топливо может уходить из системы (ракета, реактивный двигатель, двигатель внутреннего сгорания) или оставаться в системе (например, в случае ядерного реактора). Вообще, в каждой задаче на оптимум расхода топлива будем считать, что стоимость управления связана с уменьшением полезной массы.

Предположим, что управляемая система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (6.315)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  — вектор состояния;

$\mathbf{u}(t)$  — вектор управления;

$t$  — время.

Допустим, что вектор управления  $\mathbf{u}(t)$  есть результат потребления топлива. Условимся обозначать скорость изменения количества топлива в момент времени  $t$  через  $\varphi(t)$ . Тогда общее количество топлива  $F$ , израсходованного на временном интервале  $[t_0, t_1]$ , равно:

$$F = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t) dt. \quad (6.316)$$

Будем измерять скорость потока топлива неотрицательными величинами, т. е.  $\varphi(t) \geq 0$  для любого  $t$ .

Для большинства физических систем существует соотношение между скоростью потока (расходом) топлива  $\varphi$  и управляющим вектором  $\mathbf{u}$  типа

$$\varphi = h(\mathbf{u}). \quad (6.317)$$

Это соотношение может быть определено экспериментально. Для определенности в данной главе (и в гл. 8) будем считать, что уравнение (6.317) имеет вид

$$\varphi = \sum_{j=1}^r c_j |u_j|, \quad c_j > 0, \quad (6.318)$$

где  $u_1, u_2, \dots, u_r$  — компоненты управляющего вектора  $\mathbf{u}$ ;

$c_j$  — положительные коэффициенты пропорциональности.

Соотношение (6.318) означает, что увеличение расхода топлива приводит к возрастанию величины управляющего вектора  $\mathbf{u}$ . Если выражение (6.318) представляет связь  $\mathbf{u}$  с  $\varphi$ , то можно заметить, что топливо, которое расходуется за время  $[t_0, t_1]$ , определяется соотношением<sup>1</sup>

$$F = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^r c_j |u_j(t)| dt. \quad (6.319)$$

Типичная задача на оптимум расхода топлива может быть сформулирована следующим образом:

<sup>1</sup> В гл. 10 мы рассмотрим иное соотношение между  $F$  и  $\mathbf{u}$ , а именно:

$$F = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{u_1^2(t) + \dots + u_n^2(t)} dt.$$

Заданы система  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$  и ограничение  $\mathbf{u}(t) \in \Omega$ ; начальное состояние  $\mathbf{x}(t_0)$  и область  $S$ . Требуется найти допустимое управление, переводящее  $\mathbf{x}(t_0)$  в  $S$  таким образом, чтобы минимизировать количество топлива  $F$ .

Если мы имеем дело с задачей, где масса топлива  $F$  сравнима с массой всей системы (например, управление разгонными ступенями ракет), то мы должны включить массу в состояние (в число фазовых координат) системы. Предположим, например, что масса системы при  $t = t_0$  равна  $M(t_0)$ . Тогда скорость изменения массы пропорциональна расходу топлива, и поэтому можно написать дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dM(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^r c_j |u_j(t)|. \quad (6.320)$$

Таким образом, массу в каждый момент времени можно вычислить по соотношению

$$M(t) = M(t_0) - \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{j=1}^r c_j |u_j(\tau)| \right\} d\tau. \quad (6.321)$$

В таких примерах управление, выполняющее поставленную задачу с минимальным расходом топлива, автоматически должно минимизировать разность  $M(t_0) - M(t_1)$ .

Если масса  $F$  потребляемого топлива пренебрежимо мала по сравнению с массой  $M(t_0)$  управляемой системы, то достаточно считать, что система имеет постоянную массу. Такое предположение уменьшает число фазовых координат на единицу и упрощает уравнения. Во всех задачах гл. 8 мы будем использовать это предположение.

### 6.13. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И ПОЛУЧЕНИЕ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ

В этом параграфе мы точно сформулируем задачу на оптимум расхода топлива, получим необходимые условия оптимальности расхода топлива, используя принцип минимума, и определим нормальную и вырожденную задачи, а также установим принцип «включено—выключено» (теорема 6.11) для нормальной задачи на оптимум расхода топлива.

Задача на оптимум расхода топлива, сформулированная ниже, аналогична задаче об оптимальном быстродействии, представленной в виде 6.1б. В обеих этих задачах (см. 6.1б и 6.2а) управляемая система, ограничения на управление и области  $S$  одинаковы. Таким образом, читатель сможет сравнить необходимые условия для этих двух задач. Так как многие из необходимых условий похожи, а логическая последовательность, по сути дела, та же, что и в § 6.3, будем излагать материал более сжато.

**Задача 6.2а. Задача об оптимальном расходе топлива при управлении к подвижной области  $S$ .** Дана система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i[\mathbf{x}(t), t] + \sum_{j=1}^r b_{ij}[\mathbf{x}(t), t] u_j(t); \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (6.322)$$

или в векторном виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{B}[\mathbf{x}(t), t] \mathbf{u}(t).$$

Предположим, что компоненты  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  управления  $\mathbf{u}(t)$  ограничены по величине соотношением

$$\left. \begin{aligned} &|u_j(t)| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, r, \\ \text{или, в более компактной записи,} \\ &\mathbf{u}(t) \in \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (6.323)$$

Заданная гладкая область  $S$  определяется уравнениями (6.37) (см. задачу 6.1б). Будем считать, что система (6.322) и область  $S$  удовлетворяют предположениям, сформулированным в задаче 6.1б.

Пусть  $t_0$  — начальное время и  $\mathbf{x}(t)$  — заданное начальное состояние системы (6.322).

Одновременно с этим задан функционал («стоимость» топлива) в виде

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^T \left\{ \sum_{j=1}^r c_j |u_j(t)| \right\} dt, \quad c_j > 0. \quad (6.324)$$

Найти управление  $\mathbf{u}(t)$ , которое

- 1) удовлетворяет ограничениям (6.323);
- 2) переводит систему из состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  в область  $S$ ;
- 3) минимизирует функционал для топлива  $J(\mathbf{u})$  (6.324):
  - а) если  $T$  не задано;
  - б) если  $T = T_f$  фиксировано.

Для нахождения необходимых условий рассмотрим сначала случай, когда время  $T$  не задано. Теорема 5.9 дает необходимые условия для задачи с незадаанным временем.

Прежде всего образуем гамильтониан для системы (6.322) и функционала (6.324). Гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t] &= \sum_{j=1}^r c_j |u_j(t)| + \\ &+ \langle \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t], \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}[\mathbf{x}(t), t] \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t) \rangle \end{aligned} \quad (6.325)$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t] &= \sum_{j=1}^r c_j |u_j(t)| + \\ &+ \sum_{i=1}^n f_i[\mathbf{x}(t), t] p_i(t) + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}(t), t] u_j(t) p_i(t). \end{aligned} \quad (6.326)$$

Заметим, что гамильтониан задачи на оптимум расхода топлива линеен относительно  $u_j(t)$  и  $|u_j(t)|$  [для задачи об оптимальном быстродействии  $H$  линейно зависел только от  $u_j(t)$ ].

Предположим, что  $\mathbf{u}^*(t)$  — управление, оптимальное по расходу топлива, а  $\mathbf{x}^*(t)$  — соответствующая ему траектория и  $\hat{T}$  — первый момент времени, когда

$$\mathbf{x}^*(\hat{T}) \in S. \quad (6.327)$$

Используем обозначение  $\hat{T}$  вместо  $T^*$  для обозначения времени прибытия в  $S$  вдоль траектории, оптимальной по топливу. Символ  $T^*$  сохраним для обозначения минимально возможного времени прибытия в  $S$ . Из формулировки задач 6.2а и 6.1б ясно, что  $\hat{T}$  удовлетворяет неравенству

$$\hat{T} \geq T^*. \quad (6.328)$$

Используем теперь результаты теоремы 5.9 для получения необходимых условий в задаче управления на оптимум расхода топлива. Утверждение 1 теоремы 5.9 гарантирует существование дополнительной переменной  $\mathbf{p}^*(t)$ , соответствующей  $\mathbf{u}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$ . Гамильтониан, вычисленный при  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $\mathbf{p}^*(t)$  и  $\mathbf{u}^*(t)$ , равен

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] = \sum_{i=1}^r c_j |u_j^*(t)| + \\ + \sum_{i=1}^n f_i[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}^*(t), t] u_j^*(t) p_i^*(t). \quad (6.329)$$

Так как  $\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}^*(t)}$  и  $\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^*(t)}$ , то находим, что  $x_k^*(t)$  и  $p_k^*(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  должны удовлетворять каноническим уравнениям

$$\dot{x}_k^*(t) = f_k[\mathbf{x}^*(t), t] + \sum_{j=1}^r b_{kj}[\mathbf{x}^*(t), t] u_j^*(t); \quad (6.330)$$

$$\dot{p}_k^*(t) = - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f_i[\mathbf{x}^*(t), t]}{\partial x_k^*(t)} \right\} p_i^*(t) - \\ - \sum_{j=1}^r u_j^*(t) \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial b_{ij}[\mathbf{x}^*(t), t]}{\partial x_k^*(t)} \right\} p_i^*(t) \quad (6.331)$$

для  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Можно заметить, что канонические уравнения (6.330) и (6.331) идентичны каноническим уравнениям (6.53) и (6.54) для задачи об оптимальном быстродействии. Гамильтонианы (6.329) и (6.52) отличаются только первыми членами.

Утверждение 2 теоремы 5.9 состоит в том, что неравенства

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \leq H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (6.332)$$

имеет место для всех  $\mathbf{u} \in \Omega$  и  $t \in [t_0, \hat{T}]$ . Из уравнения (6.329) находим, что соотношение (6.332) сводится к уравнению

$$\sum_{j=1}^r c_j |u_j^*(t)| + \sum_{i=1}^n f_i[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) + \sum_{j=1}^r u_j^*(t) \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\} \leq \\ \leq \sum_{j=1}^r c_j |u_j(t)| + \sum_{i=1}^n f_i[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) + \sum_{j=1}^r u_j(t) \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\}, \quad (6.333)$$

которое, в свою очередь, дает соотношение

$$\sum_{j=1}^r c_j |u_j^*(t)| + \sum_{j=1}^r u_j^*(t) \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\} \leq \\ \leq \sum_{j=1}^r c_j |u_j(t)| + \sum_{j=1}^r u_j(t) \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij}[\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\} \quad (6.334)$$

для любых  $\mathbf{u} \in \Omega$  и  $t \in [t_0, \hat{T}]$ .

\*

Для задачи на оптимум расхода топлива утверждение 3 теоремы 5.9 принимает вид

$$\sum_{j=1}^r c_j |u_j^*(\hat{T})| + \sum_{i=1}^n f_i [\mathbf{x}^*(\hat{T}), \hat{T}] p_i^*(\hat{T}) + \\ + \sum_{j=1}^r u_j^*(\hat{T}) \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij} [\mathbf{x}^*(\hat{T}), \hat{T}] p_i^*(\hat{T}) \right\} = \sum_{\alpha=1}^{n-\beta} e_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial t} [\mathbf{x}^*(\hat{T}), \hat{T}], \quad (6.335)$$

где  $e_{\alpha}$  — постоянные и  $g_{\alpha}[\mathbf{x}, t] = 0$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n - \beta$  есть уравнения области  $S$ .

Наконец, утверждение 4 теоремы 5.9 означает, что

$$\mathbf{p}^*(\hat{T}) = \sum_{\alpha=1}^{n-\beta} k_{\alpha} \mathbf{h}_{\alpha} [\mathbf{x}^*(\hat{T}), \hat{T}], \quad (6.336)$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_{n-\beta}$  — некоторые произвольные постоянные и

$$\mathbf{h}_{\alpha}[\mathbf{x}, \hat{T}] = \frac{\partial g_{\alpha}[\mathbf{x}, \hat{T}]}{\partial \mathbf{x}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - \beta. \quad (6.337)$$

Читатель может заметить, что уравнение (6.336) идентично уравнению (6.66) для задачи об оптимальном быстродействии, за исключением того, что  $T^*$  заменено на  $\hat{T}$ .

До сих пор мы просто повторяли логическое развитие шага 1 § 6.3 для задачи на оптимум расхода топлива с незадаанным конечным временем  $T$ . Предположим теперь, что конечное время, равное  $T_f$ , было задано заранее. В этом случае можно использовать таблицу 5.1 (ряд 11) для определения необходимых условий задачи на оптимум расхода топлива с фиксированным временем. Предлагаем читателю самостоятельно убедиться, что уравнения (6.330), (6.331) и (6.334) остаются неизменными, а уравнение (6.336) примет вид

$$\mathbf{p}^*(T_f) = \sum_{\alpha=1}^{n-\beta} k_{\alpha} \mathbf{h}_{\alpha} [\mathbf{x}^*(T_f), T_f]. \quad (6.338)$$

Эта задача имеет решение, когда заданное время  $T_f$  больше или равно минимальному времени  $T^*$ , т. е.

$$T_f \geq T^*. \quad (6.339)$$

В заключение рассмотрим необходимые условия в виде следующей леммы.

**Лемма 6.7. Необходимые условия для задачи 6.2а.** Если оптимальное по расходу топлива управление  $\mathbf{u}^*(t)$  существует, то получаемые траектория  $\mathbf{x}^*(t)$  и соответствующая дополнительная переменная  $\mathbf{p}^*(t)$  должны удовлетворять следующим условиям:

а) если  $T$  не задано, то необходимые условия выражаются соотношениями (6.330), (6.331), (6.334), (6.335) и (6.336);

б) если задано  $T = T_f$ , то необходимые условия выражаются соотношениями (6.330), (6.331), (6.334) и (6.338).

Теперь рассмотрим соотношение (6.334) более детально. Используя соотношение (6.334), как это сделано в шаге 2 § 6.3, получим уравнение, которое связывает оптимальное по расходу топлива управление  $\mathbf{u}^*(t)$  с траекторией  $\mathbf{x}^*(t)$ , соответствующей  $\mathbf{p}^*(t)$ .

Определим функции  $q_1^*(t), q_2^*(t), \dots, q_r^*(t)$  соотношениями

$$q_i^*(t) = \sum_{j=1}^n b_{ij} [\mathbf{x}^*(t), t] p_j^*(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (6.340)$$

Таким образом, функции  $q_j^*(t)$  являются компонентами  $r$ -мерного вектора  $\mathbf{q}^*(t)$ , определенного как

$$\mathbf{q}^*(t) = \mathbf{B}' \mathbf{x}^*(t), \quad t] \mathbf{p}^*(t) \quad (6.341)^1$$

Используя уравнения (6.340), из (6.334) можно найти

$$\sum_{i=1}^r c_i \left\{ |u_i^*(t)| + u_i^*(t) \frac{q_i^*(t)}{c_i} \right\} \leq \sum_{i=1}^r c_i \left\{ |u_i(t)| + u_i(t) \frac{q_i^*(t)}{c_i} \right\} \quad (6.342)$$

для всех  $|u_j(t)| \leq 1, j = 1, 2, \dots, r$  и любого  $t \in [t_0, \hat{T}]$  или  $[t_0, T_f]$ . Уравнение (6.342) означает, что функция

$$\psi[\mathbf{u}(t)] = \sum_{i=1}^r c_i \left\{ |u_i(t)| + u_i(t) \frac{q_i^*(t)}{c_i} \right\} \quad (6.343)$$

имеет абсолютный минимум при

$$u_j(t) = u_j^*(t). \quad (6.344)$$

Используя замечание 6.6, находим

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(t) \in \Omega} \psi[\mathbf{u}(t)] &= \min_{\mathbf{u}(t) \in \Omega} \sum_{i=1}^r c_i \left\{ |u_i(t)| + u_i(t) \frac{q_i^*(t)}{c_i} \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^r c_i \left[ \min_{|u_j(t)| \leq 1} \left\{ |u_j(t)| + u_j(t) \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Можно утверждать, что

$$\min_{|u_j(t)| \leq 1} \left\{ |u_j(t)| + u_j(t) \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right\} = \begin{cases} 0, & \text{если } \left| \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right| < 1; \\ 1 - \left| \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right|, & \text{если } \left| \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right| \geq 1. \end{cases} \quad (6.345)$$

Так как минимум имеет место при  $u_j(t) = u_j^*(t)$ , находим, что  $u_j^*(t)$  связаны с  $q_j^*(t)$  [и, следовательно, с  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$  по (6.340)] следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u_j^*(t) &= 0 && \text{если } -1 < \frac{q_j^*(t)}{c_j} < 1; \\ u_j^*(t) &= +1, && \text{если } \frac{q_j^*(t)}{c_j} < -1; \\ u_j^*(t) &= -1, && \text{если } \frac{q_j^*(t)}{c_j} > +1; \\ 0 &\leq u_j^*(t) \leq \dots 1, && \text{если } \frac{q_j^*(t)}{c_j} = -1; \\ -1 &\leq u_j^*(t) \leq 0, && \text{если } \frac{q_j^*(t)}{c_j} = +1. \end{aligned} \right\} \quad (6.346)$$

<sup>1</sup> Уравнения (6.340) и (6.341) идентичны (6.60) и (6.68). Величины, отмеченные звездочкой \*, в уравнениях (6.340) и (6.341), относятся к траектории, оптимальной по расходу топлива, а в (6.67) и (6.68) — к траектории, оптимальной по быстродействию.

Чтобы записать соотношения (6.346) в компактной форме, определим функцию «зоны нечувствительности», обозначаемую далее через  $\text{dez } \{a\}$ , следующим образом:

$$a = \text{dez } \{b\}. \left. \begin{array}{l} \text{Это означает, что} \\ a = 0, \quad \text{если } |b| < 1; \\ a = \text{sign } \{b\}, \text{ если } |b| > 1; \\ 0 \leq a \leq 1, \quad \text{если } b = +1; \\ -1 \leq a \leq 0, \quad \text{если } b = -1. \end{array} \right\} \quad (6.347)$$

Уравнение (6.346) можно теперь записать в компактной форме:

$$u_j^*(t) = -\text{dez} \left\{ \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right\} = -\text{dez} \left\{ \frac{1}{c_j} \sum_{i=1}^n b_{ij} [\mathbf{x}^*(t), t] p_i^*(t) \right\}. \quad (6.348)$$

Строгое доказательство того, что управление (6.346) действительно минимизирует функцию  $\psi [\mathbf{u}(t)]$ , очень длинно и мало полезно для понимания задачи. Для иллюстрации уравнения (6.345) и (6.346) лучше всего начертить возможные значения функции

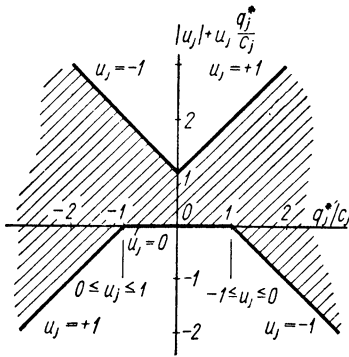


Рис. 6.15. График функции  $|u_j| + u_j \left( \frac{q_j^*}{c_j} \right)$  в зависимости от  $\frac{q_j^*}{c_j}$  для  $|u_j| \leq 1$

возможные значения функции  $\left\{ |u_j(t)| + u_j(t) \times \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right\}$  для всех  $u_j(t)$ , удовлетворяющих ограничениям по величине  $|u_j(t)| \leq 1$ , что и сделано на рис. 6.15. В соответствии с величиной  $u_j(t)$  значения функции  $\left\{ |u_j(t)| + u_j(t) \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right\}$  в зависимости от  $\frac{q_j^*(t)}{c_j}$  принадлежат заштрихованной области. Как показано на рис. 6.15, управление, определенное соотношениями (6.346), дает минимальное значение, соответствующее выражению (6.345). С другой стороны, управление  $u_j(t) = \text{sign} \left\{ \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right\}$  максимизирует  $\psi [\mathbf{u}(t)]$ .

Заметим, что соотношения (6.346) однозначно определяют величину и знак оптимального по расходу топлива управления  $u_j^*(t)$  через  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$  при условии, что

$$\left| \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right| \neq 1.$$

Если  $\left| \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right| = 1$ , то можно указать знак, но нельзя найти величину управления оптимального по расходу топлива. Эти соображения приводят к определению нормальной и вырожденной задач на оптимум расхода топлива.

#### Определение 6.11. Нормальная задача на оптимум расхода топлива.

Предположим, что на интервале  $[t_0, \hat{T}]$ , когда время перехода не фиксировано, или на интервале  $[t_0, T_f]$ , при фиксированном времени,

имеется счетное множество моментов времени  $\tau_{1j}, \tau_{2j}, \dots, \tau_{rj}$ ,

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{\gamma j} \in [t_0, \hat{T}] \text{ или } \tau_{\gamma j} \in [t_0, T_f]; \\ \gamma = 1, 2, \dots \quad j = 1, 2, \dots, r \end{array} \right\} \quad (6.349)$$

таких, что

$$\left| \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right| = \frac{1}{c_j} \sum_{i=1}^n b_{ij} |\mathbf{x}^*(t), t| p_i^*(t)| = 1; \quad (6.350)$$

в том случае, если  $t = \tau_{\gamma j}$  для всех  $j = 1, 2, \dots, r$ . Тогда задачу на оптимум расхода топлива будем называть нормальной. Моменты времени  $\tau_{\gamma j}$  будем называть моментами переключения.

На рис. 6.16 показаны функция  $\frac{q_j^*(t)}{c_j}$  и соответствующее управление  $u_j^*(t)$ , определенное по уравнению  $u_j^*(t) = -\text{dez} \left\{ \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right\}$ . Заметим,

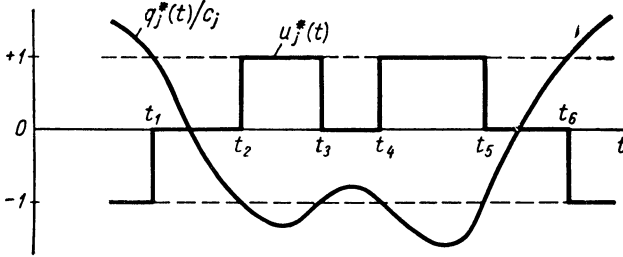


Рис. 6.16. Функция  $\frac{q_j^*(t)}{c_j}$  дает управление  $u_j^*(t) = -\text{dez} \left\{ \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right\}$ , являющееся кусочно постоянной функцией времени, которая может принимать три различных значения  $(-1; 0; +1)$

что функция  $\frac{q_j^*(t)}{c_j}$  равна  $+1$  или  $-1$  всего в шести изолированных точках на оси времени. В этом случае оптимальное по топливу управление есть кусочно-постоянная функция времени, и ее значения равны  $+1, 0$  или  $-1$ .

Если все функции  $\frac{q_j^*(t)}{c_j}$  обладают свойствами, аналогичными показанным на рис. 6.16, то задача на оптимум расхода топлива будет нормальной. Кусочно-постоянные управления  $u_j^*(t)$  принято называть управлениями типа включено—выключено или управлением с тремя уровнями  $+1, 0$  и  $-1$ . Число переключений управления, показанного на рис. 6.16, равно шести.

Читатель, видимо, догадался, что вырожденная задача возникает в том случае, если  $\left| \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right| = 1$  в течение конечного интервала времени.

Это действительно имеет место. Введем следующее определение.

**Определение 6.12. Вырожденная задача на оптимум расхода топлива.**

Предположим, что на интервале  $[t_0, \hat{T}]$  или  $[t_0, T_f]$  имеется один (или более) подынтервал  $[T_1, T_2]$  такой, что

$$\left| \frac{q_j^*(t)}{c_j} \right| = \left| \frac{1}{c_j} \sum_{i=1}^n b_{ij} |\mathbf{x}^*(t), t| p_i^*(t) \right| = 1 \quad (6.351)$$

для всех  $t \in [T_1, T_2]$ .



Такую задачу будем называть вырожденной, а интервалы  $[T_1, T_2]_i$  — интервалами вырожденности.

Функция  $\frac{q_j^*(t)}{c_j}$ , показанная на рис. 6.17, соответствует вырожденной задаче на оптимум расхода топлива. Имеются два интервала вырожденности:  $[\tau_2, \tau_3]$  и  $[\tau_5, \tau_6]$ . За исключением моментов переключения  $\tau_1, \tau_4$  и  $\tau_7$ , управление  $u_j^*(t)$  однозначно определено значением  $\frac{q_j^*(t)}{c_j}$ , если  $t \in [\tau_2, \tau_3]$  и  $t \in [\tau_5, \tau_6]$ . Для  $t \in [\tau_2, \tau_3]$  известно, что  $u_j^*(t)$  не положительно, а для  $t \in [\tau_5, \tau_6]$  — что  $u_j^*(t)$  не отрицательно. Однако необходимые условия, даваемые принципом минимума, не позволяют определить  $u_j^*(t)$  через  $x^*(t)$  и  $p^*(t)$  на интервалах вырожденности.

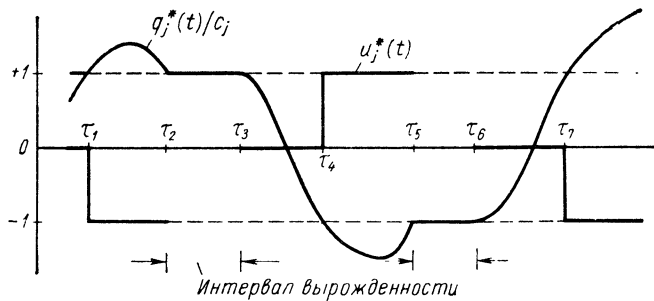


Рис. 6.17. Иллюстрация условия вырожденности

Как и в § 6.3, это не означает, что оптимального по расходу топлива управления не существует. Это лишь означает, что необходимое условие  $H[x^*(t), p^*(t), u^*(t), t] \leq H[x^*(t), p^*(t), u^*(t), t]$  не позволяет установить однозначного соответствия между оптимальным по расходу топлива управлением  $u^*(t)$ , оптимальными траекторией  $x^*(t)$  и дополнительной переменной  $p^*(t)$ .

Вырожденные задачи на оптимум расхода топлива обсудим в § 6.22.

Сформулируем следующую теорему (которая аналогична теореме 6.2) для нормальной задачи на оптимум расхода топлива:

**Теорема 6.11. Принцип релейного управления («включено—выключено»)**<sup>1</sup>. Пусть  $u^*(t)$  — оптимальное по расходу топлива управление для задачи 6.2а, а  $x^*(t)$  и  $p^*(t)$  — соответствующие ему траектории состояния системы и дополнительной переменной. Если задача нормальна (см. определение 6.11), то компоненты  $u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_r^*(t)$  управления  $u^*(t)$  должны определяться уравнением

$$u_j^*(t) = -\text{dez} \left\{ \frac{1}{c_j} \sum_{i=1}^n b_{ij} [x^*(t), t] p_i^*(t) \right\}, \quad (6.352)$$

$$j = 1, 2, \dots, r$$

для  $t \in [t_0, T]$  или  $t \in [t_0, T_f]$ . Уравнение (6.352) можно записать более компактно:

$$u^*(t) = -\text{DEZ} \{ C^{-1} B' [x^*(t), t] p^*(t) \}, \quad (6.353)^1$$

<sup>1</sup> Векторная функция  $\text{DEZ} \{ \}$  определяется следующим образом: Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_r$  — компоненты вектора  $\mathbf{a}$  и  $b_1, b_2, \dots, b_r$  — компоненты вектора  $\mathbf{b}$ ; тогда  $\mathbf{a} = \text{DEZ} \{ \mathbf{b} \}$  означает, что  $a_j = \text{dez} \{ b_j \}$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , где скалярная функция  $\text{dez} \{ b_j \}$  определяется уравнением (6.347).

где

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & c_r \end{bmatrix}. \quad (6.354)$$

Таким образом, если оптимальная по расходу топлива задача нормальна, то компоненты оптимального управления являются кусочно-постоянными функциями времени и могут принимать только три значения  $+1$ ,  $0$ , и  $-1$  (т. е. переключаться между  $+1$ ,  $0$ , и  $-1$ ). Если задача на оптимум расхода топлива нормальна, управление  $u^*(t)$  можно «исключить» из необходимых условий, устанавливаемых леммой 6.7. Таким путем мы получим упрощенные необходимые условия для нормальной задачи на оптимум расхода топлива и теорему, подобную теореме 6.3. Сделать это предлагаем самому читателю.

**Упражнение 6.18.** Используя теорему 6.11 и лемму 6.7, получите теорему, устанавливающую упрощенные необходимые условия для нормальной задачи на оптимум расхода топлива (аналогичную теореме 6.3).

**Упражнение 6.19.** Рассмотрите систему и области  $S$ , описанные в примере 6.3. Примите, что минимизируемый функционал равен  $\int_0^T \{|u_1(t)| + |u_2(t)|\} dt$ , а  $T$  не задано.

Получите упрощенные необходимые условия, полагая, что задача нормальна.

До сих пор мы следовали в наших рассуждениях порядку § 6.3 до примера 6.3 включительно. Читатель припоминает, что остальная часть § 6.3 была связана с задачей использования необходимых условий для отыскания оптимального управления. Аналогично можно поступить при решении задачи на оптимум расхода топлива. Во-первых необходимо найти управление, которое минимизирует гамильтониан абсолютно ( $H$  — минимальное управление, определение 6.6); во-вторых, найти канонические уравнения, определяющие  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{p}(t)$ , и, наконец, определить начальное значение  $p(t_0)$  таким образом, чтобы получившееся состояние, дополнительная переменная и управление удовлетворяли необходимым условиям. Так как все это детально рассматривалось в § 6.3, мы приведем ниже только ход рассуждений:

1. Формируем гамильтониан:

$$H = H[x(t), p(t), u(t), t] = \sum_{j=1}^n c_j |u_j(t)| + \langle f[x(t), t], p(t) \rangle + \langle u(t), B'[x(t), t]p(t) \rangle. \quad (6.355)$$

2. Определяем  $H$ -минимальное управление  $u^0(t)$ :

$$u^0(t) = -\text{DEZ} \{C^{-1}B'[x(t), t]p(t)\}. \quad (6.356)$$

3. Обозначаем

$$H^0 = H^0[x(t), p(t), t] = H[x(t), p(t), u^0(t), t] \quad (6.357)$$

при  $u(t) = u^0(t)$ .

4. Рассматриваем дифференциальные уравнения

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H^0}{\partial p(t)}; \quad (6.358)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H^0}{\partial x(t)}. \quad (6.359)$$

5. Выберем наугад начальное значение  $p(t_0)$  при заданном начальном состоянии  $x(t_0)$ .

Для данного  $\mathbf{x}(t_0)$  и предполагаемого  $\mathbf{p}(t_0)$ , решая уравнения (6.358) и (6.359), получим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}[t, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{p}(t_0)]; \\ \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}[t, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{p}(t_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (6.360)$$

Мы можем теперь повторять эти действия и изменять  $\mathbf{p}(t_0)$  до тех пор, пока не будут удовлетворены все необходимые условия. Предлагаем читателю самостоятельно составить список вопросов, как в § 6.3, и построить логическую диаграмму в виде блок-схемы, подобную приведенной на рис. 6.7.

**Упражнение 6.20.** Формализуйте шаги, связанные с предыдущим обсуждением, при помощи «опыта», аналогичного описанному в шаге 3а § 6.3. Сформулируйте и докажите леммы, аналогичные леммам 6.2 и 6.3. Продумайте значение существования многих управлений, удовлетворяющих начальным условиям.

Итак, мы установили, что для задачи на оптимум расхода топлива компоненты оптимального управления представляют собой кусочно-постоянные функции времени и могут принимать (в каждый момент времени) значения  $+1$ , или  $0$ , или  $-1$ . Таким образом, оптимальные управления имеют периоды, когда  $\mathbf{u} = 0$ , и за счет этого экономится топливо. В следующем параграфе мы специализируем эти результаты для случая оптимального по расходу топлива управления линейной системой с постоянными параметрами.

#### 6.14. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В этом параграфе мы воспользуемся результатами предыдущего параграфа для случая линейных систем с постоянными параметрами. При этом будем рассматривать задачу с фиксированным временем перехода. Иначе говоря, рассмотрим задачу отыскания оптимального по расходу топлива управления, которое переводит заданное начальное состояние  $\xi$  в заданное конечное состояние  $\theta$  в течение установленного времени  $T_f$ . Для того чтобы мотивировать выбор задачи с фиксированным временем, сделаем ряд замечаний относительно задачи с незадаанным временем перехода.

Предположим, что динамическая система описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (6.361)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  — состояние системы и  $\mathbf{u}(t)$  — управление. Будем считать, что начальное состояние  $\mathbf{x}(0) = \xi \neq 0$ , и прикладываем управление

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \text{ для всех } t > 0. \quad (6.362)$$

Тогда свободное решение  $\mathbf{x}^0(t)$  уравнения (6.361) запишется в виде

$$\mathbf{x}^0(t) = e^{\mathbf{A}t}\xi. \quad (6.363)$$

Предположим, что все собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  имеют отрицательные вещественные части. Это означает, что система устойчива и не обладает интегрирующими свойствами. В этом случае решение  $\mathbf{x}^0(t)$  будет приближаться к нулю, точнее

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}^0(t) = \mathbf{0}. \quad (6.364)^1$$

Ясно, что если мы хотим найти оптимальное по расходу топлива управление, переводящее любое начальное состояние  $\xi$  в  $\mathbf{0}$  для устойчивой системы, и не указываем времени перехода, то оптимальным по расходу

<sup>1</sup> См. § 3.26.

топлива управлением будет  $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{0}$ , и время перехода будет бесконечным. Строго говоря, управление  $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{0}$  лишь  $\varepsilon$ -оптимально, так как оно не переводит  $\xi$  в  $\mathbf{0}$  в течение конечного времени. Тем не менее нетрудно видеть, что постановка такого рода задачи с незадаанным временем не ведет к полезному решению. С другой стороны, если одно или больше собственных значений  $\mathbf{A}$  имеют неотрицательные вещественные части, то задача об оптимальном по расходу топлива переходе в начало координат с незадаанным временем перехода оказывается нетривиальной.

Если в задаче на оптимум по расходу топлива дано конечное время перехода  $T_f$ , то она может иметь нетривиальные решения независимо от того, каковы собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ . Именно поэтому точная формулировка задачи 6.2б включает заданное время перехода.

**Задача 6.2б.** Задача об оптимальном по расходу топлива регуляторе для линейной системы с постоянными параметрами с заданным временем перехода. Дана динамическая система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (6.365)$$

где

$\mathbf{x}(t)$  —  $n$ -мерный вектор;

$\mathbf{A}$  — матрица системы размера  $n \times n$  с постоянными коэффициентами;

$\mathbf{u}(t)$  —  $r$ -мерный вектор.

Предположим, что система (6.365) полностью управляема и что компоненты  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , ...,  $u_r(t)$  управления  $\mathbf{u}(t)$  ограничены по величине соотношением

$$|u_j(t)| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, r \text{ для любого } t. \quad (6.366)$$

Заданы начальное время  $t_0 = 0$  и начальное состояние системы (6.365):

$$\mathbf{x}(0) = \xi. \quad (6.367)$$

Заданы конечное состояние  $\theta$  (необязательно  $\mathbf{0}$ ) и конечное время  $T_f$  (большее, чем минимальное время  $T^*$ , требующееся для перевода  $\xi$  в  $\theta$ ). Необходимо найти оптимальное по топливу управление  $\mathbf{u}^*(t)$ , переводящее систему (6.365) из  $\xi$  в  $\theta$  за время  $T_f$  и минимизирующее функционал

$$F(\mathbf{u}) = F = \int_0^{T_f} \sum_{j=1}^r |u_j(t)| dt. \quad (6.368)^1$$

В этом параграфе мы приводим различные теоретические результаты, полученные для данной задачи. Будем применять способ, аналогичный тому, который использовался в § 6.3, и поэтому читатель сможет провести аналогии и найти различия между двумя оптимальными задачами. В частности, установим необходимые условия в теореме 6.12; достаточные условия нормальности задачи в теореме 6.13; единственность оптимального по расходу топлива управления в теореме 6.14 и единственность экстремальных управлений в теореме 6.15. Таким образом, нашей целью является продублировать последовательность § 6.5 в отыскании теоретических результатов для задачи на оптимум расхода топлива.

При помощи принципа минимума легко получить необходимые условия для задачи 6.2б. Предлагаем читателю проверить следующую теорему, просто просмотрев формулировку леммы 6.7.

**Теорема 6.12. Необходимые условия для задачи 6.2б.** Пусть  $\mathbf{u}^*(t)$  — оптимальное по расходу топлива управление, переводящее  $\xi$  в  $\theta$ . Обозна-

<sup>1</sup> Для упрощения (6.324) и дальнейших вычислений мы приняли  $c_j = 1$ .

чим через  $\mathbf{x}^*(t)$  траекторию системы (6.365), соответствующую  $\mathbf{u}^*(t)$ , исходящую из  $\xi$  при  $t_0 = 0$  и попадающую в состояние  $\theta$  в заданный момент времени  $T_f$  [т. е.  $\mathbf{x}^*(0) = \xi$ ,  $\mathbf{x}^*(T_f) = \theta$ ]. Тогда существует соответствующий вектор  $\mathbf{p}^*(t)$  такой, что

а)  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$  являются решениями канонических уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t); \quad (6.369)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\mathbf{A}'\mathbf{p}^*(t), \quad (6.370)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{x}^*(0) = \xi; \quad \mathbf{x}^*(T_f) = \theta; \quad (6.371)$$

б) соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r |u_i^*(t)| + \langle \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{B}'\mathbf{p}^*(t) \rangle &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^r |u_i^*(t)| + \langle \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{B}'\mathbf{p}^*(t) \rangle \end{aligned} \quad (6.372)$$

выполняется для всех допустимых  $\mathbf{u}(t)$  и  $t \in [0, T_f]$ . Последнее соотношение, в свою очередь, дает уравнение

$$\mathbf{u}^*(t) = -\text{DEZ}\{\mathbf{q}^*(t)\} = -\text{DEZ}\{\mathbf{B}'\mathbf{p}^*(t)\} \quad (6.373)$$

или, в записи через компоненты,

$$u_j^*(t) = -\text{dez}\{q_j^*(t)\} = -\text{dez}\{b_j, \mathbf{p}^*(t)\}, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (6.374)$$

Можно заметить, что необходимые условия не дают нам явной информации относительно граничных значений  $\mathbf{p}^*(t)$ . Иначе говоря, мы не знаем ни  $\mathbf{p}^*(0)$ , ни  $\mathbf{p}^*(T_f)$ . Необходимые условия не дают нам никакой информации относительно величины функции Гамильтона вдоль оптимальной траектории. Так как система инвариантна по времени и функционал не зависит явно от  $t$ , то известно<sup>1</sup>, что гамильтониан должен быть постоянным, т. е.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r |u_i^*(t)| + \langle \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{B}'\mathbf{p}^*(t) \rangle &= \\ &= \gamma = \text{const для } t \in [0, T_f], \end{aligned} \quad (6.375)$$

но мы не знаем величину постоянной  $\gamma$ .

Рассмотрим вектор  $\mathbf{p}^*(t)$ , который является решением линейного однородного уравнения вида

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\mathbf{A}'\mathbf{p}^*(t); \quad (6.376)$$

это уравнение то же самое, что для задачи об оптимальном быстродействии [см. уравнение (6.140) в теореме 6.4]. Если обозначить через

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}^*(0) \quad (6.377)$$

начальное значение дополнительного вектора, то известно, что

$$\mathbf{p}^*(t) = e^{-\mathbf{A}'t}\boldsymbol{\pi}. \quad (6.378)$$

Так как фундаментальная матрица  $e^{-\mathbf{A}'t}$  невырожденная, то начальное условие

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0} \quad (6.379)$$

<sup>1</sup> Определение функции  $\text{dez}\{ \}$  см. соотношения (6.347).

означает, что

$$\mathbf{p}^*(t) = \mathbf{0} \text{ для любого } t \in [0, T_f]. \quad (6.380)$$

Отсюда, в свою очередь, следует [по уравнению (6.373)], что

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{0} \text{ для любого } t \in [0, T_f]. \quad (6.381)$$

В § 6.5 мы пришли к выводу (см. теорему 6.6), что задача об оптимальном быстрейшем нормальна тогда, когда нормальна система  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ <sup>1</sup>. Получим теперь условия нормальности для задачи на оптимум расхода топлива. Сначала, как и в § 6.5, получим необходимые условия вырожденности задачи на оптимум по расходу топлива (см. определение 6.12), а затем преобразуем их в достаточные условия нормальности. Понятие нормальности будет существенным при доказательстве теорем единственности.

Прежде всего мы установили теоремой 6.12, что оптимальное по расходу топлива управление  $\mathbf{u}^*(t)$  должно быть связано с соответствующим дополнительным вектором  $\mathbf{p}^*(t)$  соотношением

$$u_j^*(t) = -\operatorname{dez} \{ \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle \}, \quad (6.382)$$

$$j = 1, 2, \dots, r$$

которое означает, что

$$\left. \begin{aligned} u_j^*(t) &= 0, & \text{если } |\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle| < 1; \\ u_j^*(t) &= +1, & \text{если } \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle < -1; \\ u_j^*(t) &= -1, & \text{если } \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle > +1; \\ 0 &\leq u_j^*(t) \leq +1, & \text{если } \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle = -1; \\ -1 &\leq u_j^*(t) \leq 0, & \text{если } \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle = +1. \end{aligned} \right\} \quad (6.383)$$

В случае вырожденной задачи на оптимум расхода топлива необходимо, чтобы на интервале управления  $[0, T_f]$  существовал хотя бы один интервал  $[t_1, t_2]$  для некоторого  $j$ , когда  $|\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle| = 1$  для всего  $t \in [t_1, t_2]$ . Для определенности предположим, что выполняется соотношение

$$\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle = +1 \text{ при всех } t \in [t_1, t_2], \quad (6.384)$$

и изучим следствия (6.384). Так как функция (времени)  $\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle$  постоянна, то все ее производные по времени должны быть равны нулю. Путем последовательного дифференцирования по времени уравнения (6.384) получим набор уравнений

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathbf{A}\mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle &= 0; \\ \langle \mathbf{A}^2\mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle &= 0; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ \langle \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle &= 0; \\ \langle \mathbf{A}^n\mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ для всех } t \in [t_1, t_2] \quad (6.385)$$

<sup>1</sup> См. § 4.21. Еще раз напомним, что физический смысл нормальности системы состоит в том, что любая компонента управляющего вектора может влиять на все фазовые координаты (или переменные состояния).

Выберем первые  $n$  уравнений и перепишем их следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{A} \mathbf{b}_j \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_j \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}_j \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{A}^n \mathbf{b}_j \rightarrow \end{bmatrix} \mathbf{p}^*(t) = 0. \quad (6.386)$$

Определим теперь матрицу  $\mathbf{G}_j$ <sup>1</sup> размера  $n \times n$  как матрицу, столбцами которой являются векторы  $\mathbf{b}_j, \mathbf{A} \mathbf{b}_j, \dots$

$$\mathbf{G}_j = [\mathbf{b}_j \mid \mathbf{A} \mathbf{b}_j \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}_j]. \quad (6.387)$$

Уравнение (6.386) сведется тогда к уравнению

$$\mathbf{G}_j' \mathbf{A}' \mathbf{p}^*(t) = \mathbf{0} \text{ для всех } t \in [t_1, t_2]. \quad (6.388)$$

Но из соотношения (6.384) следует, что  $\mathbf{p}^*(t) \neq \mathbf{0}$ . Поэтому для выполнения условия (6.388) необходимо, чтобы матрица  $\mathbf{G}_j' \mathbf{A}'$  была вырожденной. Таким образом, должно быть

$$\det(\mathbf{G}_j' \mathbf{A}') = (\det \mathbf{A}) (\det \mathbf{G}_j) = 0. \quad (6.389)$$

Уравнение (6.389) выполняется, если

$$\text{или } \det \mathbf{A} = 0, \quad (6.390)$$

$$\text{или (и) } \det \mathbf{G}_j = 0. \quad (6.391)$$

Если  $\det \mathbf{G}_j = 0$ , то  $\mathbf{G}_j$  вырождена; это означает, что система  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$  не является нормальной системой (см. определение 4.15). Итак, если линейная система  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$  не является нормальной, то задача на оптимум расхода топлива вырождена.

Предположим теперь, что система нормальна ( $\mathbf{G}_j \neq 0$  для любого  $j$ ). Задача может оказаться вырожденной, если  $\det \mathbf{A} = 0$ , т. е. когда матрица системы  $\mathbf{A}$  вырождена.  $\mathbf{A}$  может быть вырождена в том случае, если хотя бы одно из собственных значений  $\mathbf{A}$  равно 0 (почему?). Это означает, что система обладает способностью интегрировать. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 6.13.** **Достаточные условия нормальности задачи 6.26 или необходимые условия вырожденности задачи 6.26.** Достаточным условием нормальности задачи 6.26 является

$$\det(\mathbf{G}_j' \mathbf{A}') \neq 0 \text{ для всех } j = 1, 2, \dots, r, \quad (6.392)$$

где  $\mathbf{G}_j$  определяется уравнением (6.387). Далее, если задача 6.26 вырождена, необходимо, чтобы  $\det(\mathbf{G}_j', \mathbf{A}') = 0$  для некоторых  $j = 1, 2, \dots, r$ . Итак, если система  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$  нормальна и  $\mathbf{A}$  — невырожденная матрица, то задача 6.26 является нормальной задачей на оптимум расхода топлива согласно определению 6.11.

В общем случае нельзя доказать, что соотношение (6.392) является также и необходимым условием нормальности задачи на оптимум расхода

<sup>1</sup> Отметим, что точно такая же матрица была использована в задаче об оптимальном быстродействии [см. (6.158)].

топлива. Как мы увидим в гл. 8, существуют системы, для которых задача на оптимум расхода топлива для одних начальных условий вырождена, а для других — нормальна.

В задаче об оптимальном быстродействии мы показали, что для нормальной задачи оптимальное управление единственно (см. теорему 6.7 и упражнение 6.7). То же справедливо и для задачи на оптимум расхода топлива. Другими словами, если задача на оптимум расхода топлива нормальна, то оптимальное управление (если оно существует) единственно. Следующая теорема строго устанавливает этот результат. Заметим, что ее доказательство аналогично доказательству теоремы 6.7.

**Теорема 6.14. Единственность оптимального по расходу топлива управления для задачи 6.2б.** Если задача на оптимум по расходу топлива 6.2б нормальна, то оптимальное управление (если оно существует) единственно.

**Доказательство.** Предположим, что  $u^*(t)$  и  $\hat{u}^*(t)$  — два различных оптимальных по расходу топлива управления, переводящих  $\xi$  в  $\theta$  за одно и то же время  $T_f$ . Пусть  $x^*(t)$  и  $\hat{x}^*(t)$  — различные траектории, начинающиеся из  $\xi$ . Так как оба управления  $u^*(t)$  и  $\hat{u}^*(t)$  предполагаются оптимальными по расходу топлива, то имеем

$$\int_0^{T_f} \sum_{j=1}^r |u_j^*(t)| dt = \int_0^{T_f} \sum_{j=1}^r |\hat{u}_j^*(t)| dt. \quad (6.393)$$

Решения  $x^*(t)$  и  $\hat{x}^*(t)$  выражаются уравнениями

$$x^*(t) = e^{At} \left[ \xi + \int_0^t e^{-A\tau} B u^*(\tau) d\tau; \right] \quad (6.394)$$

$$\hat{x}^*(t) = e^{At} \left[ \xi + \int_0^t e^{-A\tau} B \hat{u}^*(\tau) d\tau. \right] \quad (6.395)$$

При  $t = T_f$  должно выполняться конечное условие

$$x^*(T_f) = \hat{x}^*(T_f) = \theta, \quad (6.396)$$

и поэтому имеет место следующее (векторное) равенство:

$$\int_0^{T_f} e^{-At} B u^*(t) dt = \int_0^{T_f} e^{-At} B \hat{u}^*(t) dt. \quad (6.397)$$

Пусть  $p^*(t)$  соответствует  $u^*(t)$  и  $x^*(t)$ . Полагая  $\pi = p^*(0)$ , имеем

$$p^*(t) = e^{-A't} \pi. \quad (6.398)$$

Из необходимых условий известно [см. (6.372)], что

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^r |u_j^*(t)| + \langle Ax^*(t), p^*(t) \rangle + \langle Bu^*(t), p^*(t) \rangle \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^r |\hat{u}_j^*(t)| + \langle Ax^*(t), p^*(t) \rangle + \langle B\hat{u}^*(t), p^*(t) \rangle, \end{aligned} \quad (6.399)$$

так как соотношение (6.372) справедливо для всех  $u(t)$  и, в частности, для  $\hat{u}^*(t)$ . Мы предположили, что  $u^*(t)$  и  $\hat{u}^*(t)$  различны, а задача на оптимум расхода топлива нормальна. Предположение о нормальности означает, что неравенство (6.399) является строгим, если только

$$u^*(t) \neq \hat{u}^*(t). \quad (6.400)$$



Поэтому выражение (6.399) сводится к строгому неравенству

$$\sum_{j=1}^r |u_j^*(t)| + \langle \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle < \sum_{j=1}^r |\hat{u}_j^*(t)| + \langle \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle \quad (6.401)$$

в случае, если имеет место условие (6.400).

Если проинтегрировать обе части выражения (6.401), то для различных  $\mathbf{u}^*(t)$  и  $\hat{\mathbf{u}}^*(t)$  получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_f} \sum_{j=1}^r |u_j^*(t)| dt + \int_0^{T_f} \langle \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle dt < \\ & < \int_0^{T_f} \sum_{j=1}^r |\hat{u}_j^*(t)| dt + \int_0^{T_f} \langle \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (6.402)$$

В силу выражения (6.393)

$$\int_0^{T_f} \langle \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle dt < \int_0^{T_f} \langle \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle dt. \quad (6.403)$$

Рассмотрим равенство (6.397), откуда образуем скалярное произведение:

$$\left\langle \boldsymbol{\pi}, \int_0^{T_f} e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t) dt \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\pi}, \int_0^{T_f} e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}^*(t) dt \right\rangle. \quad (6.404)$$

где  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}^*(0)$ . Так как  $\boldsymbol{\pi}$  — постоянный вектор и по выражению (6.398) имеем  $\boldsymbol{\pi} = e^{+\mathbf{A}'t} \mathbf{p}^*(t)$ , то можно видеть, что равенство (6.404) сводится к уравнению

$$\int_0^{T_f} \langle \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle dt = \int_0^{T_f} \langle \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle dt. \quad (6.405)$$

Таким образом, предположение о том, что управления  $\mathbf{u}^*(t)$  и  $\hat{\mathbf{u}}^*(t)$  различны и оптимальны по расходу топлива, привело к противоречивым соотношениям (6.403) и (6.405). Следовательно,  $\mathbf{u}^*(t) = \hat{\mathbf{u}}^*(t)$  для всех  $t \in [0, T_f]$  (за исключением, возможно, моментов переключения). Таким образом, оптимальное управление единственно.

Читатель, видимо, заметил, что получить строгое неравенство (6.402) нам позволило предположение о нормальности системы. Если задача не является нормальной, то соотношение (6.402) не будет строгим неравенством, даже если  $\mathbf{u}^*$  и  $\hat{\mathbf{u}}^*$  различны. Итак, в этом параграфе мы сформулировали задачу на оптимум по расходу топлива (задача 6.2б) и необходимые условия в теореме 6.12; получили достаточные условия нормальности задачи на оптимум по расходу топлива (теорема 6.13) и использовали нормальность при доказательстве теоремы 6.14.

Было бы интересно знать, имеем ли мы дело с задачей, решение которой единственно (если оно существует). Однако с точки зрения отыскания оптимального по расходу топлива управления при помощи необходимых условий было бы еще более полезно установить, одно ли управление удовлетворяет всем необходимым условиям (т. е. единственно ли экстремальное управление). Мы уже обсуждали важность единственности экстремальных управлений для случая задачи об оптимальном быстродействии.

Напомним эти положения, чтобы мотивировать теорему единственности, которую мы докажем в этом параграфе несколько позднее.

Предположим, что оптимальное по расходу топлива управление единственно. Это, естественно, означает, что поверхность, характеризующая расход топлива, имеет вполне определенный абсолютный минимум. Мы не знаем, есть ли другие относительные минимумы. Если имеется много управлений, удовлетворяющих всем необходимым условиям теоремы 6.12, то, кроме абсолютного минимума, может иметь место и относительный (локальный) минимум. В этом случае, чтобы отличить управление, соответствующее абсолютному минимуму, мы должны вычислить расход топлива, требующийся для каждого управления, удовлетворяющего необходимым условиям, и сравнить эти расходы. Естественно, что управление с наименьшим расходом топлива и будет искомым оптимумом. Следующая теорема устанавливает, что предположения, которые гарантируют единственность оптимального по расходу топлива управления, также гарантируют существование только одного управления, удовлетворяющего начальным условиям. Эта теорема (вместе с теоремой 6.12) окажет нам значительную помощь в процессе отыскания оптимального управления.

Сформулируем строго теорему единственности. В формулировку теоремы для полноты мы включили также необходимые условия.

**Теорема 6.15. Единственность экстремальных управлений для задачи 6.26.** Пусть  $T_f$  — заданное положительное время,  $\xi$  — начальное состояние и  $\theta$  — конечное состояние, необязательно начало координат.

Предположим, что  $\hat{u}(t)$  и  $\tilde{u}(t)$  — два допустимых экстремальных управления. Более строго, предполагаем, что:

а) решения системы  $\hat{x}(t)$  и  $\tilde{x}(t)$  таковы, что

$$\hat{x}(t) \text{ соответствует } \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t), \hat{x}(0) = \xi; \quad (6.406)$$

$$\tilde{x}(t) \text{ соответствует } \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t), \tilde{x}(0) = \xi; \quad (6.407)$$

$$\hat{x}(T_f) = \tilde{x}(T_f) = \theta; \quad (6.408)$$

б) существуют соответствующие дополнительные переменные  $\hat{p}(t)$  и  $\tilde{p}(t)$  [первая соответствует  $\hat{u}(t)$  и  $\hat{x}(t)$ , вторая —  $\tilde{u}(t)$  и  $\tilde{x}(t)$ ], удовлетворяющие следующим дифференциальным уравнениям

$$\dot{\hat{p}}(t) = -A'\hat{p}(t); \quad \hat{p}(0) = \hat{\pi} \text{ (неизвестное);} \quad (6.409)$$

$$\dot{\tilde{p}}(t) = -A'\tilde{p}(t); \quad \tilde{p}(0) = \tilde{\pi} \text{ (неизвестное),} \quad (6.410)$$

так что

$$\hat{p}(t) = e^{-A't} \hat{\pi}; \quad (6.411)$$

$$\tilde{p}(t) = e^{-A't} \tilde{\pi}. \quad (6.412)$$

в) имеют место следующие соотношения (почему?) для всех  $u(t) \in \Omega$  и  $t \in [0, T_f]$ :

$$\sum_{j=1}^r |\hat{u}_j(t)| + \langle B\hat{u}(t), \hat{p}(t) \rangle \leq \sum_{j=1}^r |u_j(t)| + \langle Bu(t), \hat{p}(t) \rangle; \quad (6.413)$$

$$\sum_{j=1}^r |\tilde{u}_j(t)| + \langle B\tilde{u}(t), \tilde{p}(t) \rangle \leq \sum_{j=1}^r |u_j(t)| + \langle Bu(t), \tilde{p}(t) \rangle. \quad (6.414)$$

Если задача на оптимум расхода топлива нормальна (см. определение 6.11), то

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t) \text{ для всех } t \in [0, T_f]. \quad (6.415)^1$$

Последнее и означает единственность экстремального управления.

**Доказательство.** Из выражений (6.406)—(6.408) находим

$$\mathbf{0} = \hat{\mathbf{x}}(T_f) = e^{AT_f} \left[ \xi + \int_0^{T_f} e^{-At} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t) dt \right]; \quad (6.416)$$

$$\mathbf{0} = \tilde{\mathbf{x}}(T_f) = e^{AT_f} \left[ \xi + \int_0^{T_f} e^{-At} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(t) dt \right]. \quad (6.417)$$

Так как матрица  $e^{AT_f}$  невырожденная, получаем векторное равенство

$$\int_0^{T_f} e^{-At} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t) dt = \int_0^{T_f} e^{-At} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(t) dt \quad (6.418)$$

Помножим скалярно обе части равенства (6.418) сначала на  $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ , а затем на  $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$  и получим (как?) соотношения

$$\int_0^{T_f} \langle \hat{\boldsymbol{\pi}}, e^{-At} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t) \rangle dt = \int_0^{T_f} \langle \hat{\boldsymbol{\pi}}, e^{-At} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(t) \rangle dt; \quad (6.419)$$

$$\int_0^{T_f} \langle \tilde{\boldsymbol{\pi}}, e^{-At} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t) \rangle dt = \int_0^{T_f} \langle \tilde{\boldsymbol{\pi}}, e^{-At} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(t) \rangle dt. \quad (6.420)$$

Отсюда ввиду соотношений (6.411) и (6.412) получим

$$\int_0^{T_f} \langle \hat{\boldsymbol{p}}(t), \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t) \rangle dt = \int_0^{T_f} \langle \hat{\boldsymbol{p}}(t), \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(t) \rangle dt; \quad (6.421)$$

$$\int_0^{T_f} \langle \tilde{\boldsymbol{p}}(t), \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t) \rangle dt = \int_0^{T_f} \langle \tilde{\boldsymbol{p}}(t), \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(t) \rangle dt. \quad (6.422)$$

Допустим теперь, что  $\hat{\mathbf{u}}$  и  $\tilde{\mathbf{u}}$  отличны друг от друга. Если два экстремальных управления различны и задача на оптимум по расходу топлива нормальна, то из соотношения (6.413) при  $\hat{\mathbf{u}}(t) \neq \tilde{\mathbf{u}}(t)$  найдем

$$\sum_{j=1}^r |\hat{u}_j(t)| + \langle \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t), \hat{\boldsymbol{p}}(t) \rangle < \sum_{j=1}^r |\tilde{u}_j(t)| + \langle \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(t), \hat{\boldsymbol{p}}(t) \rangle. \quad (6.423)$$

Это неравенство должно выполняться для любых допустимых управлений  $\mathbf{u}(t)$ , в том числе и для  $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t)$ . Используя аналогичные рассуждения, из условия (6.415) заключаем, что должно иметь место неравенство

$$\sum_{j=1}^r |\tilde{u}_j(t)| + \langle \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(t), \tilde{\boldsymbol{p}}(t) \rangle < \sum_{j=1}^r |\hat{u}_j(t)| + \langle \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t), \tilde{\boldsymbol{p}}(t) \rangle. \quad (6.424)$$

<sup>1</sup> За исключением, возможно, моментов переключения.

Складывая неравенства (6.423) и (6.424), получим неравенство

$$\langle \widehat{\mathbf{B}\mathbf{u}}(t), \widehat{\mathbf{p}}(t) \rangle + \langle \widetilde{\mathbf{B}\mathbf{u}}(t), \widetilde{\mathbf{p}}(t) \rangle < \langle \widetilde{\mathbf{B}\mathbf{u}}(t), \widehat{\mathbf{p}}(t) \rangle + \langle \widehat{\mathbf{B}\mathbf{u}}(t), \widetilde{\mathbf{p}}(t) \rangle, \quad (6.425)$$

которое справедливо при  $\widehat{\mathbf{u}}(t) \neq \widetilde{\mathbf{u}}(t)$ .

Выражение (6.425), в свою очередь, дает неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_f} [\langle \widehat{\mathbf{B}\mathbf{u}}(t), \widehat{\mathbf{p}}(t) \rangle + \langle \widetilde{\mathbf{B}\mathbf{u}}(t), \widetilde{\mathbf{p}}(t) \rangle] dt < \\ & < \int_0^{T_f} [\langle \widetilde{\mathbf{B}\mathbf{u}}(t), \widehat{\mathbf{p}}(t) \rangle + \langle \widehat{\mathbf{B}\mathbf{u}}(t), \widetilde{\mathbf{p}}(t) \rangle] dt. \end{aligned} \quad (6.426)$$

Таким образом, из предположений о нормальности задачи и о том, что  $\widehat{\mathbf{u}}$  и  $\widetilde{\mathbf{u}}$  различны, вытекает строгое неравенство (6.426). С другой стороны, необходимые условия требуют, чтобы удовлетворялись соотношения (6.421) и (6.422). Складывая правую часть соотношения (6.422) с левой частью соотношения (6.421), а также их левые части, получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_f} [\langle \widehat{\mathbf{B}\mathbf{u}}(t), \widehat{\mathbf{p}}(t) \rangle \mp \langle \widetilde{\mathbf{B}\mathbf{u}}(t), \widetilde{\mathbf{p}}(t) \rangle] dt = \\ & = \int_0^{T_f} [\langle \widetilde{\mathbf{B}\mathbf{u}}(t), \widehat{\mathbf{p}}(t) \rangle \mp \langle \widehat{\mathbf{B}\mathbf{u}}(t), \widetilde{\mathbf{p}}(t) \rangle] dt. \end{aligned} \quad (6.427)$$

Но соотношения (6.426) и (6.427) противоречат друг другу. По этой причине  $\widehat{\mathbf{u}}$  и  $\widetilde{\mathbf{u}}$  не могут быть различными. Таким образом, единственность экстремальных управлений доказана.

Обе рассмотренные теоремы единственности основывались на том, что задача об оптимуме расхода топлива предполагалась нормальной. В теореме 6.13 мы изложили достаточное условие нормальности задачи. Заметим еще раз, что это условие не является необходимым. Может оказаться, что задача нормальна даже тогда, когда не выполняется достаточное условие. Возможно также, как мы увидим в гл. 8, что задача для некоторых начальных условий нормальна, а для других — нет.

В следующем параграфе сформулируем несколько других классов задач на оптимум расхода топлива, которые представляют собой математическую формулировку иных физических положений.

**Упражнение 6.21.** В § 6.5 мы доказали (теорема 6.8), что если собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  — действительные числа, то каждая функция  $\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{p}^*(t) \rangle$  имеет не более  $n - 1$  нулей. Используйте эту теорему, чтобы установить верхнюю границу числа переключений для нормальной задачи на оптимум расхода топлива.

**Упражнение 6.22.** Попробуйте показать, что соотношение (6.392) в теореме 6.13 является также необходимым условием нормальности задачи 6.26. Почему этого нельзя сделать? Можно ли установить дополнительные предположения, при которых соотношение (6.392) станет необходимым условием?

**Упражнение 6.23.** Еще раз рассмотрите линейную систему  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ ; начальное состояние  $\xi$ , конечное состояние  $\theta$  и конечное время  $T_f$  связаны уравнением  $\xi = e^{-\mathbf{A}T_f}\theta$ . Найдите оптимальное по расходу топлива управление. Объясните физический смысл ответа. Является ли это оптимальное управление единственным и в том случае, когда матрица  $\mathbf{A}$  вырождена?

**Упражнение 6.24.** Достаточные условия теоремы 6.13 получены для задачи 6.26. Предположим, что в формулировке задачи 6.26 мы заменили конечное состояние  $\theta$  произ-

вольной областью  $S$ , и рассматриваем задачу об оптимальном расходе топлива при переводе  $\xi$  в  $S$  в течение заданного или незаданного времени. Как вы считаете, останется ли в этом случае соотношение (6.392) достаточным условием нормальности? Объясните данное положение.

**Упражнение 6.25.** Рассмотрите линейную систему с переменными параметрами второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= a(t)x_1(t) + b(t)x_2(t) + c(t)u(t). \end{aligned} \right\} \quad (6.428)$$

Считайте, что  $|u_j(t)| \leq 1$  для всего  $t$  и  $x(t_0) = \xi$  задано, а функционал для расхода топлива имеет вид  $\int_0^{T_f} |u(t)| dt$  ( $T_f$  — фиксировано; и дано конечное состояние  $\theta$ ). Можете ли вы получить достаточные условия для  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ , при которых задача на оптимум расхода топлива нормальна?

### 6.15. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ И ФУНКЦИОНАЛЫ

В этом параграфе мы кратко рассмотрим различные варианты формулировок задачи на оптимум расхода топлива. Необходимость таких вариантов возникает из-за внутренней связи между временем перехода и израсходованным топливом. Может случиться, что в одном случае мы захотим зафиксировать время перехода априори; во втором случае мы захотим указать лишь верхнюю границу времени перехода, а в третьем наложить ограничения по расходу топлива и потребовать минимального по времени решения. В любом из конкретных положений проектировщик должен выбрать формулировку, которая лучше всего подходит для данной задачи и при этом получается возможно более простой закон управления.

Чтобы проиллюстрировать эти положения, мы сформулируем ряд задач об оптимальном управлении, в которых система, область ограничений управления, начальное состояние и область  $S$  для всех задач одинаковы, а затем установим особенности каждой из формулировок.

Дана система с зависящими от времени коэффициентами:

$$\dot{x}(t) = f[x(t)] + B[x(t)]u(t). \quad (6.429)$$

Дана область ограничений  $\Omega$  в  $R_r$ :

$$\Omega = \{u(t) : |u_j(t)| \leq 1, j = 1, 2, \dots, r\}. \quad (6.430)$$

Заданы функционал для расхода топлива

$$F(u) = \int_0^T \sum_{j=1}^r |u_j(t)| dt \quad (6.431)$$

и начальное состояние  $\xi$ , а также область  $S$  (в фазовом пространстве  $R_n$ ).

Найти допустимое управление, переводящее  $\xi$  в  $S$ , которое:

минимизирует функционал для расхода топлива  $F(u)$  при незаданном  $T$  (задача 6.2в);

минимизирует функционал  $F(u)$  при  $T = T_f$ ,  $T_f$  — фиксировано (задача 6.2г);

минимизирует функционал  $F(u)$  при  $T \leq T_f$ ,  $T_f$  — фиксировано (задача 6.2д);

минимизирует время  $T$  при ограничении  $F(u) \leq \Phi$ , где  $\Phi$  — заданная положительная постоянная (задача 6.2е);

минимизирует функционал

$$J(u) = kT + F(u) = \int_0^T \left\{ k + \sum_{j=1}^r |u_j(t)| \right\} dt,$$

где  $T$  не задано и  $k$  — заданная положительная постоянная (задача 6.2ж).

Мы уже обсуждали задачу с заданным временем 6.2в и задачу с фиксированным временем 6.2г. Задачи 6.2д и 6.2е, по сути дела, противоположны друг другу. В задаче 6.2д мы хотим минимизировать расход топлива для заданного верхнего предела времени перехода, в то время как в задаче 6.2е — минимизировать время при заданном верхнем пределе расходуемого топлива. Наконец, в задаче 6.2ж представляет интерес минимизация линейной комбинации из приведенного времени и потребляемого топлива.

Лучший путь выделить сходства и различия этих пяти задач состоит в том, чтобы рассмотреть необходимые условия. Если сделать это, то обнаружится, что для каждой задачи вид или характер оптимального управления остаются теми же самыми, а различия учитываются условиями трансверсальности.

Условимся использовать индексы в, г, д, е, ж для величин, относящихся к задачам 6.2в; 6.2г; 6.2д; 6.2е и 6.2ж соответственно. Итак, переведем каждую задачу в задачу с нефиксированным временем, добавив к  $n$ -мерному фазовому пространству еще одну переменную (см. § 5.14).

Задача 6.2в является задачей с нефиксированным временем и поэтому в переформулировке не нуждается.

В задачах 6.2г и 6.2д определим дополнительную переменную  $x_{n+1}$ , положив

$$x_{n+1}(t) = t, \quad (6.432)$$

причем  $x_{n+1}$  удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\dot{x}_{n+1}(t) = 1 \quad (6.433)$$

и начальному условию

$$x_{n+1}(t) = 0. \quad (6.434)$$

В задаче 6.2г определим область  $S_g$  в  $n + 1$ -мерном пространстве как

$$S_g = \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) : \mathbf{x} \in S \text{ и } x_{n+1} = T_f\}. \quad (6.435)$$

В задаче 6.2д определим область  $S_d$  в  $n + 1$ -мерном пространстве как

$$S_d = \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) : \mathbf{x} \in S \text{ и } x_{n+1} \in [0, T_f]\}. \quad (6.436)$$

В задаче 6.2е ограничен расход топлива, и для него определим дополнительную переменную  $x_{n+1}(t)$ , как

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^r |u_i(\tau)| d\tau. \quad (6.437)$$

В этом случае  $x_{n+1}$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^r |u_i(t)| \quad (6.438)$$

и начальному условию

$$x_{n+1}(0) = 0. \quad (6.439)$$

Для этой задачи (6.2е) определим область  $S_e$  в  $n + 1$ -мерном пространстве в виде

$$S_e = \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) : \mathbf{x} \in S \text{ и } x_{n+1} \in [0, \Phi]\}. \quad (6.440)$$

Задача 6.2ж относится к задачам с нефиксированным временем без дополнительных ограничений и поэтому переформулировать ее не требуется.

Запишем теперь для каждой из задач функции Гамильтона. Легко видеть, что они определяются соотношениями

$$H_e = \sum_{i=1}^r |u_i(t)| + \langle \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)], \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}[\mathbf{x}(t)] \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t) \rangle; \quad (6.441)$$

$$H_z = \sum_{i=1}^r |u_i(t)| + \langle \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)], \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}[\mathbf{x}(t)] \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t) \rangle + 1 \cdot p_{n+1}^z(t); \quad (6.442)$$

$$H_\partial = \sum_{i=1}^r |u_i(t)| + \langle \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)], \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}[\mathbf{x}(t)] \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t) \rangle + 1 \cdot p_{n+1}^\partial(t); \quad (6.443)$$

$$H_e = 1 + \langle \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)], \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}[\mathbf{x}(t)] \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t) \rangle + \sum_{i=1}^r |u_i(t)| p_{n+1}^e(t); \quad (6.444)^1$$

$$H_{жс} = k + \sum_{i=1}^r |u_i(t)| + \langle \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)], \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}[\mathbf{x}(t)] \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t) \rangle. \quad (6.445)$$

Далее, мы покажем, что дополнительные переменные  $p_{n+1}(t)$ , входящие в уравнения (6.442)—(6.444), являются постоянными:

$$\dot{p}_{n+1}^z(t) = -\frac{\partial H_z}{\partial x_{n+1}(t)} = 0; \quad (6.446)$$

$$\dot{p}_{n+1}^\partial(t) = -\frac{\partial H_\partial}{\partial x_{n+1}(t)} = 0; \quad (6.447)$$

$$\dot{p}_{n+1}^e(t) = -\frac{\partial H_e}{\partial x_{n+1}(t)} = 0, \quad (6.448)$$

и поэтому

$$\left. \begin{aligned} p_{n+1}^z(t) &= k_z; \\ p_{n+1}^\partial(t) &= k_\partial; \\ p_{n+1}^e(t) &= k_e, \end{aligned} \right\} \quad (6.449)$$

где  $k_z$ ,  $k_\partial$  и  $k_e$  — некоторые постоянные. Таким образом, различные функции Гамильтона даются следующим уравнением, которое написано таким образом, чтобы указать общие элементы всех гамильтонианов:

$$\left. \begin{aligned} H_e \\ H_z \\ H_\partial \\ H_e \\ H_{жс} \end{aligned} \right\} = \langle \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)], \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}[\mathbf{x}(t)] \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t) \rangle + \left\{ \begin{aligned} &0 + \sum_{i=1}^r |u_i(t)|; \\ &k_z + \sum_{i=1}^r |u_i(t)|; \\ &k_\partial + \sum_{i=1}^r |u_i(t)|; \\ &1 + k_e \sum_{i=1}^r |u_i(t)|; \\ &k_{жс} + \sum_{i=1}^r |u_i(t)|. \end{aligned} \right\} \quad (6.450)$$

<sup>1</sup> Первый член появился из-за того, что в задаче 6.2е функционал стоимости равен  $\int_0^T 1 \cdot dt$ , так как мы ищем решение, оптимальное по быстрдействию.

Читатель, видимо, заметил, что функциональная зависимость каждого из гамильтонианов от состояния  $\mathbf{x}(t)$  и дополнительной переменной  $\mathbf{p}(t)$  одинакова во всех сформулированных задачах. Различия между этими пятью задачами отражают только пять констант, входящих в функции Гамильтона.

Легко видеть, что управление, абсолютно минимизирующее гамильтониан (т. е.  $H$ -минимальное управление), определяется уравнением

$$\mathbf{u}^0(t) = -\text{DEZ} \{ \mathbf{B}'[\mathbf{x}(t)] \mathbf{p}(t) \} \quad (6.451)$$

для задач 6.2в, 6.2г, 6.2д и 6.2ж, а для задачи 6.2е — уравнением

$$\mathbf{u}^0(t) = -\text{DEZ} \left\{ \frac{1}{k_e} \mathbf{B}'[\mathbf{x}(t)] \mathbf{p}(t) \right\}. \quad (6.452)$$

Таким образом, если каждая из задач нормальна, то оптимальное управление (если оно существует) должно быть «трехуровневой» (+1, 0 и -1) кусочно-постоянной функцией времени. Это, конечно, не означает, что оптимальные управления одинаковы, так как в общем случае они различны. Однако для каждой нормальной задачи «вид» оптимального управления одинаков.

Мы здесь не будем обсуждать остальных необходимых условий. Нам кажется, что читателю более полезно сделать это самостоятельно. В этом случае он обнаружит, что канонические уравнения окажутся (функционально) теми же самыми, так же как и некоторые из условий трансверсальности (например, дополнительная переменная в конечный момент времени должна быть нормальна к  $S$ ). Оптимальные управления для каждой из задач будут различны из-за того, что различны постоянные  $k$ ,  $k_d$  и  $k_e$ .

**Упражнение 6.26.** Рассмотрите задачи 6.2в—6.2ж:

- выпишите необходимые условия;
- объясните сходства и различия в необходимых условиях;
- предположите, что одна из задач оказалась вырожденной; как вы думаете, следует ли из этого, что и все остальные задачи окажутся вырожденными? Объясните это положение;
- покажите, что оптимальное управление для задачи 6.2г будет то же, что и для задачи 6.2в или для задачи 6.2г;
- рассмотрите задачу 6.2ж. Как вы думаете, можно ли подобрать значение постоянной  $k$  таким образом, чтобы оптимальные управления для этой задачи и для задач 6.2в—6.2е были одинаковы?

**Упражнение 6.27.** Предположим, что система (6.429) есть линейная инвариантная во времени система  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  и область  $S$  — единственное состояние  $\theta$ .

Попробуйте найти необходимые или достаточные условия нормальности для каждой из задач, а также условия нормальности, являющиеся одновременно необходимыми и достаточными.

Попробуйте найти условия, гарантирующие единственность оптимального управления.

Попытайтесь найти условия, гарантирующие единственность экстремального управления.

Кратко обсудим теперь для каждой из задач структуру оптимальной системы управления с обратной связью. Будем считать, что все задачи нормальны. В § 6.6 мы без точных доказательств обсуждали существование функций переключения. Те же аргументы можно привести и для задач на оптимум расхода топлива. Необходимо убедиться, что для каждой задачи существует функция от состояния системы  $\mathbf{x}(t)$  (она может зависеть также и от остальных переменных), которая и будет определять управление до тех пор, пока задача является нормальной. Для определенности укажем:

1. Для задачи 6.2в существует векторная функция переключения  $\mathbf{h}_v[\mathbf{x}(t), S]$  такая, что оптимальное управление выражается в виде

$$\mathbf{u}_v^*(t) = \text{DEZ} \{ \mathbf{h}_v[\mathbf{x}(t), S] \}, \quad (6.453)$$

и поэтому система с обратной связью инвариантна по времени.



2. Для задачи 6.2г функция переключения зависит от состояния  $\mathbf{x}(t)$ , области  $S$  и времени  $T_f - t$ , которое требуется для перевода  $\mathbf{x}(t)$  в  $S$ . Таким образом, оптимальное управление  $\mathbf{u}_e^*(t)$  выражается как

$$\mathbf{u}_e^*(t) = \text{DEZ} \{ \mathbf{h}_e | \mathbf{x}(t), S, t, T_f \}, \quad (6.454)$$

и система управления с обратной связью оказывается зависящей от времени.

3. Для задачи 6.2д функция переключения в общем случае зависит от времени  $T_f - t$ , требующегося для перевода  $\mathbf{x}(t)$  в  $S$ . Таким образом, оптимальное управление  $\mathbf{u}_d^*(t)$  выражается в виде

$$\mathbf{u}_d^*(t) = \text{DEZ} \{ \mathbf{h}_d | \mathbf{x}(t), S, t, T_f \}. \quad (6.455)$$

4. Для задачи 6.2е функция переключения в общем случае зависит от топлива, израсходованного на интервале  $[0, t]$ , т. е. от

$$F(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^r |u_j(\tau)| d\tau, \quad (6.456)$$

и от верхнего предела по топливу  $\Phi$ . Итак, оптимальное управление выражается как функция

$$\mathbf{u}_e^*(t) = \text{DEZ} \{ \mathbf{h}_F | \mathbf{x}(t), S, F(t), \Phi \}. \quad (6.457)$$

В этом случае система явно от времени не зависит, хотя и надо иметь в виду ее зависимость от  $F(t)$ .

5. Для задачи 6.2ж функция переключения зависит только от состояния  $\mathbf{x}(t)$  и области  $S$ . Таким образом, система с обратной связью будет

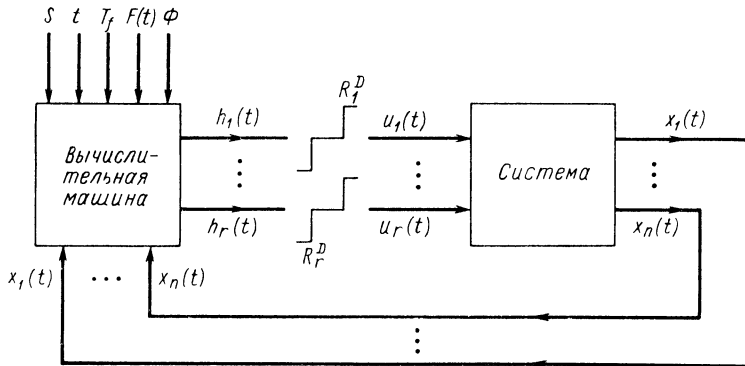


Рис. 6.18. Структура оптимальной системы с обратной связью для задач 6.2в—6.2ж при условии, что задачи нормальны

инвариантна по времени, и для любого заданного значения константы  $k$  оптимальное управление будет выражаться в виде

$$\mathbf{u}_{жк}^*(t) = \text{DEZ} \{ \mathbf{h}_{жк} | \mathbf{x}(t), S \}. \quad (6.458)$$

Структура системы с обратной связью для задач 6.2в—6.2ж показана на рис. 6.18. Мы предполагаем, что задача нормальна. В каждом случае фазовые координаты (переменные состояния)  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  вводятся в систему, обозначенную «ВМ» (вычислительная машина). Дополнительными входами в машину являются область  $S$ , время  $t$ , время  $T_f$ , топливо  $F(t)$  по функционалу (6.456), предел по расходу топлива  $\Phi$ . Выходами машины являются компоненты  $h_1, h_2, \dots, h_r$  функции переключения  $h$ , функциональную зависимость которой от состояния и т. д.

иллюстрируют уравнения (6.453)—(6.458). Операция «dez» выполняется нелинейными элементами  $R_1^D, R_2^D, \dots, R_r^D$ , характеристики которых представляют собой характеристики поляризованных реле с зоной нечувствительности. Блок-схема показывает структуру системы управления с обратной связью. О различиях между задачами «заботится» машина, которая выдает соответствующие функции переключения.

В гл. 8 мы детально рассмотрим ряд задач на оптимум по расходу топлива и проиллюстрируем решения блок-схемами полученных оптимальных систем, а также обсудим их особенности с инженерной точки зрения.

В следующем параграфе мы подытожим основные положения § 6.11—6.15 и приведем ряд упражнений. Цель этих упражнений дать возможность читателю «прочувствовать» геометрические свойства задач на оптимум по расходу топлива. Нам кажется, что основные геометрические понятия § 5.21 и обсуждение геометрических представлений, связанных с оптимальными по быстродействию системами в § 6.2 и 6.7, дают достаточно исходной информации для того, чтобы читатель смог рассмотреть эти понятия для задач на оптимум расхода топлива самостоятельно.

### 6.16. КОММЕНТАРИИ

В предыдущих пяти параграфах мы обсуждали задачу на оптимум расхода топлива. В § 6.15 мы привели пять различных формулировок, отражающих взаимосвязь между временем перехода и потребляемым топливом.

Общей характеристикой всех формулировок является то, что функция Гамильтона линейна относительно управляющих переменных  $u_j(t)$  и  $|u_j(t)|$ . По этой причине из необходимых условий следовало, что оптимальное управление (если оно существует) должно быть кусочно-постоянной функцией времени с тремя уровнями (+1, 0 или -1) при условии нормальности задачи (см. определение 6.11).

С физической точки зрения управления, оптимальные по расходу топлива, экономят его на тех временных интервалах, где никакого управления не прикладывается. Система управляется таким образом, чтобы «сжигание» топлива всегда приводило к наиболее эффективному движению при заданном количестве топлива. Это, естественно, тот случай, когда задача нормальна. В гл. 8 (см. § 8.10) мы увидим, что в частных вырожденных задачах оптимальное управление оказывается не с тремя уровнями (+1, 0, -1), а с пятью уровнями (+1, +k, 0, -k, -1, где  $0 < k < 1$ ).

Общие теоремы существования для различных сформулированных задач до настоящего времени не доказаны<sup>1</sup>. Это существенное ограничение, так как нельзя быть уверенным в том, что решение существует. Мы покажем на конкретных примерах в гл. 8 некоторые из способов, которые можно использовать на практике. Читатель может опустить остаток гл. 6 и рассмотреть конкретные задачи на оптимум расхода топлива в гл. 8.

**Упражнение 6.28.** Рассмотрите задачу 6.2в и обсудите ее геометрическую интерпретацию аналогично § 6.2. При этом может быть полезно: определение переменной  $x_0(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^r |u_j(\tau)| d\tau$  и использование понятия о достижимых состояниях в новом  $(n+1)$ -мерном пространстве. Обсудите существование и единственность управлений, оптимальных по расходу топлива в терминах свойств области  $S$  и множеств достижимых состояний в  $(n+1)$ -мерном пространстве.

**Упражнение 6.29.** Повторите упражнение 6.28 для задач 6.2г—6.2ж.

<sup>1</sup> См. [43].

**Упражнение 6.30.** Еще раз рассмотрите задачу 6.2в. Пусть  $F^*(\mathbf{x})$  обозначает минимальное количество топлива, требующееся для перевода состояния  $\mathbf{x}$  в  $S$  (если время не задано). Найдите множество состояний, которые требуют одинакового минимального количества топлива для перевода в область  $S$ .

Воспроизведите основные положения § 6.7 для отыскания геометрических свойств управления, оптимального по расходу топлива.

**Упражнение 6.31.** Напишите дифференциальное уравнение в частных производных Гамильтона—Якоби для каждой из задач 6.2в—6.2ж.

## ЗАДАЧИ НА МИНИМУМ ЭНЕРГИИ

### 6.17. ВВЕДЕНИЕ

В этом и последующих трех параграфах мы рассмотрим различные стороны задачи о минимуме энергии. Термин «минимум энергии» отражает тот факт, что часто надо минимизировать величину, связанную с энергией электрического сигнала.

Мы изложим строгие формулировки различных задач о минимуме энергии в § 6.18 и 6.20 и рассмотрим один интересный пример в § 6.19.

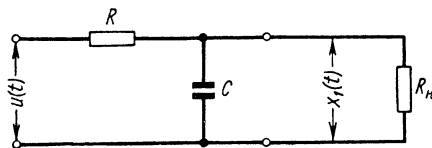


Рис. 6.19.  $RC$ -цепочка из примера 6.7

Далее изучим конкретный класс задач о минимуме энергии в гл. 9, обосновав выбор функционала с точки зрения управления. В оставшейся части настоящего параграфа для пояснения причин интереса к такого рода задачам мы внимательно рассмотрим два примера.

**Пример 6.7.** Найдем сигнал, который передает заданное количество энергии в нагрузку. Конкретно, рассмотрим простую  $RC$ -цепочку, показанную на рис. 6.19. Подсоединим сопротивление  $R_n$  к выходу  $RC$ -цепочки. Пусть  $x_1(t)$  обозначает напряжение на сопротивлении нагрузки  $R_n$ , а  $u(t)$  — входное (или управляющее) напряжение. Прежде всего, напишем дифференциальное уравнение первого порядка для цепочки:

$$RR_n C \dot{x}_1(t) + (R + R_n) x_1(t) = R_n u(t). \quad (6.459)$$

Примем, что

$$a = \frac{R + R_n}{RR_n C}; \quad b = \frac{1}{RC}. \quad (6.460)$$

Тогда уравнение (6.459) запишется в виде

$$\dot{x}_1(t) = -ax_1(t) + bu(t). \quad (6.461)$$

Предположим, что при  $t = 0$  конденсатор  $C$  не заряжен, т. е.

$$x_1(0) = 0. \quad (6.462)$$

Энергия  $E_n$ , рассеиваемая на  $R_n$  за время  $[0, T]$ , равна

$$E_n = \frac{1}{R_n} \int_0^T x_1^2(t) dt. \quad (6.463)$$

Энергию, подводимую ко входу, найдем по балансу энергии. Энергия  $E_R$ , рассеиваемая на сопротивлении  $R$ :

$$E_R = \frac{1}{R} \int_0^T [u(t) - x_1(t)]^2 dt. \quad (6.464)$$

Энергия  $E_C$ , запасаемая конденсатором, в свою очередь, равна

$$E_C = C \int_0^T x_1(t) \dot{x}_1(t) dt \quad (6.465)$$

(так как мгновенная мощность, подводимая к конденсатору  $C$ , равна  $C \frac{dx_1(t)}{dt}$ ). Таким образом, энергия, подводимая ко входу, равна

$$E_{вх} = E_H + E_R + E_C. \quad (6.466)$$

Если подставить соотношения (6.460) и (6.461) в выражение (6.466), то после алгебраических преобразований получим

$$E_{вх} = \frac{1}{R} \int_0^T [u^2(t) - x_1(t) u(t)] dt. \quad (6.467)$$

Теперь можно поставить следующую задачу о минимуме энергии.

Дана система, описываемая уравнением (6.461) (см. цепочку на рис. 6.19). Предположим, что  $x_1(0) = 0$ . Требуется найти вход  $u(t)$ , который передает заданное количество энергии  $E_H = \frac{1}{R_H} \int_0^T x_1^2(t) dt$  сопротивлению нагрузки и минимизирует при этом входную энергию

$$E_{вх} = \frac{1}{R} \int_0^T [u^2(t) - u(t) x_1(t)] dt,$$

где  $T$  задано.

В этом примере величина

$$\hat{E}_{вх} = \int_0^T u^2(t) dt \quad (6.468)$$

связана (но не пропорциональна) с энергией, подводимой входным (или управляющим) сигналом  $u(t)$ . Если бы отсутствовал конденсатор  $C$ , то величина  $\hat{E}_{вх}$  по выражению (6.468) была бы пропорциональна входной энергии.

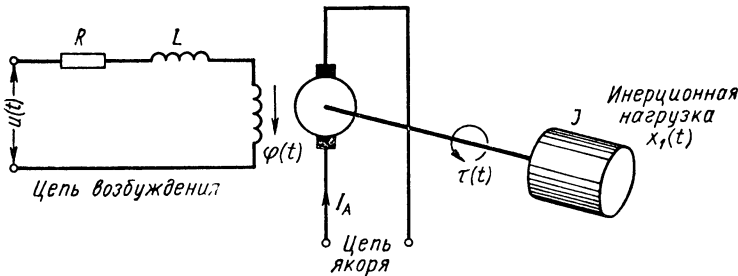


Рис. 6.20. Схематическое изображение двигателя постоянного тока с управлением по цепи возбуждения:  $x_1(t)$  — угловое перемещение;  $J$  — момент инерции нагрузки;  $\tau(t)$  — момент (вращающий);  $I_A$  — постоянный ток якоря;  $\varphi(t)$  — магнитный поток;  $L$  — индуктивность обмотки возбуждения;  $R$  — сопротивление обмотки возбуждения;  $u(t)$  — напряжение возбуждения

**Пример 6.8.** Рассмотрим регулирование положения ротора двигателя постоянного тока с управлением по току возбуждения, показанное на рис. 6.20. Управляющее напряжение  $u(t)$  прикладывается к обмотке возбуждения. В результате<sup>1</sup> дифференциальное уравнение, связывающее поток  $\varphi(t)$  с управляющим напряжением  $u(t)$  (приблизительно), запишется в виде

$$L\dot{\varphi}(t) + R\varphi(t) = k_1 u(t), \quad (6.469)$$

где  $k_1$  — коэффициент пропорциональности.

Предположим, что  $I_A$  — постоянный ток якоря. Тогда момент  $M(t)$  будет связан с потоком  $\varphi(t)$  уравнением

$$M(t) = k_2 I_A \varphi(t). \quad (6.470)$$

Будем считать, что трение пренебрежимо мало. В этом случае выходное угловое смещение  $x_1(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$J\ddot{x}_1(t) = M(t), \quad (6.471)$$

где  $J$  — момент инерции нагрузки и ротора.

<sup>1</sup> Детальный вывод дифференциальных уравнений можно найти, например, в [84].

Предположим также, что индуктивность возбуждения пренебрежимо мала, т. е.

$$L = 0. \quad (6.472)$$

В этом случае система описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t); \quad \dot{x}_2(t) = ku(t), \quad (6.473)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Допущение о малости  $L$  позволяет считать, что величина

$$E_{ex} = \int_0^T u^2(t) dt \quad (6.474)$$

пропорциональна энергии управления, которую дает входной сигнал. Для такой системы можно легко сформулировать задачу о минимуме энергии следующим образом

Дана система уравнений (6.473) с начальными условиями

$$x_1(0) = \xi_1; \quad x_2(0) = 0.$$

Найти управление  $u(t)$ , которое переводило бы исходное состояние в  $(0, 0)$  в течение заданного времени  $T$  и при этом минимизировало функционал (6.474).

Мы решим эту задачу в § 6.19

Целью двух последних примеров было показать, что функционал

$$J(u) = \int_0^T u^2(t) dt \quad (6.475)$$

часто связан с энергией сигнала  $u(t)$ . С математической точки зрения функционал  $J(u)$  дает оценку величины «стоимости» управления. То обстоятельство, что подинтегральная функция  $u^2(t)$  есть квадратичная функция от  $u(t)$ , имеет то очевидное значение, что мы не сильно «наказываем» систему в случае, если  $u(t)$  мало, но «строго наказываем» ее за большие управляющие сигналы  $u(t)$ .

В следующем параграфе сформулируем и решим весьма общую задачу о минимуме энергии. Вначале мы получим необходимые условия, а затем используем их для отыскания оптимального управления.

### 6.18. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА С ЗАДАНЫМИ КОНЕЧНЫМ СОСТОЯНИЕМ И ВРЕМЕНЕМ ПЕРЕХОДА<sup>1</sup>

В этом параграфе мы рассмотрим задачу о переводе начального состояния линейной системы с переменными параметрами в начало координат  $0$  в течение заданного времени  $T_f$ . Будем считать, что управление по величине не ограничено. Сначала сформулируем задачу, а затем получим необходимые условия и, наконец, найдем оптимальное управление в виде фундаментальной матрицы. Точная формулировка этой задачи выглядит следующим образом.

**Задача 6.3а.** Задана линейная, полностью управляемая система с переменными коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad (6.476)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  — состояние ( $n$ -мерный вектор);

$\mathbf{A}(t)$  — матрица системы размера  $n \times n$ ;

$\mathbf{u}(t)$  — управляющий вектор (размерности  $r$ );

$\mathbf{B}(t)$  — матрица усиления размера  $n \times r$ .

Заданы начальное время  $t_0$  и состояние  $\xi$ :

$$\mathbf{x}(t_0) = \xi. \quad (6.477)$$

<sup>1</sup> См. [104], [159], [149], [32], [153], [156], [6], [50], [75], [76], [107], [138], [182], [184], [186], [193] и [202].

Кроме того, задано конечное время  $T_f$  и конечное состояние  $\mathbf{0}$ . Предположим, что управление не ограничено. Дана положительно определенная симметричная матрица  $N(t)$  размера  $n+r \times n+r$ , вида

$$N(t) = \begin{bmatrix} Q(t) & M(t) \\ M'(t) & R(t) \end{bmatrix}, \quad (6.478)$$

где  $Q(t)$  — положительно определенная матрица размера  $n \times n$ ;  
 $R(t)$  — положительно определенная матрица размера  $n \times r$ ;  
 $M(t)$  — матрица размера  $n \times r$ .

Имеем функционал

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, N(t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt = \\ = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} \{ \langle \mathbf{x}(t), Q(t) \mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), R(t) \mathbf{u}(t) \rangle + 2 \langle \mathbf{x}(t), M(t) \mathbf{u}(t) \rangle \} dt. \quad (6.479)$$

Требуется найти управление, которое

1) переводит состояние  $\xi$  в  $\mathbf{0}$  за фиксированное время  $T_f$ ;

$$\mathbf{x}(T_f) = \mathbf{0}; \quad (6.480)$$

2) минимизирует функционал  $J(\mathbf{u})$  [см. выражение (6.479)].

Здесь следует обсудить выбор функционала  $J(\mathbf{u})$ . Предположение о том, что  $N(t)$  положительно определена, гарантирует, что функционал  $J(\mathbf{u})$  положителен, если

$$\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0} \text{ для всех } t \in [t_0, T_f]. \quad (6.481)$$

Из предположения о положительной определенности  $N(t)$  следует также, что

$$Q(t) \text{ и } R(t) \text{ положительно определены} \quad (6.482)$$

и, следовательно, существуют инвертированные матрицы

$$N^{-1}(t), Q^{-1}(t) \text{ и } R^{-1}(t). \quad (6.483)^1$$

Получим теперь на основе принципа минимума необходимые условия для этой задачи. Прежде всего образуем гамильтониан:

$$H = H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(t), Q(t) \mathbf{x}(t) \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(t), R(t) \mathbf{u}(t) \rangle + \langle \mathbf{x}(t), M(t) \mathbf{u}(t) \rangle + \\ + \langle A(t) \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t) \rangle + \langle B(t) \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t) \rangle. \quad (6.484)$$

Гамильтониан является квадратичной функцией от управления  $\mathbf{u}(t)$ .

Используя принцип минимума, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 6.16. Необходимые условия для задачи 6.3а.** Если  $\mathbf{u}^*(t)$  — оптимальное управление и  $\mathbf{x}^*(t)$  — оптимальная траектория, произведенная управлением  $\mathbf{u}^*(t)$ , то существует соответствующая дополнительная переменная  $\mathbf{p}^*(t)$ , удовлетворяющая условиям:

а) состояние  $\mathbf{x}^*(t)$  и дополнительная переменная удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = A(t) \mathbf{x}^*(t) + B(t) \mathbf{u}^*(t); \quad (6.485)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -Q(t) \mathbf{x}^*(t) - M(t) \mathbf{u}^*(t) - A'(t) \mathbf{p}^*(t) \quad (6.486)$$

<sup>1</sup> См. § 2.15.

с граничными условиями

$$\mathbf{x}^*(t) = \xi; \quad \mathbf{x}^*(T_f) = \mathbf{0}; \quad (6.487)$$

б) для любых  $\mathbf{u}(t) \in R_r$  (так как  $\mathbf{u}(t)$  не ограничено) и  $t \in [t_0, T_f]$  справедливо соотношение вида

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}^*(t), \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}^*(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{u}^*(t) \rangle + \\ & + \langle \mathbf{x}^*(t), \mathbf{M}(t) \mathbf{u}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{A}(t) \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle + \\ & + \langle \mathbf{B}(t) \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle \leq \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}^*(t), \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}^*(t) \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \rangle + \langle \mathbf{x}^*(t), \mathbf{M}(t) \mathbf{u}(t) \rangle + \\ & + \langle \mathbf{A}(t) \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle \end{aligned} \quad (6.488)$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{u}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{x}^*(t), \mathbf{M}(t) \mathbf{u}^*(t) \rangle + \\ & + \langle \mathbf{B}(t) \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle \leq \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \rangle + \\ & + \langle \mathbf{x}^*(t), \mathbf{M}(t) \mathbf{u}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle. \end{aligned} \quad (6.489)$$

**Упражнение 6.32.** Проверьте теорему 6.16. У к а з а н и е: используйте табл. 5.2, строку 6.

Будем теперь применять второе необходимое условие (6.489) для получения уравнения, которое единственным образом связывает управление  $\mathbf{u}^*(t)$  с  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$ . Этот шаг полностью аналогичен тому, который мы предпринимали для задач на оптимум по быстродействию и расходу топлива. Однако вскоре читатель обнаружит, что в этом случае мы не получим вырожденных задач.

Уравнение (6.489) означает, что функция

$$\begin{aligned} \varphi[\mathbf{u}(t)] = & \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \rangle + \langle \mathbf{x}^*(t), \mathbf{M}(t) \mathbf{u}(t) \rangle + \\ & + \langle \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle \end{aligned} \quad (6.490)$$

имеет абсолютный минимум при

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t). \quad (6.491)$$

Так как  $\mathbf{u}(t)$  не ограничено и  $\varphi[\mathbf{u}(t)]$  есть гладкая функция от  $\mathbf{u}(t)$ , можно найти минимум, полагая  $\frac{\partial \varphi[\mathbf{u}(t)]}{\partial \mathbf{u}(t)} = \mathbf{0}$ .

Но

$$\frac{\partial \varphi[\mathbf{u}(t)]}{\partial \mathbf{u}(t)} = \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{M}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}'(t) \mathbf{p}^*(t), \quad (6.492)$$

откуда сразу следует

$$\mathbf{R}(t) \mathbf{u}^*(t) + \mathbf{M}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}'(t) \mathbf{p}^*(t) = \mathbf{0}. \quad (6.493)$$

Благодаря тому, что  $\mathbf{R}(t)$  — невырожденная матрица [см. условие (6.483)], получим

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) [\mathbf{M}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}'(t) \mathbf{p}^*(t)]. \quad (6.494)$$

Для уверенности в том, что уравнение (6.494) определяет минимум, нужно только проверить, является ли матрица  $\frac{\partial^2 \varphi[\mathbf{u}(t)]}{\partial \mathbf{u}^2(t)}$  размера  $r \times r$

положительно определенной. Прямым вычислением с помощью уравнения (6.492) находим, что матрица

$$\frac{\partial^2 \Phi [\mathbf{u}(t)]}{\partial \mathbf{u}^2(t)} = \mathbf{R}(t) \quad (6.495)$$

положительно определена в силу предположений относительно задачи 6.3а. Теперь можно утверждать наверняка, что уравнение (6.494) однозначно выражает  $\mathbf{u}^*(t)$  через  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$ .

Так как соотношения (6.488) и (6.489) одинаковы, то уравнения (6.494) можно получить путем нахождения минимума функции  $H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t]$  по  $\mathbf{u}(t)$ , так как

$$\frac{\partial H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \mathbf{u}(t)} = \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{M}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{p}^*(t) \quad (6.496)$$

и матрица

$$\frac{\partial^2 H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t]}{\partial \mathbf{u}^2(t)} = \mathbf{R}(t) \quad (6.497)$$

положительно определена.

Отметим три следующих обстоятельства.

**Замечание 6.13.** Предположение о том, что  $\mathbf{R}(t)$  [а не  $\mathbf{N}(t)$ ] положительно определена, привело нас к уравнению (6.494). Далее, положительная определенность  $\mathbf{R}(t)$  гарантирует, что уравнение (6.494) определяет единственный минимум (а не максимум или седловую точку) функции

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t] \text{ при } \mathbf{u}^*(t).$$

**Замечание 6.14.** Оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t)$  есть линейная функция  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$ . Это происходит благодаря линейности системы, квадратичному характеру функционала и отсутствию ограничений величины управления  $\mathbf{u}(t)$ .

**Замечание 6.15.** Задача нормальная, так как  $\mathbf{u}^*(t)$  однозначно определяется  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$ . При

$$\mathbf{u}^*(t) \neq \mathbf{u}(t) \quad (6.498)$$

второе необходимое условие сводится к строгому неравенству вида

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] < H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t]. \quad (6.499)$$

Следующий шаг состоит в подстановке выражения (6.494) в канонические уравнения (6.485) и (6.486). В результате этого получается система  $2n$  дифференциальных уравнений (упрощенных канонических уравнений)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^*(t) = & [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{M}(t)] \mathbf{x}^*(t) - \\ & - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t) \mathbf{p}^*(t); \end{aligned} \quad (6.500)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}^*(t) = & [-\mathbf{Q}(t) + \mathbf{M}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{M}(t)] \mathbf{x}^*(t) + \\ & + [-\mathbf{A}'(t) + \mathbf{M}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t)] \mathbf{p}^*(t). \end{aligned} \quad (6.501)$$

Для удобства определим матрицы  $\mathbf{W}_{11}$ ,  $\mathbf{W}_{12}$ ,  $\mathbf{W}_{21}$ ,  $\mathbf{W}_{22}$  размера  $n \times n$ , положив

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W}_{11}(t) &= \mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{M}(t); \\ \mathbf{W}_{12}(t) &= -\mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t); \\ \mathbf{W}_{21}(t) &= -\mathbf{Q}(t) + \mathbf{M}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{M}(t); \\ \mathbf{W}_{22}(t) &= -\mathbf{A}'(t) + \mathbf{M}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t). \end{aligned} \right\} \quad (6.502)$$

Теперь уравнения (6.500) и (6.501) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^*(t) \\ \dot{\mathbf{p}}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11}(t) & \mathbf{W}_{12}(t) \\ \mathbf{W}_{21}(t) & \mathbf{W}_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^*(t) \\ \mathbf{p}^*(t) \end{bmatrix}. \quad (6.503)$$



Пусть  $\Psi(t_1, t_0)$  — фундаментальная матрица системы (6.503) размера  $2n \times 2n$ . Разделим матрицу  $\Psi(t, t_0)$  на четыре матрицы размера  $n \times n$  следующим образом:

$$\Psi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t, t_0) & \Psi_{12}(t, t_0) \\ \Psi_{21}(t, t_0) & \Psi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}. \quad (6.504)$$

Решение (6.503) можно записать в виде

$$\mathbf{x}^*(t) = \Psi_{11}(t, t_0) \mathbf{x}^*(t_0) + \Psi_{12}(t, t_0) \mathbf{p}^*(t_0); \quad (6.505)$$

$$\mathbf{p}^*(t) = \Psi_{21}(t, t_0) \mathbf{x}^*(t_0) + \Psi_{22}(t, t_0) \mathbf{p}^*(t_0). \quad (6.506)$$

Необходимо, однако, чтобы  $\mathbf{x}^*(t_0) = \xi$ ;  $\mathbf{x}^*(T_f) = 0$ . Из выражения (6.505) получим

$$\Psi_{12}(T_f, t_0) \mathbf{p}^*(t_0) = -\Psi_{11}(T_f, t_0) \xi. \quad (6.507)$$

Если матрица  $\Psi_{12}(T_f, t_0)$  невырожденная, т. е.

$$\det \Psi_{12}(T_f, t_0) \neq 0, \quad (6.508)$$

то уравнение (6.507) можно разрешить относительно  $\mathbf{p}^*(t_0)$  и подставить значение

$$\mathbf{p}^*(t_0) = -\Psi_{12}^{-1}(T_f, t_0) \Psi_{11}(T_f, t_0) \xi \quad (6.509)$$

в уравнения (6.505), (6.506) и (6.494), что дает

$$\mathbf{x}^*(t) = [\Psi_{11}(t, t_0) - \Psi_{12}(t, t_0) \Psi_{12}^{-1}(T_f, t_0) \Psi_{11}(T_f, t_0)] \xi; \quad (6.510)$$

$$\mathbf{p}^*(t) = [\Psi_{21}(t, t_0) - \Psi_{22}(t, t_0) \Psi_{12}^{-1}(T_f, t_0) \Psi_{11}(T_f, t_0)] \xi \quad (6.511)$$

и

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \{ \mathbf{M}(t) [\Psi_{11}(t, t_0) - \Psi_{12}(t, t_0) \Psi_{12}^{-1}(T_f, t_0) \Psi_{11}(T_f, t_0)] + \\ + \mathbf{B}'(t) [\Psi_{21}(t, t_0) - \Psi_{22}(t, t_0) \Psi_{12}^{-1}(T_f, t_0) \Psi_{11}(T_f, t_0)] \} \xi. \quad (6.512)$$

Матрица  $\Psi_{12}(T_f, t_0)$  не зависит от начального состояния. Она зависит от матриц  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{M}(t)$ ,  $\mathbf{R}(t)$ , от начального времени  $t_0$  и от конечного времени  $T_f$ . Поэтому можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 6.17.** Если оптимальное управление существует и матрица  $\Psi_{12}(T_f, t_0)$  невырожденная, то оптимальное управление единственно и определяется уравнением (6.512). При этом существует только одно экстремальное управление.

**Доказательство.** Если  $\Psi_{12}(T_f, t_0)$  невырождена, то из выражения (6.509) следует, что существует единственное начальное значение  $\mathbf{p}^*(t_0)$ , соответствующее  $\xi$ ,  $t_0$  и  $T_f$ . Таким образом,  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $\mathbf{p}^*(t)$  единственны, а поэтому и единственно управление  $\mathbf{u}^*(t)$ . Это устанавливает единственность экстремального управления. Если, кроме того, оптимальное управление существует, то оно должно быть равно  $\mathbf{u}^*(t)$  и поэтому и является единственным.

Если же матрица  $\Psi_{12}(T_f, t_0)$  вырождена, то может существовать много начальных значений  $\mathbf{p}^*(t_0)$  таких, что выполняется соотношение

$$\Psi_{12}(T_f, t_0) \mathbf{p}_i^*(t_0) = -\Psi_{11}(T_f, t_0) \xi \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.513)$$

В этом случае экстремальные управления не единственны; возможны другие оптимальные решения вместе с относительно оптимальными решениями. Насколько известно авторам, необходимых или достаточных условий, а также необходимых и достаточных условий, из которых следовало бы невырожденность  $\Psi_{12}(T_f, t_0)$ , в литературе по управлению до настоящего времени не имелось.

Существует много направлений, по которым можно двигаться дальше. Можно найти функционал  $J(\mathbf{u}^*)$  и показать, что он удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби; можно сформулировать задачу о движении из заданного начального состояния в другое состояние или в область  $S$ , можно получить частные результаты для инвариантных во времени систем и т. д. В каждом случае линейность управляемой системы, квадратичный характер функционала и отсутствие ограничений управления по величине приведут к линейным уравнениям, при помощи которых легко получить развернутые уравнения для необходимых условий.

С целью иллюстрации метода определения оптимального управления в следующем параграфе мы рассмотрим частный случай управления, относящийся к системе второго порядка.

**Упражнение 6.33.** Покажите, что предположение о положительной определенности матрицы  $N(t)$  по выражению (6.478) дает достаточное условие локальной оптимальности экстремального управления. У к а з а н и е: см. § 5.8.

**Упражнение 6.34.** Допустим, что оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t)$  существует и оно единственно. Покажите, что минимальное значение  $J(\mathbf{u}^*)$  [(см. функционал (6.479)] выражается в виде

$$J(\mathbf{u}^*) = \frac{1}{2} \langle \xi, \mathbf{G}(t_0; T_f) \xi \rangle, \quad (6.514)$$

где  $\mathbf{G}(t_0; T_f)$  — матрица размера  $n \times n$ , не зависящая от  $\xi$ . Напишите уравнение для  $\mathbf{G}(t_0; T_f)$ .

У к а з а н и е: подставьте выражения (6.512) и (6.510) в соотношение (6.479). Матрица  $\mathbf{G}(t_0; T_f)$  будет выражаться через интеграл от матрицы, зависящей от времени.

Покажите, что из предположения о положительной определенности  $N(t)$  вытекает также положительная определенность матрицы  $\mathbf{G}(t_0; T_f)$ . Покажите, что минимальное значение функционала  $J(\mathbf{u}^*)$  есть решение уравнения Гамильтона—Якоби.

**Упражнение 6.35.** Рассмотрите линейную инвариантную во времени систему вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (6.515)$$

с начальным состоянием  $\mathbf{x}(0) = \xi$ . Предположим, что нам задана функция от времени  $\mathbf{z}(t)$ , состояние  $\theta$  и время  $T_f$  такие, что

$$\mathbf{z}(0) = \xi; \mathbf{z}(T_f) = \theta. \quad (6.516)$$

Представим себе  $\mathbf{z}(t)$  в виде желаемой траектории движения от  $\xi$  в  $\theta$ . Цель управления — перевести систему, описываемую уравнением (6.515), из  $\xi$  в  $\theta$  и сделать это так, чтобы  $\mathbf{x}(t)$  было близко к  $\mathbf{z}(t)$ . Определим поэтому ошибку  $\mathbf{e}(t)$ , приняв

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t) \quad (6.517)$$

и рассмотрим функционал

$$J_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} [\langle \mathbf{e}(t), \mathbf{Q}\mathbf{e}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}\mathbf{u}(t) \rangle] dt, \quad (6.518)$$

где  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  — положительно определенные постоянные симметричные матрицы;  $T_f$  задано.

Найдите необходимые условия для оптимального управления. Полагая, что оптимальное управление существует, рассмотрите единственность оптимального и экстремального управлений. Покажите, что необходимо точно знать  $\mathbf{z}(t)$  для всего  $t \in [0, T_f]$ .

**Упражнение 6.36.** Рассмотрите задачу, сформулированную в упражнении 6.35, и предположите, что  $\mathbf{z}(t)$  есть решение известной однородной линейной системы

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t); \mathbf{z}(0) = \xi, \quad (6.519)$$

для которого  $\mathbf{z}(T_f) = \theta$ . Покажите, что оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t)$  требует знания матрицы  $\mathbf{F}$ , но не требует знания всего решения  $\mathbf{z}(t)$  для  $t \in [0, T_f]$ .

## 6.19. ПРИМЕР <sup>1</sup>

В этом параграфе мы рассмотрим различные виды управления с минимальной энергией для системы второго порядка. Уравнения движения системы могут описывать электродвигатель постоянного тока с управ-

<sup>1</sup> Материалы этого параграфа частично основаны на работе [86].

лением по цепи возбуждения, рассмотренный в примере 6.8. Далее получим оптимальный закон управления для двух связанных критериев и подробно рассмотрим некоторые особенности решений.

Пусть имеем систему вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); & x_1(0) &= \xi_1; \\ \dot{x}_2(t) &= u(t); & x_2(0) &= \xi_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.520)$$

Будем считать, что величина управления  $u(t)$  не ограничена. Мы хотим найти управление  $u(t)$ , которое, во-первых, переводит начальное состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  за время  $T_f$ , т. е.

$$x_1(T_f) = x_2(T_f) = 0, \quad (6.521)$$

и во-вторых, минимизирует функционал

$$E = E(u) = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} u^2(t) dt, \quad (6.522)$$

где  $T_f$  задано.

Чтобы найти оптимальное управление, начнем с отыскания управления, удовлетворяющего необходимым условиям (т. е., экстремального управления). Первый шаг состоит в написании гамильтониана для системы (6.520) и функционала (6.522), который выражается в виде

$$H = \frac{1}{2} u^2(t) + x_2(t) p_1(t) + u(t) p_2(t). \quad (6.523)$$

Экстремальное управление должно минимизировать гамильтониан. Так как он является квадратичной функцией от  $u(t)$ , то экстремальное управление можно найти, полагая  $\frac{\partial H}{\partial u(t)} = 0$  и проверяя, положительна ли вторая производная  $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2(t)}$ . Так как

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = u(t) + p_2(t) \quad (6.524)$$

и

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2(t)} = 1, \quad (6.525)$$

то приходим к выводу, что экстремальным является управление

$$u(t) = -p_2(t); \quad t \in [0, T_f]. \quad (6.526)$$

Дополнительные переменные  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = 0; \quad (6.527)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -p_1(t). \quad (6.528)$$

Пусть

$$\pi_1 = p_1(0); \quad \pi_2 = p_2(0) \quad (6.529)$$

обозначают начальные значения дополнительных переменных. Решая уравнения (6.527) и (6.528), получим

$$\left. \begin{aligned} p_1(t) &= \pi_1 = \text{const}; \\ p_2(t) &= \pi_2 - \pi_1 t. \end{aligned} \right\} \quad (6.530)$$

Таким образом, экстремальным будет управление вида

$$u(t) = -\pi_2 + \pi_1 t; \quad t \in [0, T_f]. \quad (6.531)$$

Из уравнения (6.531) вытекает, что оптимальное управление (если оно существует) должно быть линейной функцией времени с начальным значением  $u(0) = -\pi_2$  и наклоном  $\pi_1$ . Следующий шаг состоит, очевидно, в определении  $\pi_1$  и  $\pi_2$  через  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  и  $T_f$ .

Подставим управление (6.531) в уравнения системы (6.520) и, проинтегрировав, получим

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \xi_1 + \xi_2 t - \frac{1}{2} \pi_2 t^2 + \frac{1}{6} \pi_1 t^3; \\ x_2(t) &= \xi_2 - \pi_2 t + \frac{1}{2} \pi_1 t^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.532)$$

Так как необходимо, чтобы  $x_1(T_f) = x_2(T_f) = 0$ , то из выражений (6.532) и (6.521) находим, что  $\pi_1$  и  $\pi_2$  однозначно определяются соотношениями

$$\pi_1 = \frac{6}{T_f^3} (2\xi_1 + \xi_2 T_f); \quad (6.533)$$

$$\pi_2 = \frac{2}{T_f^2} (3\xi_1 + 2\xi_2 T_f). \quad (6.534)$$

Экстремальное управление выражается формулой

$$u(t) = -\frac{2}{T_f^2} (3\xi_1 + 2\xi_2 T_f) + \frac{6}{T_f^3} (2\xi_1 + \xi_2 T_f) t. \quad (6.535)$$

Управление (6.535) удовлетворяет необходимым условиям и, следовательно, является единственной функцией от  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $T_f$  и  $t$ . Мы также убедились, что для данной задачи оптимальное управление существует. Таким образом, можно заключить, что оптимальное управление единственно и выражается соотношением вида (6.535).

Найдем теперь минимальную энергию  $E^*$ , требующуюся для оптимального управления. Для этого подставим соотношение (6.535) в функционал (6.522) и, проинтегрировав, получим

$$E^* = E^*(\xi_1, \xi_2, T_f) = \frac{2}{T_f^3} (3\xi_1^2 + 3\xi_1 \xi_2 T_f + \xi_2^2 T_f^2). \quad (6.536)$$

Для иллюстрации того, что выбор конечного времени  $T_f$  весьма критичен, выберем начальные состояния  $\xi_1 = 1$ ,  $\xi_2 = -1$  и рассмотрим график зависимости  $E^*(1, -1, T_f)$  от  $T_f$ , как это показано на рис. 6.21. При значениях  $T_f < 2$  энергия весьма велика, а затем энергия достигает точки перегиба при  $T_f = 3$ , и для  $T_f > 3$  минимальная необходимая энергия убывает медленно. Для  $T_f$  очень больших  $E^* \approx 2\xi_2^2/T_f$ . На рис. 6.22 показаны оптимальные траектории из начального состояния  $(1, -1)$  в  $(0, 0)$ . Обратим внимание на значительные изменения, происходящие с увеличением  $T_f$ . Из рис. 6.21 видно, что прирост энергии между  $T_f = 3$  и  $T_f = 10$  очень мал. Траектории же отличаются существенно. С ростом  $T_f$  значительно возрастает перерегулирование. Это обсуждение обнаруживает исключительную важность чувствительности оптимальных задач к изменениям параметров. Очень часто малые изменения некоторых параметров (например,  $T_f$ ) могут вызывать либо большие, либо малые изменения минимума функционала (или стоимости). В инженерных расчетах должны учитываться эти положения.

\*

Проверим далее, что минимальная энергия положительна для всех  $\xi_1 \neq \xi_2 \neq 0$ . Выражение (6.536) можно записать в виде скалярного произведения

$$E^*(\xi_1, \xi_2, T_f) = \left\langle \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \frac{2}{T_f^3} \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} T_f \\ -\frac{3}{2} T_f & T_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad (6.537)$$

Матрица, входящая в скалярное произведение, положительно определена для любых значений  $T_f$  (сравните с упражнением 6.34). Таким образом,  $E^* \geq 0$ .

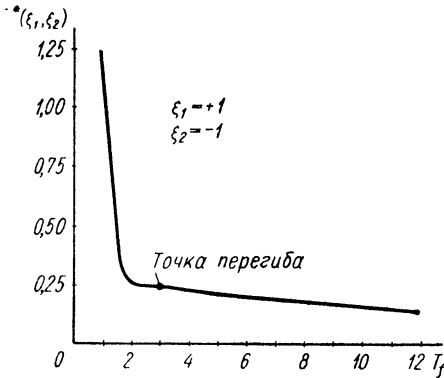


Рис. 6.21. График зависимости энергии  $E^*(\xi_1, \xi_2, T_f)$  от конечного времени  $T_f$

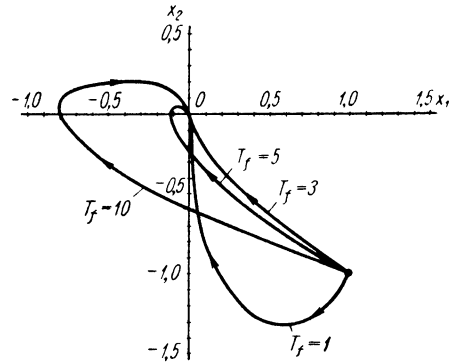


Рис. 6.22. Поведение оптимальных траекторий, исходящих из  $(1, -1)$  при изменении  $T_f$

Если допустимы большие значения  $T_f$ , то управление можно осуществить при помощи очень малого количества энергии. Легко видеть, что

$$\lim_{T_f \rightarrow \infty} E^*(\xi_1, \xi_2, T_f) = 0 \quad (6.538)$$

и

$$\lim_{T_f \rightarrow \infty} u(t) = 0, \quad t \in [0, T_f]. \quad (6.539)$$

Но если управление  $u(t)$  мало, то траектория будет иметь очень большие перерегулирования (см. рис. 6.22).

Из рис. 6.21 видно, что кривая  $E^*$  в зависимости от  $T_f$  имеет точку перегиба. Легко обнаружить, положив  $\frac{\partial E^*(\xi_1, \xi_2, T_f)}{\partial T_f} = 0$ , что точка перегиба имеет место, когда удовлетворяется соотношение

$$\xi_2 T_f = -3\xi_1. \quad (6.540)$$

Покажем теперь, что если сформулировать задачу о минимуме энергии как задачу с заданным конечным временем, то необходимое условие, состоящее в равенстве нулю гамильтониана в конечный момент времени, определяет эту точку перегиба. Напомним, что гамильтониан [см. выражение (6.523)] равен

$$H = \frac{1}{2} u^2(t) + x_2(t) p_1(t) + u(t) p_2(t). \quad (6.541)$$

Пусть  $T$  — неизвестное конечное время. Тогда необходимо, чтобы

$$\frac{1}{2} u^2(T) + x_2(T) p_1(T) + u(T) p_2(T) = 0 \quad (6.542)$$

и, кроме того,  $x_2(T) = 0$  и  $u(t) = -p_2(t)$  для всего  $t \in [0, T]$ . Следовательно,  $u(T) = -p_2(T)$ , и поэтому соотношение (6.542) сводится к уравнению

$$\frac{1}{2} u^2(T) = 0 \quad (6.543)$$

или эквивалентному

$$u(T) = 0. \quad (6.544)$$

Из соотношений (6.544) и (6.531) получим

$$-\pi_2 + \pi_1 T = 0. \quad (6.545)$$

Из выражений (6.545), (6.533) и (6.534) можно найти, что начальные значения  $\xi_1$  и  $\xi_2$  и конечное время  $T$  должны удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{T^2} (6\xi_1 + 2\xi_2 T) = 0. \quad (6.546)$$

Уравнение (6.546) удовлетворяется в двух случаях:

$$T = \infty \quad (6.547)$$

или

$$\xi_2 T = -3\xi_1. \quad (6.548)$$

Таким образом, необходимые условия для задачи с незадаанным конечным временем привели к уравнениям (6.547) и (6.548). Мы показали, что случай, когда  $T = \infty$ , соответствует абсолютному минимуму  $E^*$ , т. е.  $E^* = 0$ . Отметим также, что уравнение (6.548) то же самое, что и (6.540), и поэтому соотношение (6.548) дает точку перегиба, а не минимум. Это, конечно, возможно, потому что, как мы уже отмечали (см. § 5.17, замечание 10), необходимое условие  $H = 0$  соответствует экстремальным точкам, которые могут быть точками минимума, максимума, перегиба или седловыми точками. Отметим также, что задача о минимуме энергии с незадаанным временем не имеет оптимального решения. Причина в том, что при  $T = \infty$  имеем  $u(t) = 0$  для всех  $t$ , и нулевое управление никогда не переведет начальное состояние  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$ . Можно найти оптимальные решения для задачи с заданным сколь угодно большим (но конечным) временем  $T_f$  и сделать  $E^*$  сколь угодно малой, но не равной нулю. Предельное решение не может удовлетворять граничным условиям, и поэтому оптимальное решение не существует. Однако  $\epsilon$ -оптимальное решение существует.

Продолжим рассмотрение конкретных задач оптимального управления, описываемых системой уравнений (6.520) по отношению к различным критериям преобразования. Цель оставшейся части данного параграфа — показать существование относительного минимума в некоторых задачах оптимизации.

Для определенности поставим следующую задачу. Рассмотрим систему уравнений (6.520), т. е. систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); & x_1(0) &= \xi_1; \\ \dot{x}_2(t) &= u(t); & x_2(0) &= \xi_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.549)$$

Рассмотрим также функционал

$$J_1(u) = kT + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt = \int_0^T \left[ k + \frac{1}{2} u^2(t) \right] dt, \quad (6.550)$$

где  $T$  не задано и  $k > 0$ .

Найдем управление, переводящее систему, описываемую уравнениями (6.549), из начального состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и минимизирующее функционал (6.550). Очевидно, мы имеем дело с задачей с закрепленным концом и незадаанным временем перехода. Функционал  $J_1(u)$  представляет собой<sup>1</sup> линейную комбинацию эквивалентного времени и потребляемой энергии. Эту задачу можно решить двумя способами. Один метод решения состоит в том, чтобы получить необходимые условия и продолжать решение непосредственно. Другой метод состоит в том, чтобы решить поставленную задачу, полагая  $T$  фиксированным и построить график зависимости  $J_1(u)$  от конечного времени  $T$ , а затем найти конечное время, для которого стоимость минимальна.

Если приступить к задаче, полагая  $T$  заданным, то член  $kT$  в функционале  $J_1$  будет известной постоянной, и поэтому минимизация функционала (6.550) с фиксированным  $T$  эквивалентна минимизации энергии  $\frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt$ . Поэтому управление, определяемое соотношением (6.535), останется оптимальным и минимальное значение функционала [см. соотношение (6.536)] равно

$$J_1(\xi_1, \xi_2, T) = kT + \frac{2}{T^3} (3\xi_1^2 + 3\xi_1\xi_2T + \xi_2^2T^2). \quad (6.551)$$

Очевидно, что  $J_1$  является функцией конечного времени  $T$ . Чтобы найти конкретное значение конечного времени  $T$ , скажем  $T^*$  такое, что

$$J_1(\xi_1, \xi_2, T^*) \leq J_1(\xi_1, \xi_2, T), \quad (6.552)$$

необходимо определить сначала экстремальные точки  $J_1(\xi_1, \xi_2, T)$ , полагая,

$$\frac{\partial J_1(\xi_1, \xi_2, T)}{\partial T} = 0. \quad (6.553)$$

Отсюда получим

$$\frac{2}{\beta^2} - \frac{18\xi_1^2}{T^4} - \frac{12\xi_1\xi_2}{T^3} - \frac{2\xi_2^2}{T^2} = 0, \quad (6.554)$$

где для упрощения уравнений принято

$$k = \frac{2}{\beta^2}, \quad \beta > 0. \quad (6.555)$$

Из выражения (6.554) после некоторых алгебраических преобразований находим, что конечными временами, при которых функция  $J_1(\xi_1, \xi_2, T)$  имеет экстремум, являются четыре решения уравнения

$$T^4 - \beta^2(\xi_2^2T^2 + 6\xi_1\xi_2T + 9\xi_1^2) = 0. \quad (6.556)$$

Обозначим эти четыре корня через  $T_1, T_2, T_3, T_4$ . Извлекая из обеих частей уравнения (6.556) квадратные корни, находим

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}(\beta\xi_2 + \sqrt{\beta^2\xi_2^2 + 12\beta\xi_1}); \\ T_2 &= \frac{1}{2}(\beta\xi_2 - \sqrt{\beta^2\xi_2^2 + 12\beta\xi_1}); \\ T_3 &= \frac{1}{2}(-\beta\xi_2 + \sqrt{\beta^2\xi_2^2 - 12\beta\xi_1}); \\ T_4 &= \frac{1}{2}(-\beta\xi_2 - \sqrt{\beta^2\xi_2^2 - 12\beta\xi_1}). \end{aligned} \right\} \quad (6.557)$$

<sup>1</sup> Сравните с задачей 6.2д.

Выделим теперь положительные конечные времена, соответствующие локальным минимумам  $J_1(\xi_1, \xi_2, T)$ . Условия

$$\frac{\partial^2 J(\xi_1, \xi_2, T)}{\partial T^2} > 0 \quad (6.558)$$

и

$$T > 0 \quad (6.559)$$

можно использовать для доказательства, что конечное время  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) соответствует локальному минимуму только в том случае, если

$$0 < T_i < -3 \frac{\xi_1}{\xi_2} \quad (6.560)$$

или

$$T_i > -6 \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Если  $T_i$  удовлетворяется неравенству

$$0 < -3 \frac{\xi_1}{\xi_2} < T_i < -6 \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad (6.561)$$

то это время соответствует локальному максимуму.

Теперь покажем, что из необходимых условий для исходной задачи вытекают выражения (6.557). Прежде всего гамильтониан  $H_1$  [для системы уравнений (6.549) и функционала (6.550)] равен

$$H_1 = \frac{2}{\beta^2} + \frac{1}{2} u^2(t) + x_2(t) p_1(t) + u(t) p_2(t), \quad (6.562)$$

где  $k = \frac{2}{\beta^2}$ .

Управление, минимизирующее гамильтониан, равно

$$u(t) = -p_2(t). \quad (6.563)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (6.527)—(6.535) остаются теми же самыми, только  $T_i$  заменяется на  $T$ . Так как теперь мы рассматриваем задачу с заданным временем, то необходимое условие  $H_1 = 0$  при  $t = T$  дает соотношение

$$\frac{2}{\beta^2} + \frac{1}{2} u^2(T) + x_2(T) p_1(T) + u(T) p_2(T) = 0.$$

Но так как  $x_2(T) = 0$  и  $u(T) = -p_2(T)$ , то получим

$$u(T) = \pm \frac{2}{\beta}. \quad (6.564)$$

Из соотношений (6.564), (6.535), (6.533) и (6.534) находим

$$T^2 = \pm (\beta \xi_2 T + 3\beta \xi_1). \quad (6.565)$$

Отсюда видно, что четыре корня уравнения (6.565) в точности равны четырем конечным временам  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , определяемым соотношениями (6.557). Иначе говоря, из необходимых условий следует, что конечные времена выражаются соотношениями (6.557).

На основе предыдущего рассмотрения можно заключить, что необходимое условие  $H = 0$  дает нам только конечные времена, экстремизирующие  $J_1(\xi_1, \xi_2, T)$ . Это опять-таки вызвано тем, что необходимое условие  $H = 0$  для задачи с заданным временем является экстремальным условием (см. § 5.17, замечание 10), а не условием локального минимума.

Продолжим отыскание оптимального решения. Идея этого состоит в том, чтобы определить, какие из четырех положительных времен  $T_1,$



$T_2, T_3, T_4$  действительны, положительны и соответствуют локальному минимуму  $J_1(\xi_1, \xi_2, T)$ . После алгебраических преобразований можно прийти к следующим выводам:

1) если

$$\xi_2 \geq 0 \text{ и } \xi_1 \geq 0 \quad (6.566)$$

или

$$\xi_2 < 0 \text{ и } \xi_1 \geq \frac{\beta \xi_2^2}{12}, \quad (6.567)$$

то минимуму соответствует только время  $T_1$ . Следовательно, оптимальное управление единственно и конечное время равно  $T_1$ ;

2) если

$$\xi_2 \leq 0 \text{ и } \xi_1 \leq 0 \quad (6.568)$$

или

$$\xi_2 > 0 \text{ и } \xi_1 \leq -\frac{\beta \xi_2^2}{12}, \quad (6.569)$$

то минимуму соответствует только время  $T_3$ ; оптимальное управление единственно, а конечное время равно  $T_3$ ;

3) если

$$\xi_2 > 0 \text{ и } -\frac{\beta \xi_2^2}{12} < \xi_1 < 0, \quad (6.570)$$

то времена  $T_1$  и  $T_3$  соответствуют двум локальным минимумам, тогда как  $T_2$  соответствует локальному максимуму. В этом случае существуют два экстремальных управления, и поэтому может быть два оптимальных управления;

4) если

$$\xi_2 < 0 \text{ и } 0 < \xi_1 < \frac{\beta \xi_2^2}{12}, \quad (6.571)$$

то времена  $T_1$  и  $T_3$  соответствуют двум локальным минимумам, тогда как  $T_4$  соответствует локальному максимуму. В этом случае существуют два экстремальных управления и, возможно, два оптимальных управления.

В двух последних случаях (3-м и 4-м) возможна неединственность оптимальных управлений. Убедимся<sup>1</sup> что существует множество (кривая)  $\Gamma_\beta$  на фазовой плоскости такая, что если  $(\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_\beta$ , то имеются два различных оптимальных управления. Одно из этих управлений требует малого времени перехода и большой затраты энергии, а другое — большого времени перехода и малых затрат энергии (почему?). Область  $\Gamma_\beta$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} \Gamma_\beta &= \left\{ (\xi_1, \xi_2) : \frac{2}{\beta^2} T_1 + \frac{2}{T_1^3} (3\xi_1^2 + 3\xi_1\xi_2 T_1 + \xi_2 T_1^2) = \right. \\ &= \left. \frac{2}{\beta^2} T_3 + \frac{2}{T_3^3} (3\xi_1^2 + 3\xi_1\xi_2 T_3 + \xi_2^2 T_3^2) \right\}, \quad (6.572) \end{aligned}$$

где  $T_1$  и  $T_3$  определяются уравнениями (6.557).

Мы надеемся, что этот детально рассмотренный пример проиллюстрировал шаги, связанные с отысканием оптимальных управлений, и значение необходимых условий принципа минимума. Следующие упражнения предназначены для того, чтобы познакомить читателя с дополнительными свойствами простых задач об оптимальном управлении.

<sup>1</sup> См. [86].

**Упражнение 6.37.** Пусть  $\beta = 12$  и  $\xi_2 = 2$ . Начертите  $J_1(\xi_1, \xi_2, T)$  в зависимости от  $T$  для следующих значений  $\xi_1$ :  $\xi_1 = -10$ ;  $\xi_1 = -5$ ;  $\xi_1 = -4$ ;  $\xi_1 = -3$ ;  $\xi_1 = -1$ ;  $\xi_1 = 0$ ;  $\xi_1 = 1$ ;  $\xi_1 = 5$ . Найдите изменения в функции стоимости. Для  $\beta = 12$  и  $\xi_2 = 2$  определите значение  $\xi_1 = \hat{\xi}_1$  такое, что  $(\hat{\xi}_1, 2) \in \Gamma_\beta$  [см. соотношение (6.572)]. Начертите два оптимальных управления и соответствующие им оптимальные траектории на фазовой плоскости.

**Упражнение 6.38.** Рассмотрите систему уравнений (6.520), предположив, что конечным является состояние  $(\theta_1; \theta_2)$ . Найдите управление, переводящее  $(\xi_1; \xi_2)$  в  $(\theta_1; \theta_2)$  и минимизирующее функционал (6.522) при фиксированном времени  $T_f$ . Обсудите единственность решения. Положите  $\xi_1 = 1$ ,  $\xi_2 = -1$  и найдите условия для конечного состояния  $(\theta_1; \theta_2)$ , при которых задача с заданным временем  $T_f$  имеет решение.

**Упражнение 6.39.** Рассмотрите систему уравнений (6.520), полагая, что конечное состояние есть  $(\theta_1; \theta_2)$ . Найдите управление, переводящее  $(\xi_1; \xi_2)$  в  $(\theta_1; \theta_2)$  и минимизирующее функционал (6.550) с заданным временем. Обсудите единственность решения.

**Упражнение 6.40.** Рассмотрите систему вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); & x_1(0) &= \xi_1; \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t); & x_2(0) &= \xi_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.573)$$

Найдите управление, переводящее  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и минимизирующее функционалы:

$$\text{а) } E(u) = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} u^2(t) dt, \quad (6.574)$$

где  $T_f$  задано;

$$\text{б) } J_1(u) = \int_0^T \left[ k + \frac{1}{2} u^2(t) \right] dt, \quad (6.575)$$

где  $T$  не задано,  $k > 0$ .

**Упражнение 6.41.** Повторите упражнение 6.40 для систем, описываемых уравнениями:

$$\text{а) } \left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + u(t); \end{aligned} \right\} \quad (6.576)$$

$$\text{б) } \left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t); \end{aligned} \right\} \quad (6.577)$$

$$\text{в) } \left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t); \end{aligned} \right\} \quad (6.578)$$

$$\text{г) } \left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + u(t). \end{aligned} \right\} \quad (6.579)$$

**Упражнение 6.42.** Рассмотрите систему уравнений (6.520), считая что конечным является состояние  $(0, 0)$ . Найдите управление, переводящее  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и минимизирующее функционалы:

$$\text{а) } J_2(u) = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} [x_1^2(t) + u^2(t)] dt, \quad (6.580)$$

где  $T_f$  задано;

$$\text{б) } J_3(u) = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt, \quad (6.581)$$

где  $T_f$  задано;

$$\text{в) } J_4(u) = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} [k + x_1^2(t) + u^2(t)] dt, \quad (6.582)$$

где  $T_f$  не задано,  $k > 0$ .

**Упражнение 6.43.** Повторите упражнение 6.42 для системы, описываемой уравнениями (6.577).

## 6.20. ОГРАНИЧЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЕЛИЧИНЕ<sup>1</sup>

В § 6.18 мы рассмотрели задачу об оптимальном управлении линейной системой по квадратичному критерию преобразования. Мы полагаем, что компоненты управляющего вектора не ограничены по величине. Это предположение позволило нам выразить аналитически экстремальные управления.

В этом параграфе мы рассмотрим задачу 6.3а при дополнительном предположении о том, что компоненты  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  вектора управления  $\mathbf{u}(t)$  ограничены по величине соотношением

$$|u_j(t)| \leq 1; \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (6.583)$$

Мы покажем, что компоненты оптимального управления являются непрерывными функциями времени и что существуют интервалы времени, в течение которых компоненты оптимального управления постоянны. Непрерывность компонент оптимального управления довольно сильно отличает их от оптимальных кусочно-постоянных управлений для нормальных задач на оптимум по быстродействию или по расходу топлива. Мы покажем также, что данная задача о минимуме энергии является нормальной.

Точная формулировка задачи выглядит следующим образом.

**Задача 6.3б.** Дана линейная, полностью управляемая система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi} \quad (6.584)$$

и функционал

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} [\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) \rangle + 2\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{M}(t)\mathbf{u}(t) \rangle] dt, \quad (6.585)$$

где матрицы  $\mathbf{Q}(t), \mathbf{R}(t), \mathbf{M}(t)$  удовлетворяют предположениям, сформулированным в задаче 6.3а. Конечное время  $T_f$  задано. Предположим теперь, что управление ограничено по величине соотношением

$$|u_j(t)| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (6.586)$$

Требуется найти управление, которое:

- 1) удовлетворяют ограничению (6.586);
- 2) переводит систему, описываемую уравнениями (6.584), из начального состояния  $\boldsymbol{\xi}$  в  $\mathbf{0}$  за время  $T_f$ ;
- 3) минимизирует функционал (6.585).

Так как система и функционал те же, что и для задачи 6.3а, то гамильтониан для задачи 6.3б определяется соотношением (6.484), канонические уравнения — зависимостями (6.485) и (6.486) и граничные условия соотношениями (6.487). То обстоятельство, что гамильтониан должен быть минимальным вдоль оптимальной траектории, устанавливается при помощи соотношения (6.489), которое должно (и для задачи 6.3б) выполняться для всех допустимых управлений. Иначе говоря, необходимо, чтобы соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{R}(t)\mathbf{u}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{x}^*(t), \mathbf{M}(t)\mathbf{u}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{B}(t)\mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) \rangle + \langle \mathbf{x}^*(t), \mathbf{M}(t)\mathbf{u}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle \end{aligned} \quad (6.587)$$

<sup>1</sup> Дополнительные материалы содержатся в [103], [153], [155], [99], [128], [186] и [6].

выполнялось для всех  $\mathbf{u}(t)$ , удовлетворяющих условию

$$|u_j(t)| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Обозначим компоненты вектора  $\boldsymbol{\omega}^*(t)$ , определяемого соотношением

$$\boldsymbol{\omega}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}(t) [\mathbf{M}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}'(t) \mathbf{p}^*(t)] \quad (6.588)$$

через  $\omega_1^*(t)$ ,  $\omega_2^*(t)$ , ...,  $\omega_r^*(t)$ . Тогда уравнение (6.587) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{u}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{R}(t) \boldsymbol{\omega}^*(t) \rangle &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t) \boldsymbol{\omega}^*(t) \rangle. \end{aligned} \quad (6.589)$$

Добавив к обеим частям неравенства (6.589) одну и ту же величину

$$\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}^*(t), \mathbf{R}(t) \boldsymbol{\omega}^*(t) \rangle,$$

получим

$$\begin{aligned} \langle [\mathbf{u}^*(t) + \boldsymbol{\omega}^*(t)], \mathbf{R}(t) [\mathbf{u}^*(t) + \boldsymbol{\omega}^*(t)] \rangle &\leq \\ &\leq \langle [\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\omega}^*(t)], \mathbf{R}(t) [\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\omega}^*(t)] \rangle \end{aligned} \quad (6.590)$$

для всех  $\mathbf{u}(t)$  с  $|u_j(t)| \leq 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ .

Докажем теперь, что из необходимого условия (6.590) следует

$$\left. \begin{aligned} u_j^*(t) &= -\omega_j^*(t), \text{ если } |\omega_j^*(t)| \leq 1; \\ u_j^*(t) &= -\text{sign} \{ \omega_j^*(t) \}, \text{ если } |\omega_j^*(t)| > 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.591)$$

Для доказательства соотношений (6.591) поступим следующим образом.

Пусть

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\omega}^*(t). \quad (6.592)$$

Тогда из неравенства (6.590) следует, что функция

$$\Psi[\mathbf{u}(t)] = \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{a}(t) \rangle \quad (6.593)$$

имеет минимум при

$$\mathbf{a}^*(t) = \mathbf{u}^*(t) + \boldsymbol{\omega}^*(t). \quad (6.594)$$

Так как  $\mathbf{R}(t)$  положительно определена для любого  $t$ , то собственные значения  $d_1(t)$ ,  $d_2(t)$ , ...,  $d_r(t)$  матрицы  $\mathbf{R}(t)$  положительны<sup>1</sup>. Пусть  $\mathbf{D}(t)$  — диагональная матрица собственных значений. Известно, что существует ортогональная матрица  $\mathbf{P}(t)$  (т. е.  $\mathbf{P}'(t) \mathbf{P}(t) = \mathbf{I}$ ), для которой

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{P}'(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{P}(t). \quad (6.595)$$

Но

$$\Psi[\mathbf{u}(t)] = \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{a}(t) \rangle = \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{P}(t) \mathbf{D}(t) \mathbf{P}'(t) \mathbf{a}(t) \rangle =$$

$$= \langle \mathbf{P}'(t) \mathbf{a}(t), \mathbf{D}(t) \mathbf{P}'(t) \mathbf{a}(t) \rangle = \langle \mathbf{b}(t), \mathbf{D}(t) \mathbf{b}(t) \rangle = \sum_{j=1}^r d_j(t) b_j^2(t), \quad (6.596)$$

где  $\mathbf{b}(t) = \mathbf{P}'(t) \mathbf{a}(t)$ . (6.597)

Но так как  $\mathbf{P}(t)$  и  $\mathbf{P}'(t)$  обе ортогональны, то

$$\langle \mathbf{b}(t), \mathbf{b}(t) \rangle = \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{a}(t) \rangle \quad (6.598)$$

или, эквивалентно,

$$\sum_{j=1}^r b_j^2(t) = \sum_{j=1}^r a_j^2(t). \quad (6.599)$$

<sup>1</sup> См. § 2.15.

Теперь докажем соотношения

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \psi[\mathbf{u}(t)] = \min_{\mathbf{a}(t)} \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{a}(t) \rangle = \min_{\mathbf{b}(t)=\mathbf{P}'(t)\mathbf{a}(t)} \sum_{j=1}^r d_j(t) b_j^2(t) = \sum_{j=1}^r d_j(t) \min_{b_j(t)} b_j^2(t). \quad (6.600)$$

Из соотношения (6.600) следует, что если  $\mathbf{a}^*(t)$  минимизирует  $\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{a}(t) \rangle$ , то компоненты  $b_1^*(t), b_2^*(t), \dots, b_r^*(t)$  вектора

$$\mathbf{b}^*(t) = \mathbf{P}'(t) \mathbf{a}^*(t) \quad (6.601)$$

также минимизируют скалярное произведение  $\langle \mathbf{b}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$ . Имея в виду соотношение (6.598), можно прийти к выводу, что вектор  $\mathbf{P}(t) \mathbf{P}'(t) \mathbf{a}^*(t) = \mathbf{a}^*(t)$  минимизирует скалярное произведение  $\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{a}(t) \rangle$ . Таким образом, мы доказали, что если

$$\langle \mathbf{a}^*(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{a}^*(t) \rangle \leq \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{a}(t) \rangle,$$

то

$$\langle \mathbf{a}^*(t), \mathbf{a}^*(t) \rangle \leq \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{a}(t) \rangle. \quad (6.602)$$

Изменив доказательство, можно установить, что если

$$\langle \mathbf{a}^*(t), \mathbf{a}^*(t) \rangle \leq \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{a}(t) \rangle,$$

то

$$\langle \mathbf{a}^*(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{a}^*(t) \rangle \leq \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{a}(t) \rangle. \quad (6.603)$$

Но так как

$$\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{a}(t) \rangle = \langle [\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\omega}^*(t)], [\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\omega}^*(t)] \rangle = \sum_{j=1}^r [u_j(t) + \omega_j^*(t)]^2, \quad (6.604)$$

получим, что

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{a}(t) \rangle = \sum_{j=1}^r \min_{|u_j(t)| \leq 1} [u_j(t) + \omega_j^*(t)]^2. \quad (6.605)$$

Чтобы минимизировать положительную величину  $[u_j(t) + \omega_j^*(t)]^2$ , нужно положить  $u_j(t) = -\omega_j^*(t)$ , когда  $|\omega_j^*(t)| \leq 1$ ;  $u_j(t) = +1$ , когда  $\omega_j^*(t) < -1$  и  $u_j(t) = -1$ , когда  $\omega_j^*(t) > +1$ . Следовательно, управление  $\mathbf{u}^*(t)$  должно выражаться соотношениями (6.591) ввиду полученных зависимостей (6.602) и (6.603). Определим теперь функцию  $\text{sat} \{ \}$  следующим образом:

$$x_i = \text{sat} \{ y_i \},$$

что означает

$$\left. \begin{aligned} x_i &= y_i, \text{ если } |y_i| \leq 1; \\ x_i &= \text{sign} \{ y_i \}, \text{ если } |y_i| > 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.606)$$

Можно также определить векторную функцию  $\text{SAT} \{ \}$  в виде

$$\mathbf{x} = \text{SAT} \{ \mathbf{y} \}. \quad (6.607)$$

Последнее означает, что  $x_i = \text{sat} \{ y_i \}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Из соотношений (6.591) и (6.588) заключаем, что оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t)$  однозначно выражается через состояние  $\mathbf{x}(t)$  и дополнительную переменную  $\mathbf{p}^*(t)$  следующим образом:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\text{SAT} \{ \mathbf{R}^{-1}(t) [\mathbf{M}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}'(t) \mathbf{p}^*(t)] \}. \quad (6.608)$$

Заметим, что в отличие от функций  $\text{SIGN}$  и  $\text{DEZ}$  функция  $\text{SAT}$  дает нам вполне определенное  $\mathbf{u}^*(t)$ . По этой причине вырожденных случаев для задачи на минимум энергии (6.36) не возникает при условии, что матрица  $\mathbf{R}(t)$  положительно определена. Отсюда же следует, что компоненты оптимального управления  $u_j(t)$  являются непрерывными функциями вре-

мени. Компоненты управлений, оптимальных по быстродействию и расходу топлива, являются кусочно-постоянными функциями времени.

В § 6.18 мы видели, что оптимальное управление для задачи 6.3а (без ограничений на управление) записывается в виде

$$\mathbf{u}_A^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) [\mathbf{M}(t) \mathbf{x}_A^*(t) + \mathbf{B}'(t) \mathbf{p}_A^*(t)]. \quad (6.609)$$

Мы показали, что оптимальное управление для задачи 6.3б равно:

$$\mathbf{u}_B^* = -\text{SAT} \{ \mathbf{R}^{-1}(t) [\mathbf{M}(t) \mathbf{x}_B^*(t) + \mathbf{B}'(t) \mathbf{p}_B^*(t)] \}. \quad (6.610)$$

Индексы  $A$  и  $B$  использованы для того, чтобы отличать оптимальные величины для каждого из случаев. В § 6.18 мы подставили оптимальное управление в канонические уравнения и смогли выразить управление в виде функции от  $\xi$ ,  $t_0$  и  $T_f$  [см. (6.512)], предполагая, что оптимальное управление единственно.

В случае управления с ограничениями можно подставить выражение (6.608) в канонические уравнения (6.485) и (6.486) и получить

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^*(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{B}(t) \text{SAT} \{ \mathbf{R}^{-1}(t) [\mathbf{M}(t) \mathbf{x}^*(t) + \\ &\quad + \mathbf{B}'(t) \mathbf{p}^*(t)] \}; \\ \dot{\mathbf{p}}^*(t) &= -\mathbf{Q}(t) \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{A}'(t) \mathbf{p}^*(t) - \mathbf{M}(t) \times \\ &\quad \times \text{SAT} \{ \mathbf{R}^{-1}(t) [\mathbf{M}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}'(t) \mathbf{p}^*(t)] \} \end{aligned} \right\} \quad (6.611)$$

К сожалению, эта система  $2n$  дифференциальных уравнений нелинейна. По этой причине нельзя получить аналитическое решение, которое бы в явном виде устанавливало зависимость управления  $\mathbf{u}_B^*(t)$  от  $\xi$ ,  $T_f$  и  $t_0$ . Вместо этого приходится искать решение (или решения), удовлетворяющее граничным условиям  $\mathbf{x}^*(t_0) = \xi$  и  $\mathbf{x}^*(T_f) = \mathbf{0}$  путем итераций на вычислительной машине.

Предположим, что мы решили задачу 6.3а и нашли оптимальное управление  $\mathbf{u}_A^*(t)$ . Очевидно, что в общем случае компоненты управления  $\mathbf{u}_A^*(t)$  могут и не удовлетворять ограничениям, которые накладываются в задаче 6.3б. Рассмотрим управление вида

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \text{SAT} \{ \mathbf{u}_A^*(t) \}. \quad (6.612)$$

Иначе говоря, пропустим каждую компоненту  $\mathbf{u}_A^*(t)$  через ограничитель, который выполняет операцию  $\text{sat} \{ \}$ , и тогда управление  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  удовлетворит ограничениям задачи 6.3б. Возникает вопрос: является ли управление  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  оптимальным для задачи 6.3б? Иначе говоря, возможно ли соотношение

$$\mathbf{u}_B^*(t) = \text{SAT} \{ \mathbf{u}_A^*(t) \}, \quad t \in [t_0, T_f] ? \quad (6.613)$$

В общем случае ответ получается отрицательным. Уравнение (6.613) справедливо только в том случае, когда  $\mathbf{u}_A^*(t)$  никогда не выходит за ограничения. Это, однако, имеет место лишь в очень малой области фазового пространства. Более подробную информацию можно найти в работе [103].

Этим завершается рассмотрение задачи о минимуме энергии. В гл. 9 мы рассмотрим расчет линейных систем с квадратичным критерием преобразования и задачу со свободным концом (т. е. случай, когда  $\mathbf{x}(T_f)$  не задано). Следующие упражнения предназначены для того, чтобы проиллюстрировать некоторые из трудностей, связанных с решением задач о минимуме энергии при наличии ограничений управления по величине.

**Упражнение 6.44.** Рассмотрите систему вида

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t); \quad x_1(0) = \xi_1; \quad (6.614)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t); \quad x_2(0) = \xi_2 \quad (6.615)$$

при  $|u(t)| \leq 1$ .

Определите управление, переводящее систему (6.614) из  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и минимизирующее следующие функционалы:

$$\text{а) } J_1(u) = \int_0^{T_f} \frac{1}{2} u^2(t) dt, \quad \text{где } T_f \text{ задано;} \quad (6.616)$$

$$\text{б) } J_2(u) = \int_0^T \left[ k + \frac{1}{2} u^2(t) \right] dt, \quad \text{где } T \text{ не задано, } k > 0, \quad (6.617)$$

$$\text{в) } J_3(u) = \int_0^{T_f} \frac{1}{2} [x_1^2(t) + u^2(t)] dt, \quad \text{где } T_f \text{ задано;} \quad (6.618)$$

$$\text{г) } J_4(u) = \int_0^{T_f} \frac{1}{2} [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt, \quad \text{где } T_f \text{ задано;} \quad (6.619)$$

$$\text{д) } J_5(u) = \int_0^T \left[ k + \frac{1}{2} x_1^2(t) + \frac{1}{2} u^2(t) \right] dt, \quad \text{где } T \text{ не задано, } k > 0. \quad (6.620)$$

Для случаев а), в) и г) нарисуйте графики оптимального управления и оптимальные траектории из исходного состояния  $(1, 1)$  для следующих значений  $T_f$ :  $T_f = \sqrt{6} + 1$ ,  $T_f = 4$ ;  $T_f = 5$ ;  $T_f = 10$ . Что получается, если  $T_f < \sqrt{6} + 1$ ? Существует ли значение  $T_f$ , при котором оптимальное управление не является постоянным на любом подынтервале из  $[0; T_f]$ ?

**Упражнение 6.45.** Рассмотрите систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t); \quad x_1(0) = \xi_1; \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u(t); \quad x_2(0) = \xi_2 \quad (6.621)$$

при  $|u(t)| \leq 1$ . Найдите управление, переводящее  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и минимизирующее:

а) функционал (6.617); б) функционал (6.620).

Объясните единственность решений. Нарисуйте оптимальные траектории из начального состояния  $(1, 1)$  для  $k = 1$ ,  $k = 5$ ,  $k = 10$  и  $k = 100$ .

**Упражнение 6.46.** Рассмотрите систему вида

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t); \quad x_1(0) = \xi_1; \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u(t); \quad x_2(0) = \xi_2 \quad (6.622)$$

при  $|u(t)| \leq 1$ . Найдите управление, переводящее систему (6.622) из  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и минимизирующее функционал (6.617). Найдите множество начальных состояний, для которых решение существует. Рассмотрите единственность решения.

## ВЫРОЖДЕННЫЕ ЗАДАЧИ

### 6.21. ГАМИЛЬТониан — ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

В § 6.3 мы дали определение вырожденных задач об оптимальном управлении (см. определение 6.5). Напомним, что задача вырождается,

<sup>1</sup> Дополнительные материалы по этому вопросу см. в работах [104], [102], [211], [176], [94], [184], [186] и [14]. В частности, в работе [104] подробно рассматриваются вырожденные задачи с многочисленными примерами.

если аргумент функции  $\text{sign} \{ \}$  тождественно равен нулю на конечном интервале времени. В этом случае необходимое условие

$$H(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*, t) \leq H(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{u}, t)$$

не дает информации относительно связи  $\mathbf{u}^*$  с  $\mathbf{x}^*$  и  $\mathbf{p}^*$ . Ниже будут рассмотрены вырожденные задачи с более общей точки зрения. В данном параграфе разбираются задачи, для которых гамильтониан является линейной функцией управляющей переменной  $u(t)$ , а в следующем параграфе — задачи, для которых гамильтониан является линейной функцией управления и его модуля  $|u(t)|$ .

В общем случае решение вырожденных задач более сложно, чем решение нормальных задач оптимизации. Эти трудности возникают из-за того, что необходимое условие, состоящее в том, что гамильтониан минимизируется (по отношению к управлению) вдоль оптимальной траектории, не позволяет получить достаточно определенного выражения для оптимального управления. При отсутствии такой информации мы должны пользоваться другими необходимыми условиями, пытаясь найти вполне определенное выражение такого рода. Эти положения будут проясняться по мере рассмотрения теории оптимального управления.

К сожалению, в настоящее время общие результаты, относящиеся к существованию вырожденных решений задач оптимизации, весьма ограничены. Необходимы дополнительные исследования природы, свойств и других характеристик вырожденных решений. Поэтому в данном параграфе рассмотрим эти положения достаточно поверхностно. Далее станет очевидно, что вырожденные решения связаны со сложными вычислительными операциями. Рассматриваемый метод будет довольно примитивным, но, сообщая его читателю, мы надеемся продемонстрировать как следует подходить к вырожденным задачам.

Чтобы избежать усложнения обозначений, будем рассматривать инвариантные по времени задачи с единственной управляющей переменной. Для задач с многими управляющими переменными основные понятия не изменятся. Кроме этого, мы будем рассматривать задачи с закрепленным концом (задано конечное состояние) как с заданным, так и с незадаанным временем перехода.

Сформулируем задачу, которая может иметь вырожденное решение.

**Задача 6.4а.** Дана инвариантная во времени система

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i[\mathbf{x}(t)] + b_i[\mathbf{x}(t)] u(t), \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (6.623)$$

или в векторных обозначениях

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] + \mathbf{b}[\mathbf{x}(t)] u(t), \quad (6.624)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  —  $n$ -мерный вектор состояния и  $u(t)$  — скалярная управляющая переменная.

Предположим, что  $u(t)$  ограничена по величине соотношением

$$|u(t)| \leq 1 \text{ для всего } t. \quad (6.625)$$

Даны начальное состояние  $\mathbf{x}(0) = \xi$ , конечное состояние  $\theta$  и функционал

$$J(u) = \int_0^T \{f_0[\mathbf{x}(t)] + b_0[\mathbf{x}(t)] u(t)\} dt, \quad (6.626)$$

где  $f_0[\mathbf{x}(t)]$  и  $b_0[\mathbf{x}(t)]$  — скалярные функции состояния и  $T$  может быть задано или не задано.



Найти допустимое управление, переводящее систему (6.624) из  $\xi$  в  $\theta$  [ $\mathbf{x}(T) = \theta$ ] и минимизирующее функционал  $J(u)$ .

Отметим, что скалярное управление  $u(t)$  входит линейно как в уравнение системы (6.623), так и в подынтегральную функцию функционала (6.626).

Для упрощения выкладок примем

$$\dot{x}_0(t) = f_0[\mathbf{x}(t)] + b_0[\mathbf{x}(t)]u(t), \quad x_0(0) = 0 \quad (6.627)$$

и запишем гамильтониан  $H$ , используя скаляр<sup>1</sup>

$$p_0(t) = p_0 = \text{const} \geq 0. \quad (6.628)$$

Итак, гамильтониан для задачи 6.4а равен

$$H = \sum_{i=0}^n f_i[\mathbf{x}(t)] p_i(t) + u(t) \sum_{i=0}^n b_i[\mathbf{x}(t)] p_i(t). \quad (6.629)$$

Отметим, что гамильтониан есть линейная функция от  $u(t)$ . Если определить функции  $\alpha$  и  $\beta$ , положив

$$\alpha[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), p_0] = \sum_{i=0}^n f_i[\mathbf{x}(t)] p_i(t); \quad (6.630)$$

$$\beta[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), p_0] = \sum_{i=0}^n b_i[\mathbf{x}(t)] p_i(t), \quad (6.631)$$

то гамильтониан  $H$  можно записать в виде

$$H = \alpha[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), p_0] + u(t) \beta[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), p_0]. \quad (6.632)$$

Дополнительные переменные  $p_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  определяются соотношениями

$$\dot{p}_i(t) = - \frac{\partial H}{\partial x_i(t)},$$

и поэтому для  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  имеем

$$\dot{p}_i(t) = - \sum_{j=0}^n p_j(t) \frac{\partial f_j[\mathbf{x}(t)]}{\partial x_i(t)} - u(t) \sum_{j=0}^n p_j(t) \frac{\partial b_j[\mathbf{x}(t)]}{\partial x_i(t)}. \quad (6.633)$$

Установим теперь необходимые условия для задачи 6.4а.

**Теорема 6.18. Необходимые условия для задачи 6.4а.** Если  $u^*(t)$  — оптимальное управление, а  $\mathbf{x}^*(t)$  — соответствующая оптимальная траектория, то существуют дополнительная переменная  $\mathbf{p}^*(t)$  и константа  $p_0^* \geq 0$  такие, что

а) для  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\dot{x}_i^*(t) = f_i[\mathbf{x}^*(t)] + b_i[\mathbf{x}^*(t)] u^*(t);$$

$$\dot{p}_i^*(t) = - \sum_{j=0}^n p_j^*(t) \frac{\partial f_j[\mathbf{x}^*(t)]}{\partial x_i^*(t)} - u^*(t) \sum_{j=1}^n p_j^*(t) \frac{\partial b_j[\mathbf{x}^*(t)]}{\partial x_i^*(t)} \quad (6.634)$$

и  $\mathbf{x}^*(0) = \xi$ ,  $\mathbf{x}^*(T) = \theta$ ; (6.635)

б) для  $t \in [0, T]$  и любых  $u(t)$ , удовлетворяющих ограничению  $|u(t)| \leq 1$ , выполняются следующие соотношения [см. уравнения (6.630) — (6.632)]:

$$\begin{aligned} & \alpha[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0^*] + u^*(t) \beta[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0^*] \leq \\ & \leq \alpha[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0^*] + u(t) \beta[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0^*]; \end{aligned} \quad (6.636)$$

<sup>1</sup> См. § 5.15 и 5.16.

в) если  $T$  не задано, то

$$\alpha [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0^*] + u^*(t) \beta [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0^*] = 0 \quad (6.637)$$

для любого  $t \in [0, T]$ .

Если  $T$  фиксировано, то

$$\alpha [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0^*] + u^*(t) \beta [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0^*] = c = \text{const} \quad (6.638)$$

для любого  $t \in [0, T]$ .

Нетрудно видеть, что из соотношения (6.636) следует, что

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\text{sign} \{ \beta [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0^*] \} = \\ &= -\text{sign} \left\{ \sum_{i=0}^n b_i [\mathbf{x}^*(t)] p_i^*(t) \right\}. \end{aligned} \quad (6.639)$$

Если скалярная функция  $\beta [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0^*]$  не равна нулю, то уравнение (6.639) позволяет получить вполне определенное соотношение для управления  $u^*(t)$ . Если, однако,

$$\beta [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0^*] = 0 \quad \text{для всех } t \in (t_1, t_2], \quad (6.640)$$

где  $(t_1, t_2]$  — подынтервал из  $[0, T]$ ,

то функция  $\text{sign} \{ \}$  неопределенна.

Действительно, если выполняется соотношение (6.640), то необходимое условие (6.636) сводится к следующему:

$$u^*(t) \cdot 0 \leq u(t) \cdot 0 \quad (6.641)$$

для всех  $t \in (t_1, t_2]$ .

Последнее является тождеством для всех  $u(t)$  (даже для тех, которые не удовлетворяют ограничению  $|u(t)| \leq 1$ ). Такой случай называется вырожденным.

**Определение 6.13. Оптимальные и экстремальные вырожденные управления.** Будем говорить, что задача 6.4а вырождена, если оптимальное управление  $u^*(t)$ , траектория  $\mathbf{x}^*(t)$  и соответствующая  $\mathbf{p}^*(t)$  обладают следующим свойством. Существует по крайней мере один (полуоткрытый) интервал  $(t_1, t_2]$  в  $[0, T]$  такой, что

$$\sum_{i=0}^n p_i^*(t) b_i [\mathbf{x}^*(t)] = 0 \quad \text{для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.642)$$

В этом случае интервал  $(t_1, t_2]$  будем называть интервалом вырожденности, функцию  $u_{(t_1, t_2]}^*$  — вырожденным оптимальным управлением и траекторию  $\mathbf{x}_{(t_1, t_2]}^*$  — вырожденной оптимальной траекторией.

Если можно найти экстремальное управление  $\hat{u}(t)$  (т. е. управление, удовлетворяющее всем необходимым условиям теоремы 6.18), при котором соответствующие  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  и  $\hat{\mathbf{p}}(t)$  удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=0}^n \hat{p}_i(t) b_i [\hat{\mathbf{x}}(t)] = 0 \quad \text{для всех } t \in (t_1, t_2],$$

$$\hat{p}_0(t) = \hat{p}_0 \geq 0,$$

то управление  $\hat{u}_{(t_1, t_2]}$  называют вырожденным экстремальным управлением, а траекторию  $\mathbf{x}_{(t_1, t_2]}$  — вырожденной экстремальной траекторией.

<sup>1</sup> Эту функцию часто называют функцией переключения.

Естественно, что из существования вырожденного экстремального управления не вытекает необходимость вырожденности оптимального управления. В таких случаях нужна дополнительная информация (т. е. единственность) для того, чтобы сделать заключения относительно оптимального управления.

Рассмотрим, что представляют собой вырожденные экстремальные управления. Пусть перед нами поставлена задача 6.4а. Попытаемся найти экстремальные управления. Первый шаг состоит в том, чтобы записать гамильтониан и канонические уравнения. Предположим далее, что мы рассматриваем случай, когда конечное время не задано и нам нужно исследовать, возможно ли получить экстремальные управления. Проведем это исследование следующим образом.

Предположим, что <sup>1</sup>

$$\sum_{i=0}^n b_i p_i = 0, \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.643)$$

Так как рассматривается задача с незаданным временем, то должно выполняться

$$H = \sum_{i=0}^n f_i p_i + u \sum_{i=0}^n b_i p_i = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.644)$$

Таким образом, уравнения (6.643) и (6.644) требуют, чтобы

$$\sum_{i=0}^n f_i p_i = 0 \text{ для любых } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.645)$$

Но из выражения (6.643) следует, что

$$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \sum_{i=0}^n b_i p_i = 0 \text{ для всех } \gamma = 1, 2, \dots \text{ и всех } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.646)$$

Аналогично из выражения (6.645) следует, что

$$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \sum_{i=0}^n f_i p_i = 0 \quad (6.647)$$

для всех  $\gamma = 1, 2, \dots$  и любого  $t \in (t_1, t_2]$ .

Канонические уравнения записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i + u b_i; \\ \dot{p}_i &= - \sum_{j=0}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - u \sum_{j=0}^n p_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (6.648)$$

Пусть в выражении (6.646)  $\gamma = 1$ , тогда <sup>2</sup>

$$\frac{d}{dt} \sum_i b_i p_i = \sum_i \left( \dot{p}_i b + p_i \sum_j \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \dot{x}_j \right) = 0. \quad (6.649)$$

<sup>1</sup> Далее мы опускаем зависимость  $x(t)$  от переменных с целью упрощения уравнений (6.643)—(6.675).

<sup>2</sup> Для упрощения уравнений под  $\sum_i$  мы понимаем  $\sum_{i=0}^n$ . Далее, в уравнениях (6.649)—(6.675) мы опускаем утверждение «для любых  $t \in (t_1, t_2]$ ».

Подставим соотношение (6.648) в уравнение (6.649) и после алгебраических преобразований получим

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_j \left( f_i p_i \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_i p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) + \\ & + u \sum_i \sum_j \left( p_i b_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - p_i b_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.650)$$

Но коэффициент при  $u$  в полученном выражении (6.650) равен нулю (почему?). Итак, получим

$$\sum_i \sum_j p_i \left( b_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (6.651)$$

Далее в выражении (6.647) положим  $\gamma = 1$  и получим, что

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \sum_i f_i \dot{p}_i = \sum_i \left( \dot{f}_i \dot{p}_i + p_i \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \dot{x}_j \right) = \\ &= \sum_i \sum_j \left( p_i \dot{f}_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - p_i f_i \frac{\partial \dot{f}_i}{\partial x_j} \right) + \\ &+ u \sum_i \sum_j \left( p_i b_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - p_i f_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \right) = \\ &= u \sum_i \sum_j p_i \left( b_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.652)$$

Откуда следует, что или

$$u = 0, \quad (6.653)$$

или

$$\sum_i \sum_j p_i \left( b_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (6.654)$$

Но уравнения (6.654) и (6.651) одинаковы. Итак, уравнение (6.652) удовлетворяется для  $u \neq 0$ . Иначе говоря, из зависимостей (6.652) не следует, что  $u = 0$ .

Соотношения (6.643) и (6.645) приводят к одному и тому же уравнению (6.654). Поэтому можно сделать вывод, что уравнения (6.646) и (6.647) позволяют получить тот же самый набор соотношений при  $\gamma = 1$ , а следовательно, для всех  $\gamma = 2, 3, \dots$

Таким образом, для наличия вырожденного экстремального управления необходимо (но недостаточно), чтобы для любого  $t \in (t_1, t_2]$  удовлетворялись соотношения

$$\sum_i b_i p_i = 0; \quad (6.655)$$

$$\sum_i f_i p_i = 0; \quad (6.656)$$

$$\sum_i \sum_j p_i \left( b_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (6.657)$$

Пусть теперь в выражении (6.646)  $\gamma = 2$ , тогда

$$\frac{d}{dt} \sum_i \sum_j p_i \left( b_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (6.658)$$

После алгебраических преобразований получим

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_j \sum_k p_i \left( -b_i \frac{\partial f_k \partial f_i}{\partial x_j \partial x_k} + f_j \frac{\partial f_i \partial b_k}{\partial x_k \partial x_j} + f_k \frac{\partial b_j \partial f_i}{\partial x_k \partial x_j} + \right. \\ & \quad \left. + b_j f_k \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} - f_k \frac{\partial f_j \partial b_i}{\partial x_k \partial x_j} - f_j f_k \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_k \partial x_j} \right) + \\ & + u \sum_i \sum_j \sum_k p_i \left( f_j \frac{\partial b_k}{\partial x_j} \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - b_i \frac{\partial f_k \partial b_i}{\partial x_j \partial x_k} + b_k \frac{\partial b_j \partial f_i}{\partial x_k \partial x_j} + \right. \\ & \quad \left. + b_j b_k \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} - b_k \frac{\partial f_j \partial b_i}{\partial x_k \partial x_j} - f_j f_k \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_k \partial x_j} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.659)$$

или в виде:

$$\sum_i p_i \Psi_{2i}(\mathbf{x}) + u \sum_i p_i \Phi_{2i}(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.660)$$

В общем случае коэффициент  $\sum p_i \Phi_{2i}(\mathbf{x})$  не равен нулю<sup>1</sup> для любого  $t \in (t_1, t_2]$ .

Итак, если

$$\sum_i p_i \Phi_{2i}(\mathbf{x}) \neq 0, \quad (6.661)$$

то можно решить уравнение (6.660) относительно  $u$  и получить

$$u = - \frac{\sum_i p_i \Psi_{2i}(\mathbf{x})}{\sum_i p_i \Phi_{2i}(\mathbf{x})}. \quad (6.662)$$

Если

$$\sum_i p_i \Phi_{2i}(\mathbf{x}) = 0, \quad (6.663)$$

то уравнение (6.660) сводится к следующему:

$$\sum_i p_i \Psi_{2i}(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.664)$$

Полагая в выражении (6.646)  $\gamma = 3$ , находим

$$\frac{d}{dt} \sum_i p_i \Psi_{2i}(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.665)$$

Читатель должен оценить трудности, связанные с громоздкими обозначениями при определениях высших производных.

Предположим, что последовательное дифференцирование по времени, фигурирующее в уравнении (6.646), приводит к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \gamma = 1: & \sum_i p_i \Psi_{1i}(\mathbf{x}) = 0; \\ \gamma = 2: & \sum_i p_i \Psi_{2i}(\mathbf{x}) = 0; \\ & \dots \dots \dots \\ \gamma = n-1: & \sum_i p_i \Psi_{(n-1)i}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.666)$$

<sup>1</sup> Это можно показать, предположив, что  $b_0(\mathbf{x}), b_1(\mathbf{x}), \dots, b_n(\mathbf{x})$  — константы (т. е. не зависят от  $\mathbf{x}$ ), тогда  $\sum_i p_i \Phi_{2i}(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_j \sum_k p_i b_j b_k$ ; значение этого коэффициента, конечно, может быть и ненулевым.

Иначе говоря, в каждой производной по времени коэффициент при  $u$  оказался равным нулю. Нетрудно видеть, что  $n + 1$  соотношение (6.666) будет линейно относительно  $p_i$ , так как дифференциальные уравнения (6.648) линейны относительно  $p_i$ . Здесь  $\psi_{1i}(\mathbf{x}) = \sum_j \left[ b_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \right.$   
 $\left. - f_i \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \right]$  в виду соотношения (6.651);  $\psi_{2i}(\mathbf{x})$  есть выражение в (6.666), которое вместе с соотношениями (6.655) и (6.656) дает нам всего  $n + 1$  уравнений, которые линейны относительно  $p_0, p_1, \dots, p_n$ . Эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} f_0(\mathbf{x}) & f_1(\mathbf{x}) & f_2(\mathbf{x}) & \cdots & f_n(\mathbf{x}) \\ b_0(\mathbf{x}) & b_1(\mathbf{x}) & b_2(\mathbf{x}) & \cdots & b_n(\mathbf{x}) \\ \psi_{10}(\mathbf{x}) & \psi_{11}(\mathbf{x}) & \psi_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & \psi_{1n}(\mathbf{x}) \\ \psi_{20}(\mathbf{x}) & \psi_{21}(\mathbf{x}) & \psi_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & \psi_{2n}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{(n-1)0}(\mathbf{x}) & \psi_{(n-1)1}(\mathbf{x}) & \psi_{(n-1)2}(\mathbf{x}) & \cdots & \psi_{(n-1)n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.667)$$

или в виде

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (6.668)$$

Так как  $n + 1$  — мерный вектор  $\begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ , то необходимо, чтобы  $n + 1 \times n + 1$  матрица  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  была вырождена для любого  $t \in (t_1, t_2]$ . Итак, условие

$$\det \mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0 \text{ для любых } t \in (t_1, t_2] \quad (6.669)$$

необходимо для существования вырожденного экстремального управления в случае, если последовательное дифференцирование по времени приводит к системе  $n + 1$  соотношений вида (6.667).

Предположим теперь<sup>1</sup>, что последовательное дифференцирование по времени приводит к уравнению, в котором коэффициент при  $u$  не равен нулю. Для определенности будем считать, что последовательное дифференцирование по времени привело к системе уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = 1: \sum_i p_i \psi_{1i}(\mathbf{x}) = 0; \\ \gamma = 2: \sum_i p_i \psi_{2i}(\mathbf{x}) = 0; \\ \dots \\ \gamma = m: \sum_i p_i \psi_{mi}(\mathbf{x}) = 0; \end{array} \right\} 1 \leq m \quad (6.670)$$

$$\gamma = m + 1: \sum_i p_i \psi_{(m+1)i}(\mathbf{x}) + u \sum_i p_i \Phi_{(m+1)i}(\mathbf{x}) = 0, \quad (6.671)$$

где

$$\sum_i p_i \Phi_{(m+1)i}(\mathbf{x}) \neq 0. \quad (6.672)$$

<sup>1</sup> В противном случае, повидимому, может быть бесконечное число оптимальных уравнений, хотя это предположение не доказано.

Уравнение (6.671) можно разрешить относительно  $u$  и получить

$$u = - \frac{\sum_i p_i \Psi_{(m+1)i}(\mathbf{x})}{\sum_i p_i \Phi_{(m+1)i}(\mathbf{x})}. \quad (6.673)$$

Соотношение (6.673) дает необходимое условие вырожденного экстремального управления. По сути дела, мы нашли соотношение между  $u$ ,  $p_0, p_1, \dots, p_n$  и  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Ограничение величины  $|u| \leq 1$  накладывает на переменные ограничения вида

$$\left| \frac{\sum_i p_i \Psi_{(m+1)i}(\mathbf{x})}{\sum_i p_i \Phi_{(m+1)i}(\mathbf{x})} \right| \leq 1. \quad (6.674)$$

Дополнительно в виду соотношений (6.655), (6.656) и (6.670) должны удовлетворяться  $m + 2$  уравнений ( $m \geq 1$ )

$$\left. \begin{aligned} \sum_i p_i f_i(\mathbf{x}) &= 0; \\ \sum_i p_i b_i(\mathbf{x}) &= 0; \\ \sum_i p_i \Psi_{1i}(\mathbf{x}) &= 0; \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \sum_i p_i \Psi_{mi}(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.675)$$

В любой конкретной задаче нужно исследовать, удовлетворяются ли все эти соотношения. Если одно из них не выполняется, то это представляет собой нарушение необходимых условий, и поэтому вырожденных экстремальных уравнений не может быть. Если необходимые условия удовлетворяются, то могут существовать вырожденные экстремальные управления.

**Пример 6.9.** Рассмотрим гармонический осциллятор

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \end{aligned} \right\} \quad (6.676)$$

и функционал

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt, \quad (6.677)$$

где  $T$  не задано.

Проверим, может ли эта задача иметь вырожденные экстремальные управления. Для этого запишем гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} p_0 x_1^2(t) + \frac{1}{2} p_0 x_2^2(t) + x_2(t) p_1(t) - \quad (6.678)$$

$$- x_1(t) p_2(t) + u(t) p_2(t), \quad (6.679)$$

где  $p_0 = \text{const} \geq 0$ ,

$$\dot{p}_1(t) = - \frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = - p_0 x_1(t) + p_2(t) \quad (6.680)$$

$$\dot{p}_2(t) = - \frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = - p_0 x_2(t) - p_1(t). \quad (6.681)$$

Предположим, что

$$p_2(t) = 0, \quad \text{для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.682)$$

Тогда, поскольку мы имеем дело с задачей с заданным временем, должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{1}{2} p_0 x_1^2(t) + \frac{1}{2} p_0 x_2^2(t) + x_2(t) p_1(t) - x_1(t) p_2(t) = 0 \quad (6.683)$$

для любого  $t \in (t_1, t_2]$ .

Но из условия (6.682) следует, что

$$\dot{p}_2(t) = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2], \quad (6.684)$$

и поэтому из уравнения (6.681) находим

$$p_0 x_2(t) = -p_1(t) \text{ для любого } t \in (t_1, t_0]. \quad (6.685)$$

Если

$$p_0 = 0, \quad (6.686)$$

то из соотношения (6.685) вытекает, что

$$p_1(t) = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_0]. \quad (6.687)$$

Но уравнения (6.682), (6.686) и (6.687) не могут выполняться, потому что вектор

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

не может быть равен нулю, а следовательно,  $p_0 \neq 0$ . Поэтому примем

$$p_0 = 1. \quad (6.688)$$

Тогда соотношение (6.685) сводится к уравнению

$$x_2(t) = -p_1(t) \text{ для любого } t \in (t_1, t_2] \quad (6.689)$$

или

$$\frac{1}{2} x_1^2(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.690)$$

Из последнего выражения следует, что

$$x_1(t) = \pm x_2(t) \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.691)$$

Дифференцируя выражение (6.689), находим

$$\dot{x}_2(t) = -\dot{p}_1(t) = x_1(t) \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.692)$$

Из уравнений (6.692) и (6.676) имеем

$$u(t) = 2x_1(t) \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.693)$$

Ввиду ограничения  $|u(t)| \leq 1$  и соотношения (6.691) приходим к выводу, что вырожденное управление может быть экстремальным, когда

$$|x_1(t)| \leq \frac{1}{2}; \quad |x_2(t)| \leq \frac{1}{2}; \quad x_1(t) = \pm x_2(t). \quad (6.694)$$

Это показано на рис. 6.23; прямые  $x_a$  и  $x_b$  часто вызывают вырожденными траекториями или вырожденными дугами. Нетрудно видеть, что если подставить соотношение (6.693) в уравнения системы (6.676), то получим

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (6.695)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) \text{ для любого } t \in (t_1, t_2].$$

Можно заметить, что решение системы (6.695), начиная с исходного состояния  $x_1(0) = \xi_1$ ,  $x_2(0) = \xi_2$ , запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2} e^t (\xi_1 + \xi_2) + \frac{1}{2} e^{-t} (\xi_1 - \xi_2); \\ x_2(t) &= \frac{1}{2} e^t (\xi_1 + \xi_2) - \frac{1}{2} e^{-t} (\xi_1 - \xi_2). \end{aligned} \right\} \quad (6.696)$$

Если  $\xi_1 = \xi_2$ , то решение (6.696) неустойчиво, и устойчиво, когда  $\xi_1 = -\xi_2$ . Характер решения показан на рис. 6.23 стрелками на вырожденных траекториях  $x_a$  и  $x_b$ . Таким

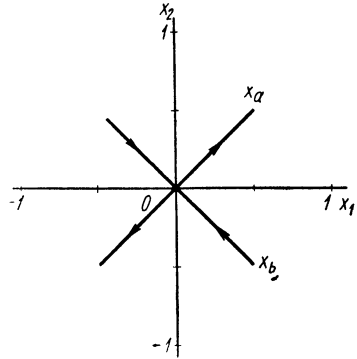


Рис. 6.23. Вырожденные дуги  $x_a$  и  $x_b$



образом, для этой задачи в зависимости от начальных условий  $(\xi_1, \xi_2)$  и конечного состояния  $(\theta_1, \theta_2)$  экстремальные управления могут оказаться вырожденными.

**Пример 6.10.** Опять рассмотрим гармонический осциллятор

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \end{aligned} \right\} \quad (6.697)$$

но с функционалом

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T x_1^2(t) dt, \quad \text{где } T \text{ не задано.} \quad (6.698)$$

Проверим, могут ли быть вырожденными экстремальные управления. Для этого запишем гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2} p_0 x_1^2(t) + x_2(t) p_1(t) - x_1(t) p_2(t) + u(t) p_2(t), \quad (6.699)$$

Тогда

$$p_0 = \text{const} \geq 0; \quad (6.700)$$

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = -p_0 x_1(t) + p_2(t); \quad (6.701)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -p_1(t), \quad (6.702)$$

Предположим, что

$$p_2(t) = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2], \quad (6.703)$$

тогда

$$\frac{1}{2} p_0 x_1^2(t) + x_2(t) p_1(t) = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.704)$$

Но

$$\dot{p}_2(t) = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2], \quad (6.705)$$

и поэтому из уравнения (6.702) имеем

$$p_1(t) = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.706)$$

Таким образом, из соотношения (6.704) следует

$$p_0 = 1; \quad (6.707)$$

и поэтому

$$x_1(t) = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2], \quad (6.708)$$

$$\dot{x}_1(t) = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.709)$$

Из уравнений (6.709) и (6.697) находим

$$x_2(t) = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2], \quad (6.710)$$

и поэтому

$$u(t) = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.711)$$

Итак, можно сделать вывод, что вырожденное управление  $u(t) = 0$  может быть экстремально, если

$$x_1(t) = x_2(t) = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.712)$$

Это означает, что экстремальное управление не будет вырожденным для любой точки фазовой плоскости за исключением, возможно, начала координат.

Последние два примера конкретно иллюстрируют общие понятия, введенные в этом параграфе. Пример 6.9 является типичным, так как во многих вырожденных задачах можно найти экстремальное вырожденное управление как функцию от состояния. Если подставить это управление в систему дифференциальных уравнений, то получим систему однородных уравнений [таких, как (6.695)], решение которых определяет вырожденные траектории.

До сих пор мы рассматривали задачу с незадаанным временем перехода. Если рассмотреть задачу с фиксированным конечным временем, то известно, что гамильтониан вдоль оптимальной траектории есть некоторая (неизвестная) постоянная  $c$  [см. уравнение (6.638)].

Нетрудно видеть, что для определения, может ли задача иметь вырожденное экстремальное управление при фиксированном времени, следует воспроизвести основные положения, изложенные выше. Будем по-прежнему считать, что имеет место условие (6.643), т. е.

$$\sum_{i=0}^n b_i p_i = 0 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.713)$$

Теперь соотношение (6.644) заменяется уравнением

$$H = \sum_{i=0}^n f_i p_i + u \sum_{i=0}^n b_i p_i = c \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.714)$$

Поэтому уравнение (6.645) заменяется на

$$\sum_{i=0}^n f_i p_i = c \text{ для любого } t \in (t_1, t_2]. \quad (6.715)$$

Однако должны выполняться уравнения (6.646) и (6.647), т. е. можно следовать рассмотренным выше путем, но заменяя 0 на  $c$  в уравнении (6.656) и т. д.

Итак, знание конечного времени  $T$  вводит в уравнения (неизвестную) постоянную  $c$ , но если  $T$  не задано, то  $c = 0$ . В каждом случае имеется баланс между неизвестными величинами и известными соотношениями.

**Упражнение 6.47.** Рассмотрите полностью управляемую систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + u(t), \end{aligned} \right\} \quad (6.716)$$

$$|u(t)| \leq m$$

и функционал

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt, \text{ где } T \text{ не задано.} \quad (6.717)$$

Покажите, что управление

$$u(t) = -(a_{12} + a_{21})x_1(t) - (a_{11} + a_{22})x_2(t) \quad (6.718)$$

может быть экстремальным вырожденным управлением. Постройте на плоскости возможные вырожденные экстремальные траектории и покажите, что они не зависят от значений  $a_{21}$  и  $a_{22}$ . Можете ли вы объяснить причины этого? У к а з а н и е: см. работу [104], пример 2.

**Упражнение 6.48.** Рассмотрите систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) - x_2^3(t) + u(t), \quad |u(t)| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.719)$$

и функционал

$$J(u) = \int_0^T 1 \cdot dt, \text{ где } T \text{ не задано.} \quad (6.720)$$

Пусть  $(\xi_1, \xi_2)$  — начальное состояние и  $(\theta_1, \theta_2)$  — конечное состояние. Покажите, что экстремальных вырожденных управлений нет.

**Упражнение 6.49.** Рассмотрите систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) &= u(t), \quad |u(t)| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.721)$$

и функционал

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)] dt. \quad (6.722)$$

Пусть начальное состояние есть  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  и конечное состояние  $(0, 0, 0)$ . Рассмотрите существование экстремальных управлений для случаев, когда  $T$  задано и когда оно не задано. Можете ли вы найти область из  $R_3$ , для которой экстремальное управление должно быть вырожденным?

## 6.22. ГАМИЛЬТониАН — ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО АБСОЛЮТНОГО ЗНАЧЕНИЯ

В § 6.13 мы обсуждали вырожденную задачу на оптимум по расходу топлива (см. определение 6.12). Вспомним, что вырожденная задача на оптимум по расходу топлива возникает в случае, когда аргумент функции  $\text{dez} \{ \}$  тождественно равен  $+1$  или  $-1$  на конечном интервале времени. В этом параграфе мы бегло рассмотрим подобный тип задач. Такие задачи возникают, когда функция Гамильтона линейна относительно управления  $u(t)$  и его абсолютного значения  $|u(t)|$ .

Прежде всего сформулируем задачу 6.4б, решение которой может оказаться вырожденным. Далее мы нестрого рассмотрим вырожденный случай для задачи 6.4б и укажем вычисления, которые можно использовать для определения, являются ли экстремальные управления вырожденными.

**Задача 6.4б.** Дана инвариантная во времени система

$$x_i(t) = f_i[\mathbf{x}(t)] + b_i[\mathbf{x}(t)]u(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.723)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  —  $n$ -мерный вектор состояния и  $u(t)$  — скалярная управляющая переменная.

Предположим, что управление  $u(t)$  ограничено по величине соотношением

$$|u(t)| \leq 1 \text{ для любого } t. \quad (6.724)$$

Даны также начальное состояние  $\mathbf{x}(0) = \xi$ , конечное состояние  $\theta$  и функционал

$$J(u) = \int_0^T \{f_0[\mathbf{x}(t)] + b_0[\mathbf{x}(t)]|u(t)|\} dt, \quad (6.725)$$

где  $f_0[\mathbf{x}(t)]$  и  $b_0[\mathbf{x}(t)]$  — скалярные функции состояния. Конечное время  $T$  может быть задано или нет.

Найти допустимое управление, которое переводит систему, описываемую уравнениями (6.723) из  $\xi$  в  $\theta$  ( $\mathbf{x}(T) = \theta$ ), и минимизирует функционал  $J(u)$ .

Гамильтониан для системы (6.723) и функционала (6.725) имеет вид

$$H = p_0 f_0[\mathbf{x}(t)] + p_0 b_0[\mathbf{x}(t)]|u(t)| + u(t) \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i[\mathbf{x}(t)] + \\ + u(t) \sum_{i=1}^n p_i(t) b_i[\mathbf{x}(t)], \quad (6.726)$$

где

$$p_0 = \text{const} \geq 0. \quad (6.727)$$

Гамильтониан линеен относительно  $|u(t)|$ , если

$$p_0 \neq 0 \quad (6.728)$$

и

$$b_0[\mathbf{x}(t)] \neq 0, \quad (6.729)$$

поэтому будем считать, что выполняются соотношения (6.728) и (6.729) и примем

$$p_0 = 1. \quad (6.730)$$

Теперь гамильтониан можно записать в виде

$$H = \left\{ f_0[\mathbf{x}(t)] + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i[\mathbf{x}(t)] \right\} + b_0[\mathbf{x}(t)] \left\{ |u(t)| + u(t) \frac{\sum_{i=1}^n p_i(t) b_i[\mathbf{x}(t)]}{b_0[\mathbf{x}(t)]} \right\}. \quad (6.731)$$

Экстремальное управление должно минимизировать гамильтониан  $H$ . Поэтому найдем  $H$ -минимальное управление, которое определяется соотношением

$$u(t) = -\operatorname{dez} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n p_i(t) b_i[\mathbf{x}(t)]}{b_0[\mathbf{x}(t)]} \right\}, \quad (6.732)$$

где функция  $\operatorname{dez} \{ \}$  соответствует определению (6.347). Экстремальное управление для задачи 6.4б будет вырожденным, если аргумент функции  $\operatorname{dez} \{ \}$  равен  $+1$  или  $-1$  на конечном интервале времени, скажем  $(t_1, t_2]$  из  $[0, T]$ . Следовательно, если

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i(t) b_i[\mathbf{x}(t)]}{b_0[\mathbf{x}(t)]} = \pm 1 \text{ для любого } t \in (t_1, t_2], \quad (6.733)$$

то экстремальное управление может быть вырожденным. Уравнение (6.733) вместе с остальными необходимыми условиями можно использовать для проверки существования вырожденных экстремальных управлений в задаче 6.4б.

Необходимые условия существования вырожденного экстремального управления для задачи 6.4б можно получить с помощью следующих действий:

1. Определить необходимые условия для задачи 6.4б и записать их в виде канонических уравнений.

2. Принять, что для любого  $t \in (t_1, t_2]$

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) b_i[\mathbf{x}(t)] - b_0[\mathbf{x}(t)] = 0 \quad (6.734)$$

и

$$f_0[\mathbf{x}(t)] + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i[\mathbf{x}(t)] = \begin{cases} 0 & T \text{ не задано;} \\ \text{const, } & T \text{ задано.} \end{cases} \quad (6.735)$$

3. Принять, что для любого  $t \in (t_1, t_2]$  и  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$\frac{d^k}{dt^k} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i(t) b_i[\mathbf{x}(t)] - b_0[\mathbf{x}(t)] \right\} = 0 \quad (6.736)$$

и

$$\frac{d^k}{dt^k} \left\{ f_0[\mathbf{x}(t)] + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i[\mathbf{x}(t)] \right\} = 0. \quad (6.737)$$

4. При помощи последовательного дифференцирования найти систему уравнений, которые являются необходимыми для существования вырожденных экстремальных управлений.

5. Заменяя уравнение (6.734) на

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) b_i[\mathbf{x}(t)] + b_0[\mathbf{x}(t)] = 0, \quad (6.738)$$

проделать то же самое еще раз.

Пример, иллюстрирующий существование вырожденных оптимальных управлений для задачи на оптимум по топливу, приводится в § 8.10.

**Упражнение 6.50.** Рассмотрите систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \quad |u(t)| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.739)$$

и функционал ( $T$  не задано,  $k \geq 0$ )

$$\int_0^T \left[ k + a_1 \frac{1}{2} x_1^2(t) + a_2 \frac{1}{2} x_2^2(t) + |u(t)| \right] dt \quad (6.740)$$

Пусть  $(\xi_1, \xi_2)$  — начальное состояние и  $(0, 0)$  — конечное состояние. Исследуйте возможность существования вырожденных экстремальных управлений для следующих случаев:

а)  $k > 0$ :  $a_1 = a_2 = 0$ ; (6.741)      д)  $k = 0$ :  $a_1 = 1, a_2 = 0$ ; (6.745)

б)  $k > 0$ :  $a_1 = 1, a_2 = 0$ ; (6.742)      е)  $k = 0$ :  $a_1 = 0, a_2 = 1$ ; (6.746)

в)  $k > 0$ :  $a_1 = 0, a_2 = 1$ ; (6.743)      ж)  $k = 0$ :  $a_1 = a_2 = 1$ . (6.747)

г)  $k > 0$ :  $a_1 = a_2 = 1$ ; (6.744)

**Упражнение 6.51.** Повторите упражнение 6.50 для каждой из следующих систем ( $|u(t)| \leq 1$ ):

а)  $\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t); \end{aligned} \right\} \quad (6.748)$       г)  $\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + u(t); \end{aligned} \right\} \quad (6.751)$

б)  $\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + u(t); \end{aligned} \right\} \quad (6.749)$       д)  $\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t). \end{aligned} \right\} \quad (6.752)$

в)  $\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t); \end{aligned} \right\} \quad (6.750)$

**Упражнение 6.52.** Рассмотрите систему уравнений (6.739) с функционалом

$$J(u) = \int_0^T [1 + e^{-|x_1(t)|} |u(t)|] dt, \quad (6.753)$$

где  $T$  не задано.

Исследуйте возможность существования вырожденных экстремальных управлений для конечного состояния  $(0, 0)$ .

\* \* \*

### 6.23. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

В предыдущих параграфах данной главы мы рассмотрели различные оптимальные задачи и указали, что вопрос о существовании оптимального управления<sup>1</sup> для данной конкретной задачи является весьма сложным и на него нужно получить ответ, прежде чем использовать принцип мини-

<sup>1</sup> Проблемы существования для различных задач оптимизации рассмотрены в работах [118], [43], [62], [33], [79], [178], [120], [132], [93], [169], [145] и [190].

му. Мы хотим предостеречь читателя, что утверждение типа: «Я имею дело с физической задачей, и поэтому оптимальное решение должно существовать» нельзя использовать для доказательства существования оптимального управления. Напротив, первым и основным необходимым условием того, что математическое описание является достоверным представлением физической ситуации, как раз и является наличие решения математической задачи.

Другими словами, для данной задачи об оптимизации необходимо проверить, существует ли решение, чтобы быть уверенным в справедливости математической модели. Довольно часто перевод физического процесса и совокупности конкретных условий в их математическую форму оказывается недостаточно точным, и поэтому физическое обоснование может оказаться весьма зыбким по отношению к математической постановке вопроса о существовании решения.

Когда инженер формулирует задачу об оптимизации, он обычно пытается найти экстремальные управления, т. е. управления, которые удовлетворяют всем необходимым условиям. Очевидно<sup>1</sup>, что существование оптимального управления предполагает наличие по крайней мере одного экстремального управления. Однако существование экстремальных управлений не предполагает необходимости существования оптимального управления.

Довольно часто отсутствие оптимального управления можно подозревать на том основании, что нельзя найти управлений, удовлетворяющих всем необходимым условиям. В таких случаях можно найти управления, которые удовлетворяют всем, за исключением одного, необходимым условиям. Этот факт часто связан с отсутствием оптимального управления.

Далее перейдем к вопросу единственности оптимального управления. Нетрудно видеть, что существование оптимального управления и единственность экстремальных управлений предполагают единственность оптимального управления. Однако из единственности оптимального управления не следует единственность экстремальных управлений.

Напомним, что управление, оптимальное по быстрдействию, в случае нормальной линейной системы было единственным для любого конечного состояния  $\theta$  (см. теорему 6.7 и упражнение 6.7). Однако экстремальные управления были единственными только для конечного состояния  $\theta = 0$  (см. теорему 6.9 и упражнение 6.8). Итак, неединственность оптимального управления предполагает неединственность экстремальных управлений. Обратное утверждение может оказаться неверным.

Пусть в задаче об оптимизации мы нашли, что оптимум существует не только для всех заданных конечных времен  $T$ , но также и для предельного случая  $T \rightarrow \infty$ . Нетрудно видеть, что существование оптимального для любых  $T$  (включая  $T \rightarrow \infty$ ) управления предполагает существование оптимального управления и в том случае, когда  $T$  не задано. Обратное утверждение может оказаться неверным.

Предположим, что оптимальное управление существует для всех фиксированных конечных состояний  $\theta$  в  $R_n$ . Пусть  $S$  — замкнутая область в  $R_n$ . Тогда из существования оптимального управления для всех  $\theta \in R_n$  следует наличие оптимального управления к компактной области  $S$ , являющейся подмножеством из  $R_n$ . Обратное утверждение опять-таки может не быть справедливым.

Последнее замечание полезно в случае, когда область  $S$  не является гладкой, и поэтому возникают затруднения при использовании условий трансверсальности. В таких задачах наиболее надежный путь состоит

<sup>1</sup> См. также замечания 6.7—6.10.

в том, чтобы решить задачу с закрепленным концом (с заданным конечным состоянием) и затем потребовать, чтобы фиксированная конечная точка принадлежала области  $S$ . Это положение мы обсудим более подробно в следующем параграфе.

#### 6.24. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЗАДАЧАМИ С ФИКСИРОВАННЫМИ И НЕФИКСИРОВАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В этом параграфе мы рассмотрим следующие вопросы.

1. Решение задач с нефиксированным временем путем решения сначала задачи с фиксированным, но произвольным конечным временем.

2. Решение оптимальных задач с областью  $S$  (из  $R_n$ ) путем решения сначала задачи с фиксированным, но произвольным конечным состоянием.

Прежде всего рассмотрим задачу оптимизации с фиксированным конечным временем. Для простоты рассмотрим инвариантную во времени систему, описываемую уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]; \mathbf{x}(0) = \xi. \quad (6.754)$$

Пусть  $\theta$  — заданное конечное состояние в  $R_n$  и

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^T L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] dt \quad (6.755)$$

— функционал. Предположим, что мы зафиксировали конечное время  $T$  и нашли оптимальное управление  $\mathbf{u}_{(0, T)}^*$ , переводящее систему (6.754) из начального состояния  $\xi$  в  $\theta$  ( $\mathbf{x}^*(T) = \theta$ ) и минимизирующее функционал (6.755). Тогда минимальное значение  $J(\mathbf{u})$ , обозначенное через  $J^*$ , зависит от следующих величин<sup>1</sup>:

- начального состояния  $\xi$ ;
- конечного состояния  $\theta$ ;
- конечного времени  $T$ .

Поэтому обозначим минимальное значение функционала через

$$J^* = J^*(\xi, \theta, T).$$

Будем считать, что при  $t = 0$  мы всегда, двигаясь из начального состояния  $\xi$ , хотим попасть в то же самое конечное состояние  $\theta$ , варьируя конечное время  $T$  для того, чтобы можно было изучить вариации минимальной стоимости с изменением  $T$ .

При этом будем считать:

1. Если  $T \in [T_1, T_2]$  (6.756)  
(т. е., если  $0 \leq T_1 \leq T \leq T_2 \leq \infty$ ), то можно найти оптимальное управление  $\mathbf{u}_{(0, T)}^*$ .

2. Если

$$T \notin [T_1, T_2], \quad (6.757)$$

то оптимальное управление не существует.

В этом случае можно начертить график  $J(\xi, \theta, T)$  в зависимости от  $T$  для  $T \in [T_1, T_2]$ , оставляя неизменными  $\xi$  и  $\theta$ . Предположим, что этот график похож на график рис. 6.24, а. Из него находим, что функция  $J^*(\xi, \theta, T)$  имеет:

- 1) абсолютный минимум при  $T_5$  и относительный минимум при  $T_7$ ;
- 2) абсолютный максимум при  $T_3$  и относительный максимум при  $T_6$ ;
- 3) точку перегиба при  $T_4$ .

<sup>1</sup> В общем случае оно зависит и от начального времени, которое мы выбираем равным нулю.

Гамильтониан для данной задачи имеет вид

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)] = L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] + \langle \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)], \mathbf{p}(t) \rangle. \quad (6.758)$$

По предположению, для каждого  $T \in [T_1, T_2]$  существует оптимальное управление  $\mathbf{u}_{[0, T]}^*$ , а, следовательно, оптимальная траектория  $\mathbf{x}_{[0, T]}^*$  и соответствующая им переменная  $\mathbf{p}_{[0, T]}^*$ . Для каждого  $T \in [T_1, T_2]$  имеем

$$\mathbf{x}^*(T) = \theta, \quad (6.759)$$

и поэтому можно рассмотреть функцию

$$H[\theta, \mathbf{p}^*(T), \mathbf{u}^*(T)]. \quad (6.760)$$

В общем случае для двух различных времен

$$\hat{T} \neq \tilde{T} \quad \text{из} \quad [T_1, T_2] \quad (6.761)$$

получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^*(\hat{T}) &= \mathbf{x}^*(\tilde{T}) = \theta; \\ \mathbf{p}^*(\hat{T}) &\neq \mathbf{p}^*(\tilde{T}); \\ \mathbf{u}^*(\hat{T}) &\neq \mathbf{u}^*(\tilde{T}); \\ H(\theta, \mathbf{p}^*(\hat{T}), \mathbf{u}^*(\hat{T})) &\neq H[\theta, \mathbf{p}^*(\tilde{T}), \mathbf{u}^*(\tilde{T})]. \end{aligned} \right\} \quad (6.762)$$

Можно видеть, что величина гамильтониана будет неявно зависеть от конечного времени  $T$ . Если изобразить  $H[\theta, \mathbf{p}^*(T), \mathbf{u}^*(T)]$  в зависимости от  $T$  для  $T \in [T_1, T_2]$ , то получится график, похожий на рис. 6.24, б. Таким образом, гамильтониан будет равен нулю в точках экстремума функции  $J^*(\xi, \theta, T)$ . На рис. 6.24, а имеем

$$H[\theta, \mathbf{p}^*(T_k), \mathbf{u}^*(T_k)] = 0 \quad \text{для} \quad k = 3, 4, 5, 6, 7. \quad (6.763)$$

Уравнение (6.763) является одним из необходимых условий для задачи с заданным временем. Можно видеть, что это условие выделяет экстремальные точки функции  $J^*(\xi, \theta, T)$ , и поэтому требуются дополнительные вычисления для выделения абсолютного минимума  $J^*(\xi, \theta, T)$  (на рис. 6.24, а  $T_5$ ). Советуем читателю вернуться к доказательству принципа минимума (§ 5.16) и к замечаниям 6 и 10 § 5.17. Полезно также просмотреть материал § 6.19.

Целью этого обсуждения было указать, что часто можно решить задачу с заданным временем, решая сначала задачу с фиксированным временем и рассматривая затем минимум функционала в зависимости от конечного времени. Таким образом, приходим к стандартной задаче минимизации, и поэтому можно использовать материал § 5.2.

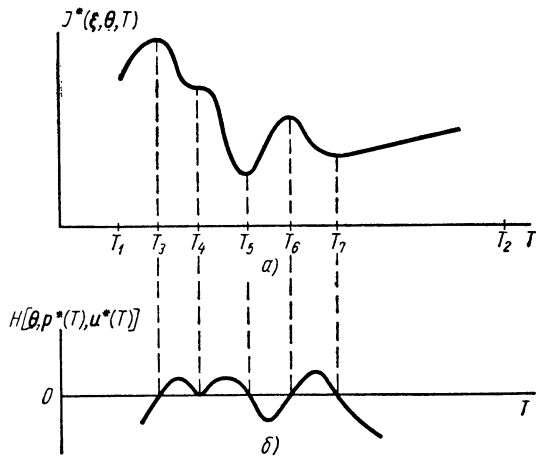


Рис. 6.24. Типичное поведение  $J^*(\xi, \theta, T)$  и  $H[\theta, \mathbf{p}^*(T), \mathbf{u}^*(T)]$  в зависимости от конечного времени  $T$

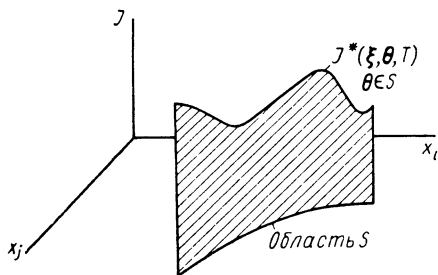


В оставшейся части настоящего параграфа покажем, как можно зачастую решить задачу оптимизации для случая замкнутой области  $S$ , решая сначала задачу для конечного состояния  $\theta$  и требуя затем, чтобы  $\theta$  было элементом  $S$ .

Рассмотрим систему (6.754) и функционал (6.755) с фиксированным  $T$ . Пусть  $S$  — компактная область  $S$  в  $R_n$ . Предположим, что оптимальное управление существует для всех  $\theta \in Q$ , где  $Q$  — подмножество из  $R_n$ , содержащее  $S$ :

$$S \subset Q \subset R_n. \quad (6.764)$$

Функционал  $J^*(\xi, \theta, T)$  опять-таки зависит от начального состояния  $\xi$ , конечного состояния  $\theta$  и конечного времени  $T$ . Если зафиксировать начальное состояние  $\xi$  и конечное время  $T$ , то можно нарисовать график зависимости  $J^*(\xi, \theta, T)$  для всех  $\theta$  из  $Q$ . Если потребовать теперь, чтобы конечное состояние принадлежало к области  $S$ , то можно найти, как показано на рис. 6.25, значение минимума функционала для каждого  $\theta$  из  $S$ . Если найти функционал



$$J^*(\xi, S, T) = \min_{\theta \in S} J^*(\xi, \theta, T), \quad (6.765)$$

Рис. 6.25. Стоимость  $J^*(\xi, \theta, T)$  для  $\theta \in S$  фиксированных  $\xi$  и  $T$

то он, естественно, будет решением и задачи управления для области  $S$ . Можно видеть, что определение  $J^*(\xi, S, T)$  сводится к минимизации

скалярной величины  $J^*(\xi, \theta, T)$  при алгебраическом ограничении  $\theta \in S$ ; следовательно, можно использовать материал § 5.3—5.5.

Покажем, что необходимое условие перпендикулярности  $p^*(T)$  к области  $S$  эквивалентно отысканию экстремальных точек  $J^*(\xi, \theta, T)$  для  $\theta \in S$ . Для определенности предположим, что  $S$  есть гладкая гиперповерхность в  $R_n$ , описываемая уравнением

$$S = \{x : g(x) = 0\}. \quad (6.766)$$

Если  $\theta \in S$ , то должно быть

$$g(\theta) = 0. \quad (6.767)$$

Обозначим для простоты величину  $J^*(\xi, \theta, T)$  через  $\hat{J}^*(\theta)$ . Чтобы найти экстремальные точки  $\hat{J}^*(\theta)$  при ограничении  $g(\theta) = 0$ , можно использовать приемы, описанные в § 5.4. Итак, обозначим через  $\lambda$  множитель Лагранжа и рассмотрим функцию

$$\hat{J}^*(\theta) + \lambda g(\theta). \quad (6.768)$$

Предположим, что точки

$$\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_m^* \quad (6.769)$$

экстремальны (т. е. являются точками минимума, максимума, седловыми и т. д.). Тогда (см. теорему 5.1) существует число  $\lambda_i^*$ , соответствующее каждому  $\theta_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , такое, что  $\theta_i^*$  и  $\lambda_i^*$  являются решениями системы  $n + 1$  уравнений (в случае «гладкой» задачи):

$$\frac{\partial \hat{J}^*(\theta)}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} = 0; \quad g(\theta) = 0. \quad (6.770)$$

Другими словами, для каждого  $i = 1, 2, \dots, m$  имеем

$$\frac{\partial J^*(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_i^*} + \lambda_i^* \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_i^*} = 0; \quad g(\theta) \Big|_{\theta=\theta_i^*} = 0. \quad (6.771)$$

Обратимся теперь к условию трансверсальности, которое устанавливает, что вектор  $\mathbf{p}^*(T)$  должен быть нормален к  $S$  в точке  $\theta^*$ . Так как область  $S$  описывается уравнением

$$g(\mathbf{x}) = 0, \quad (6.772)$$

градиент (вектор) при  $\mathbf{x} = \theta$  равен

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\theta}. \quad (6.773)$$

Пусть  $c$  — ненулевая константа; тогда при  $\theta = \theta^*$  должно быть

$$\mathbf{p}^*(T) = c \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\theta^*}. \quad (6.774)$$

Так как мы предположили, что рассматриваем «гладкую» задачу, то

$$\mathbf{p}^*(t) = \frac{\partial J^*(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^*(t)}. \quad (6.775)$$

Таким образом, для  $\mathbf{x}^*(t)$ , близкого к  $\theta^*$ , и  $t$ , близкого к  $T$ , имеем

$$\mathbf{p}^*(T) = \frac{\partial \hat{J}^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\theta^*}. \quad (6.776)$$

Из выражений (6.776) и (6.774) находим

$$\frac{\partial \hat{J}^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\theta^*} - c \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\theta^*} = 0. \quad (6.777)$$

Так как  $\theta^*$  принадлежит к  $S$ , из соотношения (6.772) получим

$$g(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\theta^*} = 0. \quad (6.778)$$

Сравним теперь систему  $n + 1$  уравнений, определяемых соотношениями (6.777) и (6.778), с системой  $n + 1$  уравнений, определяемых соотношением (6.771). Мы видим, что они одинаковы. Следовательно, поскольку точки  $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_m^*$  удовлетворяют соотношениям (6.771), они удовлетворяют также и уравнениям (6.777), (6.778), если

$$\left. \begin{aligned} \theta^* = \theta_i^* \\ -c = \lambda_i^* \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.779)$$

Итак, мы доказали, что необходимое условие нормальности  $\mathbf{p}^*(T)$  к  $S$  выделяет экстремальные точки  $\hat{J}^*(\theta)$ ,  $\theta \in S$ . Чтобы найти точку, соответствующую абсолютному минимуму, необходимо выполнить дополнительные вычисления. Советуем читателю перечитать раздел 9 § 5.16 и замечания 7, 8 и 10 § 5.17, чтобы лучше усвоить смысл условий трансверсальности.

Если множество  $S$  не является «гладким» (например, множество цели может состоять из изолированных точек)<sup>1</sup>, то мы почти вынуждены решать задачу с закрепленным концом (с фиксированным конечным состоянием). В таких задачах мы можем оказаться не в состоянии определить плоскость, касательную к области цели, и поэтому нормаль к множеству цели может быть неопределенной (см. замечание 8 § 5.17).

<sup>1</sup> Простые задачи на оптимум по быстродействию и по расходу топлива для такой области цели решены в работе [8].

## 6.25. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как было указано во вступлении к настоящей главе, нашей целью было перейти от «теоретического» материала гл. 5 к «прикладному» материалу гл. 7—10.

Первый шаг решения оптимальной задачи состоит всегда в отыскании экстремальных управлений, т. е. управлений, удовлетворяющих необходимым условиям. Была отмечена важность таких теоретических результатов, как существование и единственность экстремальных управлений, существование вырожденных управлений и т. д. Мы решили также ряд конкретных задач.

Целью последних четырех глав является не только проиллюстрировать теорию при помощи конкретных задач, но и, кроме того, дать набор примеров, показывающих структуру оптимальных систем с обратной связью, типы нелинейностей, которые надо реализовать, показать аналитические трудности, возникающие для систем высоких порядков, и относительную сложность оптимальных устройств. Часто мы будем рассматривать, исходя из оптимальных систем, системы, близкие к оптимальным. Нам кажется, что инженер сможет оценить достоинства и недостатки оптимальных систем только в том случае, если он хорошо знаком как с теорией, так и с ее техническими приложениями (измерительными средствами и вычислительными машинами). До сих пор мы имели дело лишь с общей теорией, далее будем рассматривать достаточно подробно конкретные системы.

---

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

### 7.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе на примерах простых систем детально изучим задачу об управлении, оптимальном по быстродействию.

В § 6.1—6.10 мы рассматривали лишь общую постановку и решение такой задачи. Здесь же рассмотрим проектирование и расчет конкретных систем управления с обратной связью, оптимальных по быстродействию.

Изучение конкретных оптимальных по быстродействию систем оказало огромное влияние на все развитие современной теории управления. В 1950 г. были опубликованы две статьи Гопкина [96] и Макдональда [157], относительно эффективного использования реле и нелинейной обратной связи для улучшения работы сервомеханизмов второго порядка. Для обоснования того, что управление действительно являлось оптимальным по быстродействию были использованы геометрические доказательства. Позднее Бушау [38] распространил эти результаты на другие системы второго порядка. Появилось много статей (например, [27], [28], [39], [41], [52], [105], [133], [134], [165], [173], [181], [187], [195] и [200]), в которых рассматривались оптимальные по быстродействию системы управления второго и более высоких порядков. Изучение систем второго и третьего порядка привело к развитию более хорошо обоснованной математической теории задач на оптимум по быстродействию (см. [19] и [140]). Между тем устройства, оптимальные по быстродействию, появились и в учебниках (см., например, [203], гл. 11, [198] гл. [15—17], [42] гл. 9 и [81] гл. 10). Применение принципа минимума еще более повысило интерес к задачам об оптимальном быстродействии.

Основными задачами данной главы будут:

1. Проиллюстрировать использование необходимых условий для полного расчета оптимальных по быстродействию систем с обратной связью.
2. Рассмотреть такие геометрические понятия, как «линии» и «поверхности переключения».
3. Исследовать типы нелинейных преобразований, требующихся для получения оптимальных по быстродействию систем с обратной связью.
4. Обсудить относительную сложность конструкции регуляторов, оптимальных по быстродействию.
5. Проиллюстрировать на конкретных примерах и упражнениях различные теоретические положения, рассмотренные в общем виде в предыдущих главах.

Доказывать единственность экстремальных управлений мы часто будем геометрически, не прибегая к теореме 6.9. Эти доказательства можно использовать для обоснования единственности в тех частных случаях, для которых невозможно установить общих теорем (например, для

нелинейных систем). Однако будем опираться на теорему 6.10, которая гарантирует существование оптимальных по быстродействию управлений, приводящих систему к началу координат.

Во многих упражнениях читателю предлагается самому получить решения задач с различными конечными множествами  $S$ , так что он сможет познакомиться с некоторыми свойствами необычных систем управления. Следует отметить, что задачи, рассматриваемые в этих упражнениях, не имеют большого смысла с инженерной точки зрения; тем не менее, они иллюстрируют различные важные случаи, которые могут возникнуть в других, реальных и поэтому более сложных задачах.

В большинстве задач, которые мы рассмотрим, имеется одна входная переменная  $u(t)$ . Так как задачи, рассматриваемые в этой главе являются нормальными, то управления, оптимальные по быстродействию будут кусочно-постоянными. Поэтому введем удобные сокращенные обозначения для изображения постоянных величин кусочно-постоянного управления. Эти обозначения определены ниже и будут использоваться на протяжении настоящей и следующей глав книги.

**Определение 7.1. Управляющая последовательность.** Мы будем использовать обозначение

$$\{u_1, u_2, u_3, \dots\}$$

где  $u_i$  — постоянные, полагая

$$u(t) = u_1 \text{ для } t_0 < t \leq t_1,$$

$$u(t) = u_2 \text{ для } t_1 < t \leq t_2;$$

$$u(t) = u_3 \text{ для } t_2 < t \leq t_3.$$

.....

Множество  $\{u_1, u_2, u_3, \dots\}$  будем называть управляющей последовательностью. Например, утверждение: «используется управляющая последовательность  $\{+1, -1\}$ » означает, что сначала прикладывается управление  $u(t) = +1$ , а затем — управление  $u(t) = -1$ .

Так как системы, которые мы будем рассматривать, инвариантны во времени, можно будет найти оптимальное управление как функцию состояния и, таким образом, решить задачу об обратной связи (см. § 6.6).

Управления, оптимальные по быстродействию, будут кусочно-постоянными функциями времени и в то же время они являются функцией от состояния системы. Найдем множества, или области фазового пространства, в пределах которых управление постоянно. Эти области окажутся разделенными кривыми — в двумерном пространстве, поверхностями — в трехмерном пространстве и гиперповерхностями — в  $n$ -мерном пространстве. Разделяющие множества называются кривыми переключения, поверхностями переключения, гиперповерхностями переключения и т. д. Эти положения будут поясняться по мере чтения главы. Пока лишь отметим, что форму кривых и поверхностей переключения определяют нелинейные операции, которые должны осуществляться для получения оптимального управления.

В каждом параграфе этой главы мы, в общих чертах, будем действовать по следующей схеме:

1. Точно формулировать задачу.
2. Записывать гамильтониан.
3. Определять  $H$ -минимальное управление (см. § 5.3).
4. Получать уравнения относительно дополнительных переменных.
5. Определять управляющие последовательности, которые могут оказаться оптимальными.
6. Находить управляющие последовательности, удовлетворяющие граничным условиям.

7. Определять кривые переключения и т. д., разделяющие фазовое пространство на различные области.

8. Доказывать справедливость оптимального закона управления.

Конкретные задачи, которые мы будем рассматривать в данной главе, можно классифицировать следующим образом. В § 7.2—7.6 рассматривается управление системами с действительными полюсами (или собственными значениями); в § 7.7—7.9 разбирается управление системами с комплексными полюсами (собственными значениями); наконец, в § 7.12—7.16 рассматривается управление системами, передаточные функции которых содержат также нули. Естественно, имеется множество других задач об оптимальном быстродействии, решения которых описаны в литературе по теории управления<sup>1</sup>. Материал, включенный в настоящую главу, дает достаточно основных сведений для того, чтобы позволить заинтересованному читателю взяться за решение подобных задач.

Наконец, необходимо предостеречь читателя, что критерий максимума быстродействия во многих случаях не является наилучшим критерием. Например, если вы хотите вести свою машину от светофора до светофора с минимальной затратой времени, то должны как можно быстрее разогнаться и резко тормозить. Такое «оптимальное по быстродействию» управление имеет ряд недостатков, а именно:

1. Необходимо точно знать динамику машины.

2. Необходимо точно знать условия ускорения и торможения для того, чтобы заранее рассчитать момент включения тормоза (иначе машина проскочит на красный свет).

3. Происходит повышенный износ резины.

4. Потребление бензина будет высоким.

5. Вам могут вручить квитанцию о штрафе или отобрать права.

Можно видеть, что критерий минимума времени не всегда является наилучшим, и поэтому проектировщик должен тщательно обдумать выбор критерия, наиболее подходящего для данного конкретного случая.

### **ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМЫ**

#### **7.2. УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ, КОТОРЫЙ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ ДВА ИНТЕГРАТОРА**

В этом параграфе мы решим задачу об оптимальном управлении для объекта с двойным интегрированием. Рассмотрим ее достаточно подробно, так как полученные выводы будут в дальнейшем неоднократно использоваться. Задачу решим для следующих конечных состояний:

1) начала координат фазовой плоскости;

2) всей оси координат;

3) отрезка прямой.

Объект с двойным интегрированием часто представляет собой движение инерционной нагрузки в устройствах без трения (см. также пример 6.9). Например, если через  $m$  обозначить массу (или момент инерции) тела, через  $y(t)$  — его положение (или угол поворота), а через  $v(t)$  — прикладываемую силу (или момент), то при отсутствии трения и гравитационных сил его движение будет описываться уравнением второго порядка вида

$$m\ddot{y}(t) = v(t). \quad (7.1)$$

Передаточная функция системы имеет вид

$$G(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{ms^2}. \quad (7.2)$$

<sup>1</sup> См., например, [63], [64], [173], [174], [122], [129], [197], [1], [48], [65], [29], [66] и [179] (гл. 1 и 3).

Определим управление  $u(t)$ , положив  $u(t) = \frac{v(t)}{m}$ , тогда уравнение (7.1) запишется:

$$\ddot{y}(t) = u(t). \quad (7.3)$$

Определим переменные состояния (фазовые координаты) как

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \text{ — выход;} \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \text{ — скорость на выходе} \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

и получим систему в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Будем считать, что управление ограничено по величине соотношением

$$|u(t)| \leq 1 \text{ для всех } t. \quad (7.6)$$

Это ограничение, как мы уже отмечали в гл. 6, следует из физических ограничений на величину тяги и момента, которые могут давать реальные устройства. Рассмотрим первую задачу.

**Задача 7.1.** Дана система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t); |u(t)| \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Необходимо определить допустимое управление, переводящее систему (7.7) из любого начального состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  в начало координат  $(0, 0)$  на наименьшее возможное время.

Прежде чем приступить к ее решению, заметим:

система (7.7) нормальна, и поэтому вырожденные управления не могут быть оптимальными (см. теорему 6.6);

оптимальное управление существует (теорема 6.10) и является единственным (теорема 6.7);

так как конечным состоянием является начало координат, то экстремальное управление единственно (теорема 6.9).

Метод решения этой задачи будет состоять из следующих шагов:

1. Определения  $H$ -минимального управления, т. е. управления, минимизирующего гамильтониан.

2. Составления уравнений для дополнительных переменных при неизвестных начальных значениях.

3. Определения управляющей последовательности (см. определение 7.1), представляющей возможное оптимальное управление.

4. Построения траекторий движения на фазовой плоскости для  $u = +1$  и  $u = -1$ .

5. Определения кривой переключения.

6. Нахождения закона управления 7.1, являющегося решением поставленной задачи 7.1.

7. Составления блок-схемы реализации полученного закона управления.

Для задачи 7.1 функция гамильтона имеет вид

$$H = 1 + x_2(t)p_1(t) + u(t)p_2(t) \quad (7.8)$$

$H$ -минимальное управление, т. е. управление, минимизирующее гамильтониан, равно

$$u(t) = -\text{sign} \{p_2(t)\} = \Delta = \pm 1. \quad (7.9)$$

Дополнительные переменные удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = 0; \\ \dot{p}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -p_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Пусть  $\pi_1$  и  $\pi_2$  — начальные значения дополнительных переменных, т. е.

$$\pi_1 = p_1(0); \quad \pi_2 = p_2(0). \quad (7.11)$$

Тогда из уравнений (7.10) находим

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \pi_1 = \text{const}; \\ p_2(t) &= \pi_2 - \pi_1 t. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Из соотношений (7.12) видно, что  $p_2(t)$  есть прямая на плоскости  $p_2(t), t$ . На рис. 7.1 показаны четыре возможных вида  $p_2(t)$  и соответствующие им  $H$ -минимальные управления  $u(t) = -\text{sign}\{p_2(t)\}$ . Из рис. 7.1

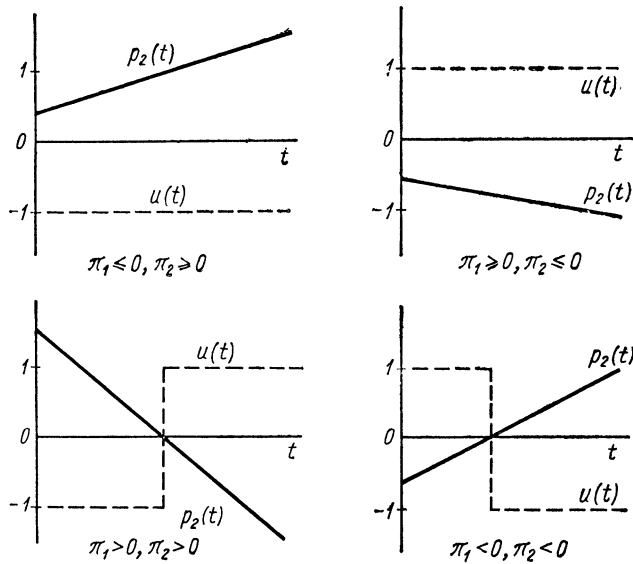


Рис. 7.1. Четыре возможных вида  $p_2(t) = \pi_2 - \pi_1 t$  и соответствующие им управления  $u(t) = -\text{sign}\{\pi_2 - \pi_1 t\}$

также видно, что управление, оптимальное по быстродействию, является кусочно-постоянной функцией времени и может переключаться не более одного раза (сравните с теоремой 6.8), так как задача нормальна. Таким образом, приходим к выводу, что оптимальными могут быть только четыре управляющих последовательности:

$$\{+1\}; \{-1\}; \{+1; -1\}; \{-1; +1\}. \quad (7.13)$$

Выделить эти четыре возможных последовательности мы смогли с помощью двух необходимых условий, а именно, уравнения (7.9) и (7.12).

Так как на конечном интервале времени оптимальное управление постоянно,  $u(t) = \Delta = \pm 1$ , то уравнение (7.7) можно решить, полагая  $u(t) = \Delta = \text{const}$ , для начальных условий

$$x_1(0) = \xi_1; \quad x_2(0) = \xi_2 \quad (7.14)$$



и получить соотношения

$$x_2(t) = \xi_2 + \Delta t; \quad (7.15)$$

$$x_1(t) = \xi_1 + \xi_2 t + \frac{1}{2} \Delta t^2. \quad (7.16)$$

Далее, исключая время  $t$ , находим

$$x_1 = \xi_1 + \frac{1}{2} \Delta x_2^2 - \frac{1}{2} \Delta \xi_2^2, \quad (7.17)$$

где

$$t = \Delta (x_2 - \xi_2). \quad (7.18)$$

Уравнение (7.17) есть уравнение траектории, начинающейся из точки  $(\xi_1, \xi_2)$  на плоскости  $x_1 x_2$  для управления  $u = \Delta$ . Эти траектории,

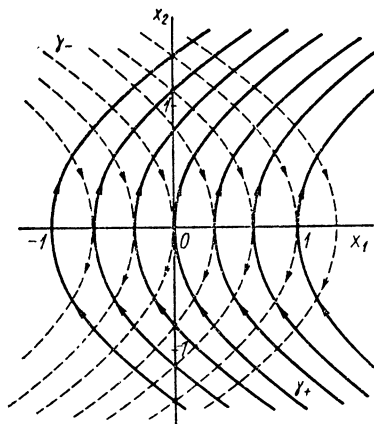


Рис. 7.2. Вынужденные траектории на фазовой плоскости. Сплошные кривые соответствуют  $u = 1$ , прерывистые —  $u = -1$

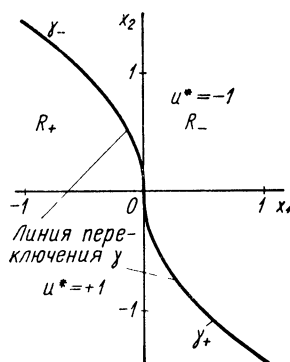


Рис. 7.3. Линия переключения для объекта с двойным интегрированием

являющиеся параболой, показаны на рис. 7.2. Сплошные траектории соответствуют  $u = \Delta = +1$ ; штриховые — управлению  $u = \Delta = -1$ ; стрелки показывают направление движения для положительного времени.

Наша цель состоит в том, чтобы перевести любое начальное состояние в  $(0, 0)$ , т. е. в начало координат фазовой плоскости. Так как управление должно быть кусочно-постоянным, мы можем найти геометрическое место точек, которые могут быть переведены в  $(0, 0)$  при помощи управления  $u = \pm 1$ . Эти две траектории, приводящие в  $(0, 0)$ , обозначены на рис. 7.2. через  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ . Укажем точные определения.

**Определение 7. 2.** Кривая  $\gamma_+$  есть геометрическое место точек  $(x_1, x_2)$ , которые могут быть переведены в  $(0, 0)$  при помощи управления  $u = +1$ :

$$\gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2): x_1 = \frac{1}{2} x_2^2; x_2 \leq 0 \right\}. \quad (7.19)$$

**Определение 7.3.** Кривая  $\gamma_-$  есть геометрическое место точек  $(x_1, x_2)$ , которые могут быть переведены в  $(0, 0)$  при помощи управления  $u = -1$ :

$$\gamma_- = \left\{ (x_1, x_2): x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2; x_2 \geq 0 \right\}. \quad (7.20)$$

**Определение 7.4.** Кривая  $\gamma$ , называемая линией переключения, есть объединение кривых  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ :

$$\gamma = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \right\} = \gamma_+ \cup \gamma_- \quad (7.21)$$

Кривая  $\gamma$  показана на рис. 7.3. Она делит фазовую плоскость на две области (или два множества)  $R_-$  и  $R_+$ .

**Определение 7.5.** Пусть  $R_-$  есть множество состояний  $(x_1, x_2)$ , удовлетворяющих условию

$$R_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \right\}, \quad (7.22)$$

т. е.  $R_-$  состоит из всех точек справа от кривой  $\gamma$ .

Пусть  $R_+$  — множество состояний  $(x_1, x_2)$  удовлетворяющих условию

$$R_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 < -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \right\}, \quad (7.23)$$

т. е.  $R_+$  состоит из всех точек слева от кривой  $\gamma$ .

Докажем, что если начальное состояние  $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$  принадлежит кривой  $\gamma_+$ , то  $u = +1$  есть управление оптимальное по быстродействию (рис. 7.4).

Рассмотрим четыре управляющих последовательности

$\{+1\}$ ,  $\{-1\}$ ,  $\{+1, -1\}$  и  $\{-1, +1\}$ .

По определению управляющая последовательность  $\{+1\}$  дает траекторию  $\Xi O$ , достигающую начала координат, а управляющая последовательность  $\{-1\}$  — траекторию  $\Xi A$ , которая никогда не достигнет начала координат. Управляющая последовательность  $\{+1, -1\}$  дает траектории типа  $\Xi BC$ , не достигающие начала координат, а последовательность  $\{-1, +1\}$  — траектории типа  $\Xi DE$ , также не достигающие  $(0, 0)$ . Следовательно, если начальное состояние находится на кривой  $\gamma_+$ , из всех управляющих последовательностей только последовательность  $\{+1\}$  может перевести состояние  $\Xi$  в  $O$ . Итак, методом исключения мы показали, что управляющая последовательность  $\{+1\}$  оптимальна по быстродействию.

Используя аналогичные рассуждения, можно доказать, что если начальное состояние принадлежит кривой  $\gamma_-$ , то оптимальным по быстродействию является управление  $u = -1$ . Таким образом, мы нашли оптимальный закон управления для начальных состояний, принадлежащих кривой переключения  $\gamma$ .

Рассмотрим теперь начальное состояние  $X$ , принадлежащее области  $R_-$  (см. определение 7.5). Если использовать управляющую последовательность  $\{+1\}$ , то получим траекторию  $XG$ , которая никогда не достигнет начала координат. Если приложить последовательность  $\{+1; -1\}$ , то получится траектория типа  $XHI$ , не достигающая начала координат. Однако, если использовать последовательность  $\{-1, +1\}$ , то можно достичь начала координат вдоль траектории  $XJO$  при условии, что переход от управления  $u = -1$  к  $u = +1$  произойдет в точке  $J$ , т. е. точно в тот момент, когда траектория пересечет линию переключения  $\gamma$ . Это

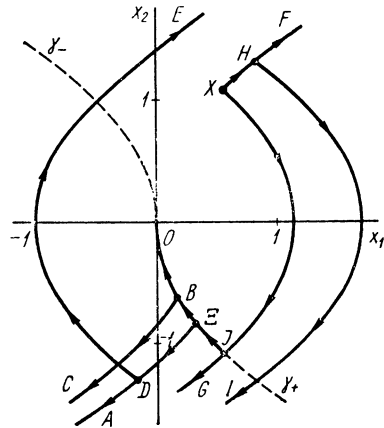


Рис. 7.4. Различные траектории, получающиеся при положении четырех возможных управляющих последовательностей

справедливо для любого состояния из  $R_-$ . Итак, методом исключения мы пришли к выводу, что последовательность  $\{-1, +1\}$  оптимальна по быстродействию для любого состояния из  $R_-$ , причем управление переключается с  $u = -1$  на  $u = +1$  на линии переключения  $\gamma$ . Совершенно аналогично можно показать, что последовательность  $\{+1, -1\}$  оптимальна по быстродействию для любого состояния из  $R_+$  при условии, что управление переключается с  $u = +1$  на  $u = -1$  на линии переключения  $\gamma$ . Полученные нами результаты можно сформулировать в виде закона управления.

**Закон управления 7.1. (решение задачи 7.1.).** Оптимальное по быстродействию управление  $u^*$  как функция от состояния  $(x_1, x_2)$  равно

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in \gamma_+ \cup R_+ \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in \gamma_- \cup R_- \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

и, следовательно,  $u^*$  является единственным. Этот закон управления определяет величину оптимального управления  $u^*$  для любого состояния на фазовой плоскости. Отметим, что при его доказательстве мы использовали:

1. Существование управления, оптимального по быстродействию.
2. Однозначное соответствие управляющей последовательности начальному состоянию. Это эквивалентно единственности экстремальных управлений.
3. Тот факт, что из существования оптимального управления и единственности экстремальных управлений следует единственность оптимального управления.

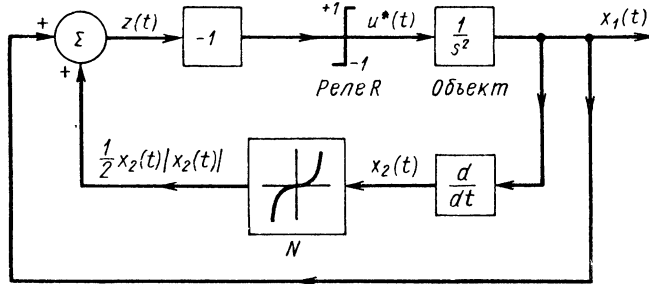


Рис. 7.5. Реализация оптимальной по быстродействию системы управления объектом с двойным интегрированием

Далее покажем, каким образом может быть реализован закон управления 7.1. Мы можем спроектировать нелинейную систему управления с обратной связью, которая преобразует фазовые координаты  $x_1$  и  $x_2$  и формирует правильное управление  $u^*$ . Такая практическая реализация показана на рис. 7.5. Фазовые координаты (переменные состояния)  $x_1(t)$  (выход) и  $x_2(t)$  (скорость изменения выходной координаты) измеряются в каждый момент времени. Сигнал  $x_2(t)$  подается на нелинейность  $N$ , на выходе которой имеем  $\frac{1}{2} x_2(t) |x_2(t)|$ .

Сигнал

$$z(t) = x_1(t) + \frac{1}{2} x_2(t) |x_2(t)| \quad (7.25)$$

после инвертирования управляет реле  $R$ . Реле представляет собой техническую реализацию операции  $\text{sign}$ .

Сигнал на выходе реле обеспечивает управление, оптимальное по быстродействию, так как

если  $(x_1(t), x_2(t)) \in R_-$ , то  $-z(t) < 0$ ;

если  $(x_1(t), x_2(t)) \in R_+$ , то  $-z(t) > 0$ .

Основная трудность возникает тогда, когда состояние  $(x_1(t), x_2(t))$  оказывается на линии переключения  $\gamma$ . Из уравнений (7.25) и (7.21) можно видеть, что при  $(x_1(t), x_2(t)) \in \gamma$  имеем  $z(t) = 0$ . В этом случае входной сигнал реле равен нулю. Однако так как реле является физическим элементом с малой (но не равной нулю) инерционностью, оно переключится не в точности на кривой  $\gamma$ , а несколько позже, и поэтому, когда действительно произойдет переключение реле, состояние системы уже не будет находиться на кривой  $\gamma$ , и сигнал на входе реле не будет равен нулю. Именно поэтому систему, показанную на рис. 7.2, мы называем технической реализацией закона управления. Физические свойства применяемых технических средств устраняют неопределенность функции  $\text{sign}\{0\}$ , и поэтому практические системы<sup>1</sup> оказываются «почти» оптимальными («квазиоптимальными»).

Перейдем далее к реализации нелинейности  $N$ . Прежде всего заметим, что связь между входом и выходом  $N$  совпадает с линией переключения  $\gamma$ . Можно сконструировать нелинейность  $N$ , используя множительное устройство и генератор модуля (чтобы получить сигнал  $x_2(t)|x_2(t)|$ ) или кусочно-линейную аппроксимацию на диодах. Предоставляем читателю самостоятельно оценить результаты аппроксимации в порядке выполнения упражнения.

На рис. 7.6 показаны две оптимальные траектории к началу координат. Стрелками показано направление движения для положительного времени. Оптимальные траектории составлены из отрезков парабол.

Найдем теперь минимальное время. Для каждой точки  $(x_1, x_2)$  фазовой плоскости существует время  $t^* = t^*(x_1, x_2)$ , которое является наименьшим временем, требующимся для перевода  $(x_1, x_2)$  в  $(0, 0)$ . Выразим  $t^*$  в функции от  $x_1, x_2$  и покажем, что оно является решением уравнения Гамильтона—Якоби. Метод вычисления  $t^*$  состоит в том, что вычисляется время, требующееся для перевода  $x_1, x_2$  на линию переключения  $\gamma$ , а затем — время движения от точки пересечения траектории с кривой  $\gamma$  до точки  $(0, 0)$ . В результате получим

$$t^*(x_1, x_2) = t^* = \left\{ \begin{array}{ll} x_2 + \sqrt{4x_1 + 2x_2^2}, & \text{если } x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2|; \\ -x_2 + \sqrt{-4x_1 + 2x_2^2}, & \text{если } x_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2|; \\ |x_2|, & \text{если } x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2|. \end{array} \right. \quad (7.26)$$

Упражнение 7.1. Получите выражения (7.26).

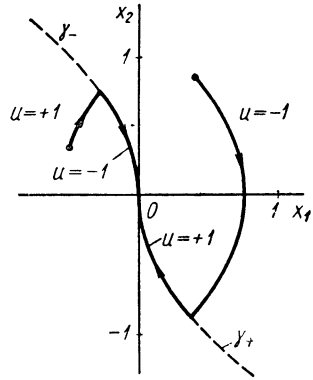


Рис. 7.6. Две оптимальные по быстродействию траектории на фазовой плоскости

<sup>1</sup> Подробное обсуждение несовершенства оборудования содержится в [198], гл. 15.

Рассмотрим теперь множество состояний  $(x_1, x_2)$ , которые могут быть переведены в  $(0, 0)$  за одно и то же минимальное время  $t^*$ . Из соотношений (7.26) находим

$$x_1 = \begin{cases} -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{4}(t^* - x_2)^2 & \text{для } x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2|; \\ \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4}(t^* + x_2)^2 & \text{для } x_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2|; \\ -\frac{1}{2}x_2t^* & \text{для } x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2|. \end{cases} \quad (7.27)$$

**Определение 7.6**<sup>1</sup>. Пусть  $S(t^*)$  — множество состояний, которые можно перевести в  $(0, 0)$  за одно и то же минимальное время  $t^*$ . Множество  $S(t^*)$  называют минимальной изохроной. Состояние  $(x_1, x_2)$  принадлежит к  $S(t^*)$  в том и только в том случае, когда  $x_1, x_2$  и  $t^*$  удовлетворяют уравнению (7.27).

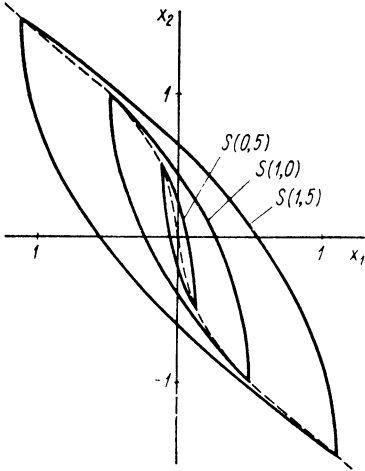


Рис. 7.7. Три минимальные изохроны для объекта с двойным интегрированием

Каждое множество  $S(t^*)$  есть замкнутая кривая на фазовой плоскости. На рис. 7.7 показаны три минимальные изохроны. Каждая кривая  $S(t^*)$  дифференцируема во всех точках за исключением двух точек пересечения с линией переключения  $\gamma$ . Из соотношений (7.27) легко вывести следующее свойство минимальных изохрон. Пусть

$$t_1^* < t_2^*; \quad (7.28)$$

рассмотрим минимальные изохроны  $S(t_1^*)$  и  $S(t_2^*)$ . Предположим, что

$$(x_1', x_2) \in S(t_1^*), (x_1'', x_2) \in S(t_2^*) \text{ и } (x_1''', x_2) \in \gamma,$$

тогда

$$|x_1' - x_1'''| < |x_1'' - x_1'''|. \quad (7.29)$$

**Упражнение 7.2.** Выведите неравенство (7.29). Это свойство, попросту говоря, состоит в том, что минимальные изохроны «растягиваются» с увеличением времени  $t^*$ .

**Упражнение 7.3.** Рассмотрите изохрону  $S(t^*, x_1, x_2)$  как границу множества  $\hat{S}(t^*, x_1, x_2)$ . Покажите, что множество  $\hat{S}(t^*, x_1, x_2)$  замкнуто, ограничено и выпукло. Покажите, что множество  $\hat{S}(t^*, -x_1, x_2)$  является множеством достижимых состояний из  $(0, 0)$  за время  $t^*$  для управления, удовлетворяющего ограничению  $|u(t)| \leq 1$ .

Убедимся, что уравнение Гамильтона—Якоби<sup>2</sup> удовлетворяется вдоль оптимальной траектории. Прежде всего, минимум стоимости для нашей задачи соответствует минимальному времени  $t^*(x_1, x_2)$ :

$$J^*(\mathbf{x}, t) = t^*(x_1, x_2). \quad (7.30)$$

Минимальное время выражается соотношением (7.27). В общем случае уравнение Гамильтона—Якоби имеет вид

$$\left\{ \frac{\partial J^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + H \left[ \mathbf{x}, \frac{\partial J^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \mathbf{u} \right] \right\} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^* \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^*}} = 0. \quad (7.31)$$

<sup>1</sup> Сравните с определением 6.10.

<sup>2</sup> См. § 5.18—5.21 и § 6.9.

Для данной задачи имеем

$$H = 1 + x_2 p_1 + u p_2, \quad (7.32)$$

и поэтому примем, что

$$p_1 = \frac{\partial t^*}{\partial x_1}; \quad p_2 = \frac{\partial t^*}{\partial x_2}. \quad (7.33)$$

Так как оптимальное управление равно:

$$\begin{aligned} u^* &= +1, & \text{если } (x_1, x_2) \in R_+; \\ u^* &= -1, & \text{если } (x_1, x_2) \in R_-; \\ u^* &= -\text{sign } \{x_2\}, & \text{если } (x_1, x_2) \in \gamma, \end{aligned}$$

то уравнение Гамильтона—Якоби запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t^*}{\partial t} + 1 + x_2 \frac{\partial t^*}{\partial x_1} - \frac{\partial t^*}{\partial x_2} &= 0, & \text{если } x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2|; \\ \frac{\partial t^*}{\partial t} + 1 + x_2 \frac{\partial t^*}{\partial x_1} + \frac{\partial t^*}{\partial x_2} &= 0, & \text{если } x_1 < -\frac{1}{2} x_2 |x_2|; \\ \frac{\partial t^*}{\partial t} + 1 + x_2 \frac{\partial t^*}{\partial x_1} - \text{sign } \{x_2\} \frac{\partial t^*}{\partial x_2} &= 0, & \text{если } x_1 = -\frac{1}{2} x_2 |x_2|. \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

Из уравнений (7.26) получим

$$\frac{\partial t^*}{\partial t} = 0; \quad (7.35)$$

$$\frac{\partial t^*}{\partial x_1} = \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{4x_1 + 2x_2^2}}, & \text{если } x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2|; \\ -\frac{2}{\sqrt{-4x_1 + 2x_2^2}}, & \text{если } x_1 < -\frac{1}{2} x_2 |x_2|; \\ 0 & \text{если } x_1 = -\frac{1}{2} x_2 |x_2|; \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial t^*}{\partial x_2} = \left\{ \begin{aligned} 1 - \frac{2x_2}{\sqrt{4x_1 + 2x_2^2}}, & \text{если } x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2|; \\ -1 + \frac{2x_2}{\sqrt{-4x_1 + 2x_2^2}}, & \text{если } x_1 < -\frac{1}{2} x_2 |x_2|; \\ \text{sign } \{x_2\}, & \text{если } x_1 = -\frac{1}{2} x_2 |x_2|. \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

Рассмотрим множество состояний  $R_- = \{(x_1, x_2): x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2|\}$ , т. е. множество точек справа от линии переключения. Из уравнений (7.35) — (7.37) получим

$$1 + \frac{2x_2}{\sqrt{4x_1 + 2x_2^2}} - 1 - \frac{2x_2}{\sqrt{4x_1 + 2x_2^2}} = 0. \quad (7.38)$$

Аналогично для  $x_1 < -\frac{1}{2} x_2 |x_2|$ , т. е. для  $(x_1, x_2) \in R_+$  имеем

$$1 - \frac{2x_2}{\sqrt{-4x_1 + 2x_2^2}} - 1 + \frac{2x_2}{\sqrt{-4x_1 + 2x_2^2}} = 0, \quad (7.39)$$

и, наконец, для  $x_1 = -\frac{1}{2} x_2 |x_2|$ , т. е. для состояний на кривой  $\gamma$ , получим

$$1 + x_2 0 - \text{sign} \{x_2\} \text{sign} \{x_2\} = 1 - 1 = 0. \quad (7.40)$$

Из последних соотношений (7.38)—(7.40) следует, что уравнение Гамильтона—Якоби удовлетворяется для любых  $(x_1, x_2)$  и что закон управления 7.1 действительно является оптимальным по быстродействию. Отметим, однако, что уравнение Гамильтона—Якоби необходимо проверить для каждой из областей  $R_+$ ,  $R_-$  и  $\gamma$  отдельно. Это является типичной особенностью многих систем, оптимальных по быстродействию<sup>1</sup>.

В заключение сформулируем основные результаты. Мы рассмотрели задачу об оптимальном по быстродействию управлении объектом с двойным интегрированием при переводе его из любого начального состояния в начало координат. Сначала мы использовали необходимые условия для получения четырех управляющих последовательностей, которые надо рассматривать как возможные оптимальные управления. Далее мы показали, что каждому состоянию  $(x_1, x_2)$  соответствует единственная управляющая последовательность, переводящая его в  $(0, 0)$ , и, таким образом, получили закон управления 7.1. Мы выразили минимальное время  $t^*$  перехода из произвольного начального состояния  $(x_1, x_2)$  в  $(0, 0)$  в виде функции от  $(x_1, x_2)$  и ввели понятие минимальной изохроны. Наконец, показали, что минимальное время  $t^*$  есть решение уравнения Гамильтона—Якоби, доказав таким образом оптимальность закона управления 7.1.

Читатель, видимо, заметил, что мы так и не нашли неизвестных начальных значений дополнительных переменных  $p_1$  и  $p_2$  из уравнения (7.12). Таким образом, мы смогли найти оптимальное управление как функцию состояния, используя лишь то обстоятельство, что оптимальное управление должно минимизировать гамильтониан и информацию, которую дает «характер»  $p_2(t)$  (см. рис. 7.1). Мы не использовали также того, что гамильтониан должен быть равен нулю вдоль оптимальной траектории. Именно это условие и необходимо использовать для нахождения  $p_1$  и  $p_2$ . Сделать это предоставим читателю в одном из упражнений в конце настоящего параграфа.

Далее рассмотрим задачу о переводе произвольного начального состояния в область  $S$  за минимальное время. Обсудим сначала задачу о достижении оси  $x_1$  из произвольного начального состояния за минимальное время.

**Задача 7. 2.** Дана система (7.5) и область  $S$ , заданная в виде

$$S = \{(x_1, x_2) : x_2 = 0, -\infty < x_1 < \infty\}. \quad (7.41)^2$$

Требуется найти управление  $u(t)$ , удовлетворяющее ограничению  $|u(t)| \leq 1$ , которое переводит произвольное состояние в  $S$  за минимальное время.

То обстоятельство, что мы пытаемся достичь области, а не точки, не повлияет на некоторые из результатов, которые получены с помощью принципа минимума. Например, гамильтониан  $H$  остается неизменным:

$$H = 1 + x_2(t) p_1(t) + u(t) p_2(t). \quad (7.42)$$

Управление  $u(t)$ , минимизирующее гамильтониан, выражается уравнением (7.9), т. е.

$$u(t) = -\text{sign} \{p_2(t)\}. \quad (7.43)$$

<sup>1</sup> См. также замечания в конце § 6.9.

<sup>2</sup> Область  $S$  обладает тем свойством, что в любой ее точке можно определить единственную нормаль к ней.

Теми же самыми остаются и уравнения относительно дополнительных переменных:

$$p_1(t) = \pi_1; \quad (7.44)$$

$$p_2(t) = \pi_2 - \pi_1 t. \quad (7.45)$$

Условия трансверсальности требуют, чтобы в конечный момент времени  $t_1$  дополнительный вектор  $\mathbf{p}(t_1)$  был нормален к вектору  $\mathbf{q}$ , который принадлежит гиперплоскости, касательной к области  $S$ . В нашей задаче область  $S$  является прямой, и поэтому в качестве  $\mathbf{q}$  можно использовать вектор

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k \neq 0. \quad (7.46)$$

Таким образом, из условия

$$\mathbf{p} \langle (t_1), \mathbf{q} \rangle = 0 \quad (7.47)$$

следует, что

$$k p_1(t_1) + 0 p_2(t_1) = 0, \quad (7.48)$$

откуда находим

$$p_1(t_1) = 0. \quad (7.49)$$

Но  $p_1(t) = \pi_1 = \text{const}$  в любой момент времени, а следовательно,  $\pi_1 = 0$  и

$$p_2(t) = \pi_2. \quad (7.50)$$

Итак,  $p_2(t)$  есть ненулевая (почему?) постоянная, положительная или отрицательная, для любого момента времени. Из последнего уравнения, а также из уравнения (7.43) следует, что оптимальное управление есть  $u = +1$  или  $u = -1$  и что переключения не происходит. Таким образом, только последовательности  $\{+1\}$  и  $\{-1\}$  могут быть возможными оптимальными управлениями. Нетрудно убедиться, что оптимальное управление как функция от состояния формулируется в виде следующего закона управления.

**Закон управления 7.2 (решение задачи 7. ).** Управление, оптимальное по быстродействию, как функция состояния  $(x_1, x_2)$  определяется в виде

$$u^* = u^*(x_1, x_2) = -\text{sign}\{x_2\}, \quad (7.51)$$

и, следовательно,  $u^*$  единственно.

Из рис. 7.8 показаны траектории, оптимальные по быстродействию, для области цели  $S$ .

**Упражнение 7.4.** Проверьте закон управления 7.2.

**Упражнение 7.5.** Дано состояние  $(x_1, x_2)$ . Найдите минимальное время  $t_1^*$ , требующееся для попадания в область  $S$  [см. зависимости (7.41)]. Покажите, что  $t_1^*$  является решением уравнения Гамильтона—Якоби для этой задачи. Нарисуйте блок-схему оптимальной системы.

Проанализируем сходства и различия между задачей о попадании в отдельную точку и задачей о попадании в множество  $S$ . Гамильтониан, уравнения относительно дополнительных переменных и уравнение  $H$ -минимального управления (в функции от дополнительной переменной)

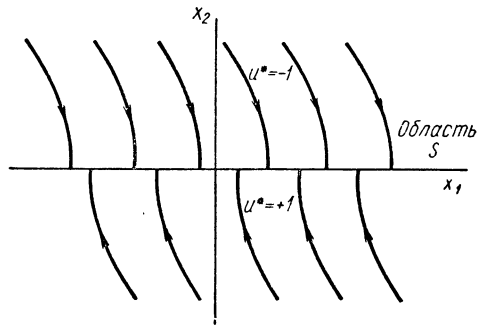


Рис. 7.8. Оптимальные по быстродействию траектории к области цели  $S$  (ось  $x_1$ )



одинакова для обеих задач. Единственное отличие имеет место при вычислении дополнительных переменных в конечный момент времени. Эта дополнительная информация позволяет сделать вывод, что только две управляющие последовательности  $\{+1\}$  и  $\{-1\}$  могут быть оптимальными управлениями для области  $S$ , в то время как для точки оптимальным управлением может оказаться одна из четырех управляющих последовательностей

$$\{+1\}; \{-1\}; \{+1, -1\}; \{-1, +1\}.$$

Рассмотрим теперь задачу о достижении замкнутого интервала на оси  $x_1$  за минимальное время.

**Задача 7.3.** Дана система (7.5) и область  $S_\alpha$ , определенная для  $\alpha > 0$  соотношением

$$S_\alpha = \{(x_1, x_2) : x_2 \neq 0, \quad -\alpha \leq x_1 \leq \alpha\}. \quad (7.52)$$

Найти управление  $u(t)$ , удовлетворяющее ограничению  $|u(t)| \leq 1$ , которое переводит произвольное начальное состояние в  $S$  за минимальное время.

Отметим, что единственную нормаль к замкнутому множеству  $S$  можно определить везде, за исключением двух точек  $(-\alpha, 0)$  и  $(\alpha, 0)$ . Если конечное состояние оптимальной траектории принадлежит внутренней части  $S_\alpha$ ,  $i(S_\alpha)$ , то условия трансверсальности выполняются. Если конечным состоянием является одна из точек  $(-\alpha, 0)$  или  $(\alpha, 0)$ , то в этих точках нельзя определить единственной касательной к  $S_\alpha$  и поэтому нельзя установить никаких условий трансверсальности. Поэтому, если конечное состояние принадлежит внутренней части  $S_\alpha$ , то оптимальными управлениями могут быть только две последовательности  $\{+1\}$  и  $\{-1\}$ . Если конечное состояние принадлежит границе  $S_\alpha$ , т. е.  $\partial S_\alpha$ , то все четыре последовательности  $\{+1\}$ ,  $\{-1\}$ ,  $\{+1, -1\}$ ,  $\{-1, +1\}$  можно рассматривать в качестве возможных оптимальных управлений.

Определим замкнутое множество  $G$ , показанное на рис. 7.9, и множества  $G_+$  и  $G_-$  при помощи соотношений

$$\left. \begin{aligned} G &= \left\{ (x_1, x_2) : -\frac{1}{2} x_2 |x_2| - \alpha \leq x_1 \leq -\frac{1}{2} x_2 |x_2| + \alpha \right\}; \\ G_+ &= \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in G \text{ и } x_2 < 0\}; \\ G_- &= \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in G \text{ и } x_2 > 0\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

Так как множество  $S_\alpha$  задачи 7.3 есть подмножество из оси  $x_1$  (множества  $S$  задачи 7.2) и закон управления 7.2 определяет оптимальное управление по отношению к области  $S$ , то существует множество состояний  $\{(x_1, x_2)\}$  такое, что управление (7.51) является оптимальным по отношению к области  $S_\alpha$ . Нетрудно убедиться (рис. 7.8 и 7.9), что таким множеством является множество  $G$ . Следовательно<sup>1</sup>, оптимальным управлением для любого элемента из  $G$  является

$$u^* = u^*(x_1, x_2) = -\text{sign } \{x_2\} \text{ для всех } (x_1, x_2) \in G. \quad (7.54)$$

Интересно отметить топологическое подобие области  $G$  линии переключения  $\gamma$ .

<sup>1</sup> См. также замечания § 6.23 и 6.24.

Определим, далее, два множества  $Q_-$  и  $Q_+$ , показанные на рис. 7.9 при помощи соотношений

$$\left. \begin{aligned} Q_- &= \left\{ (x_1, x_2) : x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2| + \alpha \right\}; \\ Q_+ &= \left\{ (x_1, x_2) : x_1 < -\frac{1}{2} x_2 |x_2| - \alpha \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

В общем случае возможны четыре управляющих последовательности  $\{+1\}$ ;  $\{-1\}$ ;  $\{+1, -1\}$  и  $\{-1, +1\}$ . Когда же конечная точка принадлежит внутренней части  $S_\alpha$ ,  $i(S_\alpha)$ , то могут быть оптимальными лишь две последовательности  $\{+1\}$  и  $\{-1\}$ . Следовательно, для элементов из  $Q_+$  и  $Q_-$  и двух конечных состояний  $(-\alpha, 0)$  и  $(+\alpha, 0)$  надо рассматривать четыре последовательности.

Выберем произвольное состояние  $X = (x_1, x_2)$  из  $Q_-$  и попробуем приложить каждую из четырех последовательностей. С помощью рис. 7.2 и 7.9 нетрудно убедиться, что только управляющая последовательность  $\{-1, +1\}$  может перевести состояние  $(x_1, x_2) \in Q_-$  в  $(\alpha, 0)$ , или в  $(-\alpha, 0)$ . Чтобы достичь состояния  $(\alpha, 0)$ , управление  $u$  надо переключить с  $u = -1$  на  $u = +1$  в точке  $Z = (z_1, z_2)$  на кривой  $\Gamma_+$  (рис. 7.9), а чтобы достичь состояния  $(-\alpha, 0)$ , это нужно выполнить в точке  $Y = (y_1, y_2)$  (см. две траектории  $XZA$  и  $XZYB$ , показанные на рис. 7.9). Обе точки  $(-\alpha, 0)$  и  $(\alpha, 0)$  принадлежат области  $S_\alpha$ . Легко видеть [см. уравнение (7.18)], что из любого состояния  $Q_-$  переход в точку  $(\alpha, 0)$  занимает меньше времени, чем в точку  $(-\alpha, 0)$ .

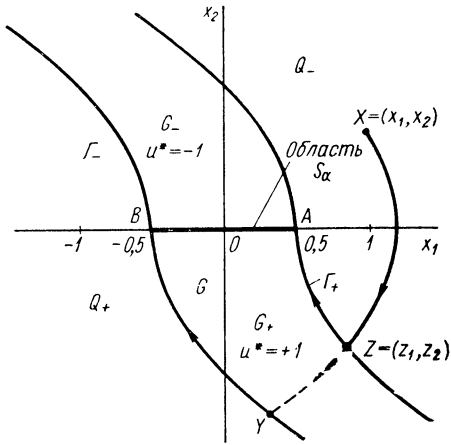


Рис. 7.9. Области  $Q_+$ ,  $Q_-$ ,  $G_+$ ,  $G_-$

Аналогично можно доказать, что если  $(x_1, x_2) \in Q_+$ , то только управляющая последовательность  $\{+1, -1\}$  может перевести  $(x_1, x_2)$  в  $(-\alpha, 0)$  или в  $(\alpha, 0)$  и что состояния  $(-\alpha, 0)$  можно достичь быстрее, чем состояния  $(\alpha, 0)$ .

Подытожим это обсуждение следующим образом. Пусть  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  — две кривые, показанные на рис. 7.9, заданы соотношениями

$$\Gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + \alpha, x_2 < 0 \right\}; \quad (7.56)$$

$$\Gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 - \alpha, x_2 > 0 \right\}; \quad (7.57)$$

$$\Gamma = \Gamma_+ \cup S_\alpha \cup \Gamma_- \quad (7.58)$$

Предположим, что  $R_-$  — область состояний выше кривой  $\Gamma$ , т. е.

$$R_- = G_- \cup Q_-, \quad (7.59)$$

а  $R_+$  — область состояний ниже кривой  $\Gamma$ :

$$R_+ = G_+ \cup Q_+. \quad (7.60)$$

Решение задачи 7.3 выражается в виде следующего закона управления:

**Закон управления 7.3. (решение задачи 7.3).** Оптимальное управление как функция состояния равно

$$\left. \begin{aligned} u^* = u^*(x_1, x_2) &= +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R_+ \cup \Gamma_+; \\ u^* = u^*(x_1, x_2) &= -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R_- \cup \Gamma_- \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

Таким образом, оптимальное управление единственно.

Некоторые из оптимальных траекторий к множеству  $S_\alpha$  показаны на рис. 7.10.

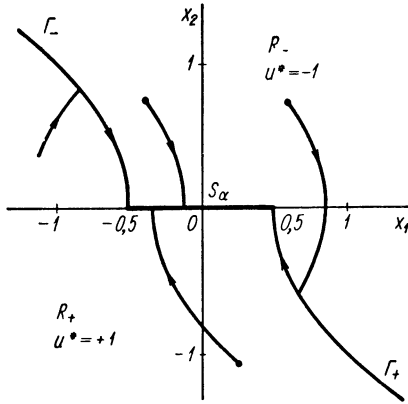


Рис. 7.10. Оптимальные по быстродействию траектории к области  $S_\alpha$

**Упражнение 7.6.** Спроектируйте нелинейную систему, реализующую закон управления 7.3.

**Упражнение 7.7.** Найдите минимальное время перехода в  $S_\alpha$ . Покажите, что оно является решением уравнения Гамильтона—Якоби для этой задачи. Начертите минимальные изохроны и покажите, что кривые  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  соединяют точки минимальных изохрон, в которых последние не имеют производных (т. е. «углы» изохрон).

**Упражнение 7.8.** Для объекта с двойным интегрированием рассмотрите область  $S_\beta$ :  $(x_1, x_2) \in S_\beta$ , если  $x_1 = 0, |x_2| \leq \beta$ . Найдите оптимальный закон управления.

**Упражнение 7.9.** Для объекта с двойным интегрированием рассмотрите область  $S_\delta$ :  $(x_1, x_2) \in S_\delta$ , если  $|x_1| \leq \delta, |x_2| \leq \delta$ . Найдите оптимальный закон управления.

Полезно дать беглую физическую интерпретацию фазовых координат.

Рассмотрим объект с передаточной функцией  $G(s) = \frac{1}{s^2}$ . Пусть  $y(t)$ —выход объекта и  $v(t), |v(t)| \leq M$ —его вход. Предположим, что нам задан опорный сигнал

$$r(t) = r_0 + r_1 t + \frac{1}{2} r_2 t^2. \quad (7.62)$$

Обозначим через  $e(t)$  сигнал ошибки:

$$e(t) = r(t) - y(t), \quad (7.63)$$

тогда очевидны соотношения

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{r}(t) - \dot{y}(t); \\ \ddot{e}(t) &= \ddot{r}(t) - \ddot{y}(t), \end{aligned} \right\} \quad (7.64a)$$

но

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}(t) &= v(t); \\ \dot{r}(t) &= r_1 + r_2 t; \\ \ddot{r}(t) &= r_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.64b)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение сигнала ошибки имеет вид

$$\ddot{e}(t) = r_2 - v(t). \quad (7.65)$$

Определим управление  $u(t)$  соотношением

$$u(t) = r_2 - v(t) \quad (7.66)$$

<sup>1</sup> См. также замечания § 6.23 и 6.24.

и получим

$$\ddot{e}(t) = u(t). \quad (7.67)$$

Если коэффициент  $r_2$  ограничен:

$$|r_2| \leq M' < M. \quad (7.68)$$

то управление  $u(t)$  ограничено соотношением

$$r_2 - M \leq u(t) \leq r_2 + M. \quad (7.69)$$

Следовательно, переменные состояния (фазовые координаты)  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  можно определить с помощью соотношений

$$x_1(t) = e(t); \quad x_2(t) = \dot{e}(t). \quad (7.70)$$

Точно так же, как мы это делали выше, будем стараться уменьшить  $e(t)$  и  $\dot{e}(t)$  до нуля за минимальное время. Отметим, что таким способом можно спроектировать следящую систему, выход которой будет обрабатывать ступенчатый, линейно-нарастающий или параболический сигнал в течение минимального времени. Отличие состоит в том, что при  $r_2 \neq 0$  линия переключения будет несимметрична.

**Упражнение 7.10.** Положите в уравнении (7.68)  $r_2 = 1$  и  $M = 3$ . Уравнение (7.69) запишется в виде  $-2 \leq u(t) \leq +4$ . Найдите оптимальное управление  $u^*(e, \dot{e})$ , уменьшающее начальную ошибку  $e(0)$  и  $\dot{e}(0)$  до 0 за минимальное время.

Параграф завершается рядом упражнений. Так как уравнения объекта с двойным интегрированием исключительно просты, его можно использовать для того, чтобы продемонстрировать многие интересные аспекты оптимальных по быстродействию систем, избежав неоправданных вычислений (хотя некоторые из упражнений, безусловно, нетривиальны).

Следующие шесть упражнений иллюстрируют различные аспекты управления, оптимального по быстродействию, для случая конечного состояния, являющегося точкой на фазовой плоскости.

**Упражнение 7.11.** Это упражнение иллюстрирует связь между начальным состоянием и начальным значением дополнительных переменных. Рассмотрим сначала задачу 7.1. Пусть  $(\pi_1, \pi_2)$  — начальное значение дополнительного вектора, соответствующее начальному состоянию  $(\xi_1, \xi_2)$ . Используя уравнения (7.8), (7.12), (7.24) и (7.26) и то, что гамильтониан равен нулю вдоль оптимальной траектории, докажите:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= \frac{2}{\sqrt{4\xi_1 + 2\xi_2^2}}; \\ \pi_2 &= \frac{2\xi_2}{\sqrt{4\xi_1 + 2\xi_2^2}} + 1 \end{aligned} \right\} \text{ для всех } (\xi_1, \xi_2) \in R_-;$$

и  $\pi_2 = -1 - \xi_2\pi_1$  для всех  $(\xi_1, \xi_2) \in \gamma_+$ .

Найдите аналогичные уравнения для случая  $(\xi_1, \xi_2) \in R_+$  и  $(\xi_1, \xi_2) \in \gamma_-$ . Представьте себе, что эти уравнения определяют нелинейное преобразование  $N$  плоскости  $\xi_1, \xi_2$  в плоскость  $\pi_1, \pi_2$  [т. е.  $\pi = N(\xi)$ ]. Постройте изображения  $N(R_-)$  и  $N(R_+)$  на плоскости  $\pi_1, \pi_2$ . Для изучения задачи «чувствительности» рассмотрите два множества (круга) на плоскости  $\xi_1, \xi_2$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(\xi_1, \xi_2) : (\xi_1 - 2)^2 + (\xi_2 + 2)^2 \leq 0,04\}; \\ A_2 &= \{(\xi_1, \xi_2) : (\xi_1 - 2)^2 + \xi_2^2 \leq 0,04\} \end{aligned}$$

и найдите их отображения  $N(A_1)$  и  $N(A_2)$  на плоскости  $\pi_1, \pi_2$ . Можно ли сделать какие-либо выводы относительно изменений  $(\pi_1, \pi_2)$ , вызываемых малыми изменениями  $(\xi_1, \xi_2)$ ?

Покажите, что вектор  $\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix}$  нормален к минимальной изохроне в точке  $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$  везде, где такая нормаль определена. У к а з а н и е: см. уравнения (7.35), (7.36) и (7.37).

**Упражнение 7.12.** Это упражнение иллюстрирует изменение траекторий на поверхности минимального времени. Прежде всего повторите материал § 6.7 и снова рассмотрите задачу 7.1. Начертите на фазовой плоскости две траектории, начинающиеся из  $(2; 0)$  и  $(2, 2; 0)$ . На том же чертеже нарисуйте различные минимальные изохроны, используя уравнение (7.27). С помощью чертежа сделайте выводы относительно углов между вектором, касательным к оптимальной по быстрдействию траектории, и касательной к минимальной изохроне.

**Упражнение 7.13.** Это упражнение довольно громоздко, так как требует решения, получаемого с помощью итераций. Рассмотрите эксперимент, описанный в шаге 3а § 6.3, и еще раз рассмотрите задачу 7.1. Опишите итерационный процесс, который можно использовать для отыскания оптимального управления из произвольного начального состояния  $(\xi_1, \xi_2)$ . Иначе говоря, предположим, что мы не знаем закона управления 7.1. Назначьте любое произвольное значение  $(\pi_1, \pi_2)$ , например  $(\pi_{10}, \pi_{20})$  и время  $t^*$ , например  $t_0^*$ , затем найдите управление по формулам (7.9) для  $0 \leq t \leq t_0^*$ , проинтегрируйте систему уравнений (7.5) и вычислите «состояние» при  $t = t_0^*$ . На основе «расстояния ошибки» от начала координат назначьте новые значения  $(\pi_1, \pi_2)$  и действуйте так до тех пор, пока «случайно» не будет найдено «почти оптимальное» управление. Прделайте это для начального состояния  $(2, 0)$  и определите число итераций, требующееся для отыскания управления, «достаточно» близкого к оптимальному. Как вы полагаете, полезны ли для этой задачи результаты упражнений 7.11 и 7.12?

**Упражнение 7.14.** Рассмотрите систему (7.7). Докажите, что существует единственное оптимальное управление, переводящее любое начальное состояние  $(\xi_1, \xi_2)$  в любое конечное состояние  $(\theta_1, \theta_2)$ . Можно предполагать, что оптимальное по быстрдействию управление существует.

**Упражнение 7.15.** Это упражнение показывает неединственность оптимального управления в случае, когда конечным состоянием является не начало координат. Рассмотрите систему (7.7). Пусть  $(\theta_1, \theta_2)$ ,  $\theta_2 \geq 0$  — произвольное состояние в верхней полуплоскости. Предположим, что  $Q_1$  и  $Q_2$  — следующие множества на фазовой плоскости:

$$Q_1 = \left\{ (x_1, x_2) : -\frac{1}{2} x_2^2 + \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2^2 \leq x_1 \leq -\frac{1}{2} x_2^2 + \theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2^2; x_2 \geq \theta_2 \right\};$$

$$Q_2 = \left\{ (x_1, x_2) : -\frac{1}{2} x_2^2 + \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2^2 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} x_2^2 + \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2^2; 0 \leq x_2 \leq \theta_2 \right\}.$$

Покажите, что имеется два оптимальных управления, переводящих начальное состояние  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(\theta_1, \theta_2)$  в случае, если  $(\xi_1, \xi_2) \in Q_1 \cup Q_2$ . В противном случае существует одно и только одно оптимальное управление. Укажите, как это доказать с помощью теоремы 7.9. Получите аналогичные результаты для конечных состояний  $(\theta_1, \theta_2)$ ,  $\theta_2 \leq 0$ . Проверьте полученные аналитические результаты, испытывая четыре управляющих последовательности (7.13) сначала для  $(\theta_1, \theta_2) = (1, 1)$ , а затем для  $(\theta_1, \theta_2) = (1, -1)$ . Выразите единственное оптимальное по быстрдействию управление как функцию от состояния. Составьте блок-схему оптимальной системы.

**Упражнение 7.16.** Это упражнение показывает, что поверхность минимального времени может быть только кусочно-непрерывной. Рассмотрите систему (7.7) и конечное состояние  $(1, 1)$ . Пусть  $(\xi_1, \xi_2)$  — произвольное заданное начальное состояние. Обозначим через  $t_2^*(\xi_1, \xi_2)$  минимальное время, требующееся для перевода  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(1, 1)$ . Найдите уравнение, выражающее минимальное время  $t_2^*(\xi_1, \xi_2)$ . Далее, нарисуйте геометрические места состояний (минимальные изохроны), требующие одинакового времени  $t_2^*$  для перевода в  $(1, 1)$ , для следующих значений  $t_2^*$ :  $t_2^* = 0,5; 1; 2,0; 3,0; 3,9; 4,0; 4,1; 5,0; 6,0$ . Является ли поверхность  $t_2^*(\xi_1, \xi_2)$  непрерывной? Почему это так?

Следующие пять упражнений относятся к случаю достижения некоторой конечной области.

**Упражнение 7.17.** Это упражнение показывает, что если область цели состоит из двух изолированных точек, оптимальное управление необязательно единственно. Рассмотрите систему (7.7) и замкнутое, невыпуклое множество  $\hat{S}$ , определенное соотношением

$$\hat{S} = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, 2; x_2 = 0 \text{ или } x_1 = -0, 2; x_2 = 0\}.$$

Иначе говоря множество  $S$  составлено из двух изолированных состояний  $(-0, 2; 0)$  и  $(0, 2; 0)$ . Покажите, что оптимальное управление существует для любого начального состояния  $(\xi_1, \xi_2)$ .

Покажите также, что

а) оптимальное управление единственно, если

$$\xi_1^2 \neq \frac{1}{4} \xi_2^4 + 0,2\xi_2^2;$$

б) для всех остальных исходных состояний существует два экстремальных управления.

Найдите оптимальное управление (оптимальные управления). Нарисуйте минимальные изохроны и покажите, что они не являются границами выпуклых множеств. Почему отсутствуют условия трансверсальности?

**Упражнение 7.18.** Рассмотрите систему (7.7) и область цели

$$S_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2, |x_1| \leq 1\}.$$

Найдите оптимальное управление. Повторите для области

$$S_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 = -x_2, |x_1| \leq 1\}.$$

Обсудите единственность оптимального и экстремальных управлений.

**Упражнение 7.19.** Это упражнение показывает, что линия переключения обязательно является частью оптимальной траектории. Рассмотрите систему уравнений (7.7). Предположим, что областью цели является единичная окружность с центром в начале координат:

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Выразите оптимальное управление как функцию состояния для начальных состояний внутри и вне единичного круга. У к а з а н и е: следует искать выражение линии переключения в параметрической форме. Начертите несколько различных минимальных изохрон и покажите, что в отличие от рис. 7.7 минимальные изохроны не имеют «углов» на линии переключения. Следует ли из этого, что существует взаимно-однозначное соответствие между начальными значениями  $(\pi_1, \pi_2)$  и исходным состоянием  $(\xi_1, \xi_2)$ ?

**Упражнение 7.20.** Это упражнение иллюстрирует задачи, возникающие в случае, когда область  $S$  не является границей выпуклого множества. Рассмотрите систему уравнений (7.7). Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — два круга:

$$S_1 = \{(x_1, x_2) : (x_2 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1\};$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2) : (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

Предположим, что конечной областью является их объединение  $S = S_1 \cup S_2$ . Выразите оптимальное управление как функцию состояния. Обсудите единственность оптимального и экстремального управлений.

Следующее упражнение показывает, как можно учесть неидеальность одной из компонент при анализе системы.

**Упражнение 7.21.** Рассмотрите систему управления, показанную на рис. 7.5. Считайте, что идеальное реле  $R$  заменено на реле  $R_d$  с зоной нечувствительности, т. е. считайте, что вход  $|-z(t)|$  и выход  $[u^*(t)]$  реле  $R_d$  связаны соотношениями

$$u^*(t) = 0, \quad \text{если } |-z(t)| \leq 0,2;$$

$$u^*(t) = \text{sign} \{-z(t)\}, \quad \text{если } |-z(t)| > 0,2.$$

Проанализируйте влияние неидеальности реле на работу системы. У к а з а н и е: постройте область около линии переключения. Будет ли в системе ошибка? Возникнет ли предельный цикл? Можно ли изменить нелинейность  $N$  таким образом, чтобы устранить ошибку?

### 7.3. УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТАМИ С ДВУМЯ ПОСТОЯННЫМИ ВРЕМЕНИ

В этом параграфе мы рассмотрим оптимальное по быстродействию управление объектом, передаточная функция которого имеет два действительных полюса и не имеет нулей. В основном рассмотрение ведется так же, как и в предыдущем параграфе. Однако такая система имеет характеристики, существенно отличные (из-за отсутствия способности интегрировать) от объекта с двойным интегрированием. Тем не менее читатель вскоре увидит, что структура оптимальных систем в основном остается такой же, как и для объекта с двойным интегрированием. Мы покажем далее, что это действительно является наиболее общей характеристикой всех нормальных систем второго порядка.

Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{dy(t)}{dt} + \lambda_1 \lambda_2 y(t) = Ku(t), \quad (7.71)$$

где  $y(t)$  — выход;

$K$  — коэффициент усиления;

$u(t)$  — управление, которое мы считаем ограниченным по величине соотношением

$$|u(t)| \leq 1, \quad (7.72)$$

а  $\lambda_1, \lambda_2$  действительны, различны и не равны нулю ( $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$ ). В практике сервосистем об объекте, описываемом уравнением (7.71), говорят, что он имеет передаточную функцию вида

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{1}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \quad (7.73)$$

с действительными полюсами  $s = \lambda_1$  и  $s = \lambda_2$ .

Для того чтобы получить удобные фазовые координаты, используем два линейных преобразования. Пусть

$$y_1(t) = y(t); \quad y_2(t) = \dot{y}(t), \quad (7.74)$$

где  $y_1$  и  $y_2$  удовлетворяют системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t); \\ \dot{y}_2(t) &= -\lambda_1 \lambda_2 y_1(t) + (\lambda_1 + \lambda_2) y_2(t) + Ku(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.75)$$

Уравнение (7.75) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Ku(t) \end{bmatrix}, \quad (7.76)$$

или в векторном виде

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{u}(t). \quad (7.77)$$

Очевидно, что собственными значениями матрицы  $\mathbf{A}$  являются  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Если через  $\mathbf{\Lambda}$  обозначить диагональную матрицу

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (7.78)$$

то<sup>1</sup> существует невырожденная матрица  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

и обратная ей матрица

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.80)$$

такая, что

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}. \quad (7.81)$$

Используем теперь преобразование подобия<sup>2</sup> и определим  $\mathbf{z}(t)$  в виде

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{y}(t). \quad (7.82)$$

<sup>1</sup> См. § 2.9.

<sup>2</sup> См. § 4.9.

Компоненты вектора  $z$ ,  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$ , удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \lambda_1 z_1(t) - \frac{K}{\lambda_2 - \lambda_1} u(t); \\ \dot{z}_2(t) &= \lambda_2 z_2(t) + \frac{K}{\lambda_2 - \lambda_1} u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.83)$$

Удобно определить фазовые координаты  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , положив

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{K} z_1(t); \\ x_2(t) &= \frac{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{K} z_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.84)$$

Тогда  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  будут удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \lambda_1 x_1(t) + \lambda_1 u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= \lambda_2 x_2(t) + \lambda_2 u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.85)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться исключительно фазовыми координатами  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Отметим, что  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  связаны с  $y_1(t)$  [или  $y(t)$ ] и с  $y_2(t)$  [или  $y(t)$ ] известными линейными преобразованиями. В частности, если  $x_1(t) = x_2(t) = 0$ , то  $y_1(t) = y_2(t) = 0$ , и наоборот. Точная формулировка задачи выглядит следующим образом.

**Задача 7.4.** Дана система (7.85). Требуется найти допустимое управление, переводящее систему (7.85) из произвольного начального состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  в начало координат  $(0, 0)$  за минимальное время.

Заметим, что система уравнений (7.85) нормальна. Отметим также, что оптимальное по быстродействию управление существует (теорема 6.10) и единственно (теорема 6.7). Будем поступать совершенно аналогично тому, как это мы делали в предыдущем параграфе. Запишем гамильтониан задачи. Обозначим через  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  дополнительные переменные, тогда получим

$$H = 1 + \lambda_1 x_1(t) p_1(t) + \lambda_2 x_2(t) p_2(t) + u(t) \{ \lambda_1 p_1(t) + \lambda_2 p_2(t) \}. \quad (7.86)$$

Управление  $u(t)$ , при котором гамильтониан  $H$  имеет абсолютный минимум, равно:

$$u(t) = -\text{sign} \{ \lambda_1 p_1(t) + \lambda_2 p_2(t) \}. \quad (7.87)$$

Дополнительные переменные  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = -\lambda_1 p_1(t); \\ \dot{p}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -\lambda_2 p_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.88)$$

Пусть  $\pi_1$  и  $\pi_2$  — начальные значения дополнительных переменных, т. е.

$$\pi_1 = p_1(0); \quad \pi_2 = p_2(0). \quad (7.89)$$

Тогда решением уравнения (7.88) будет

$$\left. \begin{aligned} p_1(t) &= \pi_1 e^{-\lambda_1 t}; \\ p_2(t) &= \pi_2 e^{-\lambda_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (7.90)$$



Подставляя (7.90) в (7.87), получим

$$u(t) = -\operatorname{sign} \{ \lambda_1 \pi_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 \pi_2 e^{-\lambda_2 t} \} = -\operatorname{sign} \{ q(t) \}. \quad (7.91)$$

Функция  $q(t) = \lambda_1 \pi_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 \pi_2 e^{-\lambda_2 t}$  имеет не более одного нуля. Следовательно, в качестве возможных оптимальных управлений можно рассматривать четыре управляющих последовательности<sup>1</sup>

$$\{ +1 \}; \{ -1 \}; \{ +1, -1 \}; \{ -1, +1 \} \quad (7.92)$$

так как управление должно быть кусочно-постоянным, решим уравнение (7.85), полагая

$$u(t) = \Delta = \pm 1, \quad (7.93)$$

и получим решение

$$\begin{cases} x_1(t) = (\xi_1 + \Delta) e^{\lambda_1 t} - \Delta; \\ x_2(t) = (\xi_2 + \Delta) e^{\lambda_2 t} - \Delta. \end{cases} \quad (7.94)$$

Исключая  $t$  из уравнений (7.94) и полагая

$$\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad (7.95)$$

найдем

$$x_2(t) = -\Delta + (\xi_2 + \Delta) \left[ \frac{x_1(t) + \Delta}{\xi_1 + \Delta} \right]^\alpha. \quad (7.96)$$

В дальнейшем будем считать, что  $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ . Уравнение (7.96) описывает траекторию на фазовой плоскости  $x_1 x_2$ . Траектория начи-

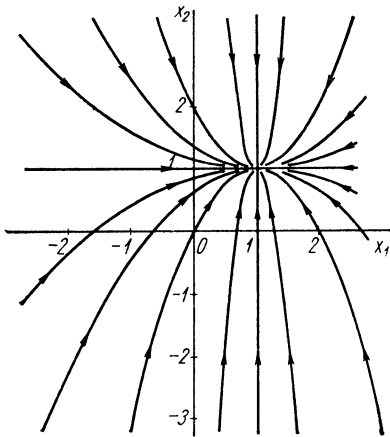


Рис. 7.11.  $-1$ -вынужденные траектории. С возрастанием  $t$  все траектории стремятся к состоянию  $(1, 1)$

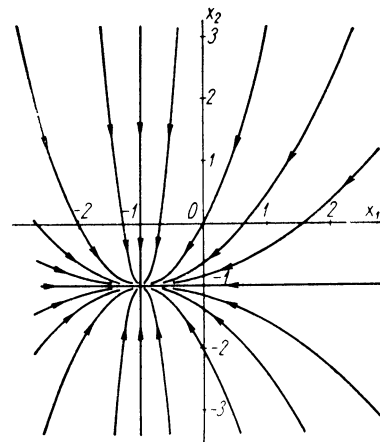


Рис. 7.12.  $+1$ -вынужденные траектории. С возрастанием  $t$  все траектории стремятся к состоянию  $(-1, -1)$

нается из состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  и продолжается под воздействием постоянного управления  $u(t) = \Delta$ . Если собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отрицательны, то траектории, производимые управлением  $u(t) = -1$ , которые мы будем называть  $-1$ -траекториями, стремятся к состоянию  $(1, 1)$  на фазовой плоскости. Траектории, производимые управлением  $u(t) = +1$ , которые мы будем называть  $+1$ -траекториями, стремятся к состоянию  $(-1, -1)$ .  $-1$ -траектории показаны на рис. 7.11, а  $+1$ -траектории показаны на рис. 7.12.

<sup>1</sup> См. также теорему 6.8.

Отметим мимоходом, что уравнение (7.96) не зависит<sup>1</sup> от коэффициента усиления  $K$ . Таким образом, характер вынужденных траекторий на фазовой плоскости зависит только от отношения  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ .

Перейдем теперь к решению оптимальной задачи. Читатель обнаружит, что этот подход очень похож на использованный ранее в § 7.2.

Так как начало координат фазовой плоскости является желаемым конечным состоянием и мы должны достичь его, используя управление  $u = +1$  или  $u = -1$ , то выделим две вынужденные траектории, проходящие через начало координат. Обозначим эти траектории через  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ . Более точно сформулируем следующее определение.

**Определение 7.7.** Кривая  $\gamma_+$  есть геометрическое место начальных состояний, которые могут быть переведены в  $(0, 0)$  управляющей последовательностью  $\{+1\}$ ; кривая  $\gamma_+$  выражается уравнением

$$\gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : -1 + (x_2 + 1) \left( \frac{1}{1 + x_1} \right)^\alpha = 0; \right. \\ \left. x_1 > 0; x_2 > 0 \right\}. \quad (7.97)$$

Кривая  $\gamma_-$  есть геометрическое место состояний, которые могут быть переведены в  $(0, 0)$  управляющей последовательностью  $\{-1\}$ . Кривая  $\gamma_-$  имеет вид

$$\gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : 1 + (x_2 - 1) \left( \frac{1}{1 - x_1} \right)^\alpha = 0; \right. \\ \left. x_1 < 0; x_2 < 0 \right\}. \quad (7.98)$$

Кривые  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  показаны на рис. 7.13.

Покажем теперь, что для любого состояния на кривой  $\gamma_+$  управляющая последовательность  $\{+1\}$  оптимальна по быстрдействию по отношению к началу координат. Выберем произвольное состояние на кривой и рассмотрим четыре управляющих последовательности (7.92). Исходя из вида вынужденных траекторий, показанных на рис. 7.11 и 7.12, можно сразу заключить, что только управляющая последовательность  $\{+1\}$  может перевести это состояние в начало координат. Следовательно, поставленную цель выполняет лишь последовательность  $\{+1\}$ , которая и должна быть оптимальным управлением. Аналогично можно доказать, что для любого начального состояния, принадлежащего кривой  $\gamma_-$ , оптимальным управлением, переводящим систему в начало координат, является последовательность  $\{-1\}$ . Итак, мы получим закон управления в виде:

$$\left. \begin{aligned} &\text{если } (x_1, x_2) \in \gamma_+, \text{ то } u^* = +1; \\ &\text{если } (x_1, x_2) \in \gamma_-, \text{ то } u^* = -1. \end{aligned} \right\} \quad (7.99)$$

**Определение 7.8.** Объединение кривых  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  будем называть линией переключения  $\gamma$ . Линия переключения имеет вид

$$\gamma = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \frac{x_1}{|x_1|} \left[ (1 + |x_1|)^\alpha - 1 \right] \right\}. \quad (7.100)$$

Это соотношение получено из уравнений (7.97) и (7.98).

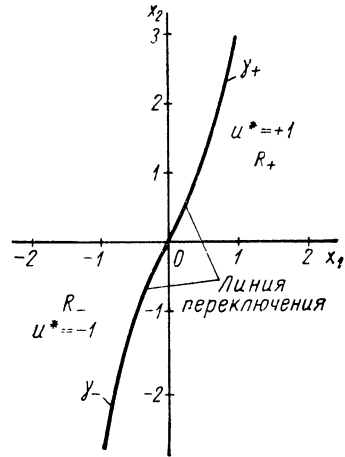


Рис. 7.13. Линия переключения для объекта, представляющего собой два аperiodических звена

<sup>1</sup> Это одна из причин того, что мы имеем дело с координатами  $x_1$  и  $x_2$ , которые, по сути дела, нормированы.

Обозначим через  $R_+$  множество состояний справа от кривой  $\gamma$ , а через  $R_-$  — слева от нее. Очевидно, что

$$R_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 < \frac{x_1}{|x_1|} [(1 + |x_1|)^\alpha - 1] \right\}; \quad (7.101)$$

$$R_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 > \frac{x_1}{|x_1|} [(1 + |x_1|)^\alpha - 1] \right\}. \quad (7.102)$$

Покажем теперь, что для любого состояния из  $R_+$  оптимальным управлением будет последовательность  $\{+1, -1\}$  при условии, что переключение с  $u = +1$  на  $u = -1$  происходит на кривой  $\gamma_-$ . Рассмотрим опять четыре управляющих последовательности  $\{+1\}$ ;  $\{-1\}$ ;  $\{+1; -1\}$  и  $\{-1; +1\}$ . Последовательности  $\{+1\}$  и  $\{-1\}$  дадут траектории, стре-

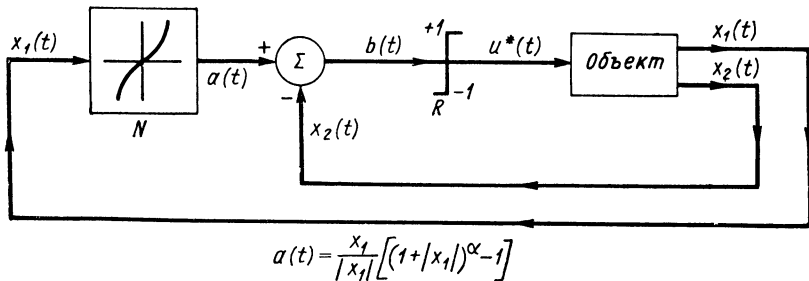


Рис. 7.14. Реализация оптимальной по быстродействию системы управления объектом, представляющим собой два апериодических звена

мящиеся к  $(1, 1)$  и  $(-1, -1)$  соответственно, минуя точку  $(0, 0)$ . Управляющая последовательность  $\{-1; +1\}$  даст траектории, не попадающие в начало координат. Среди траекторий, производимых последовательностью  $\{+1; -1\}$ , имеется только одна, проходящая через начало координат. Эта траектория получится в том и только в том случае, если мы будем прикладывать управление  $u = +1$  до тех пор, пока  $+1$ -траектория не пересечет кривой  $\gamma_-$ , и в этой точке мы должны приложить управление  $u = -1$ . Аналогично, для каждого состояния из  $R_-$  оптимальной управляющей последовательностью является  $\{-1; +1\}$  при условии, что переключение с  $u = -1$  на  $u = +1$  происходит на кривой  $\gamma_+$ . Подытожим результаты в виде следующего закона оптимального управления.

**Закон управления 7.4** (решение задачи 7.4). Оптимальное управление в зависимости от состояния  $(x_1, x_2)$  выражается в виде

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in \gamma_+ \cup R_+; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in \gamma_- \cup R_-, \end{aligned} \right\} \quad (7.103)$$

где  $\gamma_+$ ,  $R_+$ ,  $\gamma_-$ ,  $R_-$  определяются уравнениями (7.97), (7.101), (7.98) и (7.102) соответственно. Оптимальное управление единственно.

Блок-схема реализации этого закона управления показана на рис. 7.14. Фазовые координаты  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  измеряются (или вычисляются). Сигнал  $x_1(t)$  подается на нелинейность  $N$ , на выходе которой получается

$$a(t) = \frac{x_1}{|x_1|} [(1 + |x_1|)^\alpha - 1]. \quad (7.104)$$

Сигнал  $x_2(t)$  вычитается из  $a(t)$  для того, чтобы получить сигнал  $b(t) = a(t) - x_2(t)$ . Если  $b(t)$  положителен, то  $(x_1, x_2) \in R_+$ , а если  $b(t)$  отрицателен, то  $(x_1, x_2) \in R_-$ . Таким образом, сигнал имеет

правильную полярность, и его можно использовать для управления идеальным реле  $R$ , выходом которого является оптимальное управление  $u^*(t)$ .

Покажем теперь другое преимущество использования  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  в качестве фазовых координат. Напомним, что вначале мы определили переменные состояния  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  с помощью уравнения (7.74), т. е.

$$y_1(t) = y(t); \quad y_2(t) = \dot{y}(t) \quad (7.105)$$

Иначе говоря, в качестве фазовых координат можно использовать выход  $y(t)$  и его производную  $\dot{y}(t)$ . Из соотношений (7.80), (7.82) и (7.84) находим, что  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  связаны с  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  зависимостями

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{K} [-\lambda_1 \lambda_2 y_1(t) + \lambda_1 y_2(t)]; \\ x_2(t) &= \frac{1}{K} [-\lambda_1 \lambda_2 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.106)$$

На рис. 7.15 в виде блок-схемы показано линейное преобразование, необходимое для того, чтобы получить  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  из  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ .

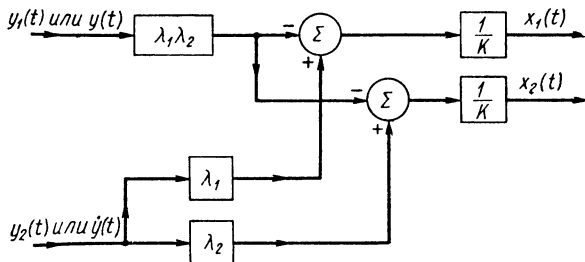


Рис. 7.15. Блок-схема линейного преобразования переменных  $y_1$  и  $y_2$  в переменные  $x_1$  и  $x_2$

Подставим теперь уравнение (7.106) в (7.100), чтобы получить уравнение линии переключения  $\hat{y}$  на плоскости  $y_1 y_2$ . Уравнение линии переключения будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K} (-\lambda_1 \lambda_2 y_1 + \lambda_2 y_2) = \\ & = \frac{\frac{1}{K} (-\lambda_1 \lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2)}{\left| \frac{1}{K} (-\lambda_1 \lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2) \right|} \times \left\{ \left[ 1 + \left| \frac{1}{K} (-\lambda_1 \lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2) \right| \right]^\alpha - 1 \right\}. \quad (7.107) \end{aligned}$$

Для произвольных значений  $\alpha$  из уравнения (7.107) невозможно получить функциональную зависимость между  $y_2$  и  $y_1$  в явном виде. Отсюда следует, что если мы измеряем состояние  $(y_1, y_2)$  и хотим узнать, находится ли оно на линии переключения, то мы не можем найти простую нелинейность, на которую можно было бы подать, например, сигнал  $y_1$  и сравнивать сигнал на ее выходе с  $y_2$ , чтобы решить, каким должно быть оптимальное управление.

Попытаемся теперь найти минимальное время  $t^*$ , требующееся для перевода начального состояния  $(x_1, x_2)$  в  $(0, 0)$  при использовании оптимального закона управления (7.103). Рассмотрим начальное состояние

$X = (x_1, x_2)$ , как показано на рис. 7.16, и оптимальную траекторию  $XWO$  к началу координат, где  $W = (\omega_1, \omega_2)$  находится на линии переключения  $\gamma$ . Пусть  $u = \Delta^* = \pm 1$  — управление, действующее на объект на траектории  $WO$ ;  $t_2$  — время движения от  $W$  до  $O$ ;  $t_1$  — время движения от  $X$  до  $W$ . Из уравнений (7.94) и (7.96) получаем:

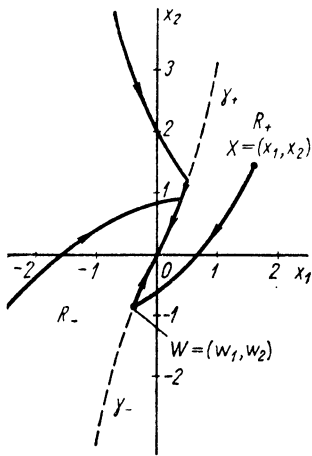


Рис. 7.16. Оптимальные траектории для объекта из двух аperiodических звеньев

$$t_2 = \frac{1}{\lambda_1} \log \frac{\Delta^*}{\omega_1 + \Delta^*} = \frac{1}{\lambda_2} \log \frac{\Delta^*}{\omega_2 + \Delta^*}; \quad (7.108)$$

$$0 = -\Delta^* + (\omega_2 + \Delta^*) \left( \frac{\Delta^*}{\omega_1 + \Delta^*} \right)^\alpha; \quad (7.109)$$

$$\Delta^* = -\text{sign} \{ \omega_1 \} = -\text{sign} \{ \omega_2 \}; \quad (7.110)$$

$$t_1 = \frac{1}{\lambda_1} \log \frac{\omega_1 - \Delta^*}{x_1 - \Delta^*} = \frac{1}{\lambda_2} \log \frac{\omega_2 - \Delta^*}{x_2 - \Delta^*}; \quad (7.111)$$

$$\omega_2 = \Delta^* + (x_2 - \Delta^*) \left( \frac{\omega_1 - \Delta^*}{x_1 - \Delta^*} \right)^\alpha, \quad (7.112)$$

так как на траектории  $XW$   $u = -\Delta^*$ . Общее время движения равно

$$t^* = t_1 + t_2. \quad (7.113)$$

Очевидно, что

$$t^* = \frac{1}{\lambda_1} \log \left( \frac{\Delta^*}{\omega_1 + \Delta^*} \frac{\omega_1 - \Delta^*}{x_1 - \Delta^*} \right). \quad (7.114)$$

Мы хотим выразить  $t^*$  только в функции от  $x_1$  и  $x_2$ , и поэтому должны исключить из соотношения (7.114)  $\omega_1$ . Используя уравнения (7.109) и (7.112), находим, что  $\omega_1$ ,  $x_1$  и  $x_2$  связаны соотношением

$$0 = -\Delta^* + \left[ 2\Delta^* + (x_2 - \Delta^*) \left( \frac{\omega_1 - \Delta^*}{x_1 - \Delta^*} \right)^\alpha \right] \left( \frac{\Delta^*}{\omega_1 + \Delta^*} \right)^\alpha. \quad (7.115)$$

К сожалению, для произвольных значений  $\alpha$  из уравнения (7.115) невозможно выразить  $\omega_1$  в виде явной функции  $x_1$  и  $x_2$  и поэтому нельзя получить выражения для  $t^*$  в замкнутой форме. Для конкретных значений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , а следовательно  $\alpha$ , величину  $t^*$  можно найти из соотношений (7.114) и (7.115) при помощи цифровой вычислительной машины.

**Упражнение 7.22.** Пусть  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ . Тогда  $\alpha = 2$  и уравнение (7.115) оканчивается квадратным уравнением. Выразите  $\omega_1$  через  $x_1$  и  $x_2$  и получите аналитическое выражение для  $t^*$ . Найдите уравнения минимальных изохрон (см. определение 7.6) и начертите минимальные изохроны для  $t^* = 0,5; 1,0; 1,5$  и  $2,0$ . Покажите, что выражение, полученное для  $t^*$ , является решением уравнения Гамильтона—Якоби.

**Упражнение 7.23.** Рассмотрите систему уравнений (7.85) с ограничением управления  $|u(t)| \leq 1$ , если задана область:

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, -\infty < x_2 < \infty\}.$$

Покажите, что управление

$$u = \text{sign} \{x_1\}$$

является оптимальным по отношению к  $S$ .

**Упражнение 7.24.** Рассмотрите задачу 7.4. Найдите связь между начальными значениями  $(\pi_1, \pi_2)$  и начальными условиями  $(\xi_1, \xi_2)$ . У к а з а н и е. См. упражнение 7.11.

**Упражнение 7.25.** В задаче 7.4 примем  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Найдите область начальных состояний  $\Psi$ , для которой оптимальное управление к началу координат существует. У к а з а н и е. См. § 6.8.

**Упражнение 7.26.** Повторите упражнение 7.25 для  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ .

**Упражнение 7.27.** Рассмотрите систему уравнений (7.85) при  $|u(t)| \leq 1$ . Пусть  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$  и  $(\theta_1, \theta_2)$  — заданное конечное состояние (необязательно начало координат). Найдите множество  $\Omega$  такое, что если  $(\theta_1, \theta_2) \in \Omega$ , то оптимальное управление к  $(\theta_1, \theta_2)$  существует для любого начального состояния  $(\xi_1, \xi_2)$ . Повторите это для

- $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = +1;$
- $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2.$

#### 7.4. УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ, ОПИСЫВАЕМЫМ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ИНТЕГРИРУЮЩИМИ И ОДНИМ АПЕРИОДИЧЕСКИМ ЗВЕНЬЯМИ

Исследуем теперь задачу управления объектом третьего порядка, который описывается передаточной функцией с двумя интегрирующими и одним аperiodическим звеньями. Мы разовьем методы, использованные в предыдущих параграфах, для того чтобы найти закон оптимального управления и реализовать его в виде оптимального управляющего устройства, которое окажется довольно сложным.

Рассмотрим систему третьего порядка, описываемую дифференциальным уравнением

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + a \frac{d^2y(t)}{dt^2} = Ku(t), \quad (7.116)$$

где  $y(t)$  — выход;

$K$  — коэффициент усиления и  $u(t)$  — управление.

Предположим, что управление  $u(t)$  ограничено по величине

$$|u(t)| \leq 1 \quad (7.117)$$

и постоянная  $a$  — действительное положительное число:

$$a > 0. \quad (7.118)$$

В теории автоматического регулирования говорят, что система (7.116) имеет передаточную функцию

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{K}{s^2(s+a)}. \quad (7.119)$$

Существует много физических систем, которые достаточно точно описываются передаточной функцией вида  $G(s) = \frac{K}{s^2(s+a)}$ . Например, такой передаточной функцией обладает двигатель с управлением по цепи возбуждения при постоянном токе якоря. В этой системе выход есть угловое перемещение, управление — напряжение возбуждения, постоянная  $a$  появляется из-за наличия индуктивности, а ограничение  $|u(t)| \leq 1$  является следствием насыщения усилителя входного напряжения. Другим примером является задача управления глубиной погружения торпеды, для которой передаточная функция  $G(s)$  является хорошей аппроксимацией динамики системы. В этой системе выходом является глубина, а управление — это угол отклонения руля глубины<sup>1</sup> (ограниченный механическими упорами).

Определим переменные  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  и  $y_3(t)$ , положив

$$y_1(t) = y(t); \quad y_2(t) = \dot{y}(t); \quad y_3(t) = \ddot{y}(t). \quad (7.120)$$

Эти переменные удовлетворяют векторному дифференциальному уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Ku(t) \end{bmatrix}, \quad (7.121)$$

которое можно более компактно записать в виде

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{u}(t). \quad (7.122)$$

<sup>1</sup> См. [181].

Собственными значениями матрицы  $\mathbf{A}$  размера  $3 \times 3$  являются  $0, 0, -a$ . Так как два из этих собственных значений одинаковы, то при помощи преобразования подобия эту матрицу можно записать в виде жордановой канонической формы<sup>1</sup>. Обозначив через  $\mathbf{J}(\mathbf{A})$  жорданову каноническую форму  $\mathbf{A}$ , запишем

$$\mathbf{J}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \quad (7.123)$$

Так как существует невырожденная матрица  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{a^2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.124)$$

и обратная ей

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.125)$$

то имеет место соотношение

$$\mathbf{J}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}. \quad (7.126)$$

Определим вектор-столбец  $\mathbf{z}(t)$ , положив

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}(t) \quad (7.127)$$

Очевидно, что  $\mathbf{z}(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{A})\mathbf{z}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}(t) \quad (7.128)$$

или, эквивалентно, системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) - \frac{K}{a^2} u(t); \\ \dot{z}_2(t) &= \frac{K}{a} u(t); \\ \dot{z}_3(t) &= -az_3(t) + Ku(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.129)$$

Для упрощения выражений в качестве фазовых координат  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$  примем

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{a^3}{K} z_1(t); \\ x_2(t) &= \frac{a^2}{K} z_2(t); \\ x_3(t) &= \frac{a}{K} z_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.130)$$

Эти переменные удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= ax_2(t) - au(t); \\ \dot{x}_2(t) &= au(t); \\ \dot{x}_3(t) &= -ax_3(t) + au(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.131)$$

<sup>1</sup> См. § 2.10.

В дальнейшем в данном параграфе мы будем пользоваться исключительно этими переменными. Рис. 7.17 иллюстрирует линейное преобразование, с помощью которого осуществляется преобразование переменных  $y_i$  в  $x_i$ .

Отметим, что если  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , то

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0. \quad (7.132)$$

Сформулируем задачу оптимального управления системой (7.131).

**Задача 7.5.** Дана система (7.131). Найти управление (удовлетворяющее ограничению  $|u(t)| \leq 1$ ), которое переводит произвольное начальное состояние  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  в начало координат  $(0, 0, 0)$  за минимальное время.

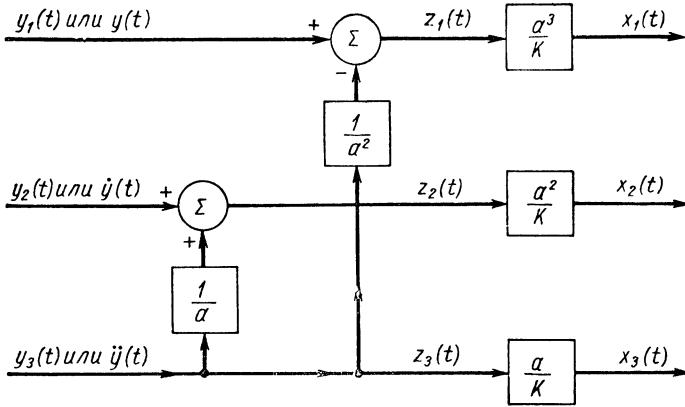


Рис. 7.17. Блок-схема линейных преобразований переменных  $y, \dot{y}$  и  $\ddot{y}$  в переменные  $x_1, x_2$  и  $x_3$

Заметим, что система (7.131) нормальна и оптимальное управление существует и единственно (почему?). Порядок, в котором мы будем решать эту задачу, будет тем же самым, что и в § 7.2 и 7.3.

Гамильтониан  $H$  для этой задачи (для системы 7.131) имеет вид

$$H = 1 + ax_2(t)p_1(t) - ax_3(t)p_3(t) + au(t)[-p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)]. \quad (7.133)$$

Так как  $a$  — положительная постоянная, управление, минимизирующее  $H$ , равно

$$u(t) = -\text{sign}\{-p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)\}. \quad (7.134)$$

Дополнительные переменные  $p_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  удовлетворяют системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = 0; \\ \dot{p}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -ap_1(t); \\ \dot{p}_3(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_3(t)} = ap_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.135)$$

Используя известное обозначение

$$\pi_i = p_i(0); \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.136)$$



решим уравнения (7.135) и получим

$$\left. \begin{aligned} p_1(t) &= \pi_1; \\ p_2(t) &= \pi_2 - a\pi_1 t; \\ p_3(t) &= \pi_3 e^{at}. \end{aligned} \right\} \quad (7.137)$$

Функция

$$-p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = -\pi_1 + \pi_2 - a\pi_1 t + \pi_3 e^{at} \quad (7.138)$$

может иметь не более двух нулей независимо от величины  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $\pi_3$ . Отсюда сразу же делаем вывод, что оптимальными могут быть шесть управляющих последовательностей

$$\left. \begin{aligned} &\{+1\}; \{-1\}; \{+1, -1\}; \{-1, +1\}; \\ &\{+1, -1, +1\}; \{-1, +1, -1\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.139)$$

Далее решим уравнение (7.131), полагая

$$u(t) = \Delta = \pm 1. \quad (7.140)$$

Получается решение:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \xi_1 + \xi_2 at + \frac{1}{2} \Delta a^2 t^2 - \Delta at; \\ x_2(t) &= \xi_2 + \Delta at; \\ x_3(t) &= (\xi_3 - \Delta) e^{-at} + \Delta, \end{aligned} \right\} \quad (7.141)$$

где, как обычно,

$$\xi_i = x_i(0), \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.142)$$

Исключая  $t$  из уравнений (7.141), получим

$$x_1 = \xi_1 - (x_2 - \xi_2) + \frac{1}{2} \Delta (x_2^2 - \xi_2^2); \quad (7.143)$$

$$x_3 = (\xi_3 - \Delta) e^{-\Delta(x_2 - \xi_2)} + \Delta. \quad (7.144)$$

Эти два уравнения определяют траекторию в трехмерном пространстве состояний (фазовом пространстве), исходящую из  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  под воздействием управления  $u = \Delta$ . Уравнение (7.143) выражает проекцию траектории на плоскость  $x_1 x_2$ , а (7.144) — на плоскость  $x_2 x_3$ . Отметим, что траектории не зависят от величины  $a$ <sup>1</sup>. На рис. 7.18 показаны кривые, соответствующие уравнению (7.143); сплошные кривые соответствуют  $\Delta = +1$ , штриховые  $\Delta = -1$ . На рис. 7.19 показаны кривые, соответствующие уравнению (7.144); сплошные кривые для  $\Delta = +1$ , штриховые — для  $\Delta = -1$ .

Рассмотрим две траектории, проходящие через начало координат  $(0, 0, 0)$  трехмерного фазового пространства. Одна из этих траекторий получается при  $u = \Delta = +1$  (назовем ее конечной  $+1$ -траекторией), другая (конечная  $-1$ -траектория) при  $u = \Delta = -1$ . Теперь сформулируем определение.

**Определение 7.9.** Обозначим через  $\{V_2^+\}$  множество состояний  $(x_1, x_2, x_3)$ , которые переводятся в  $(0, 0, 0)$  управляющей последовательностью  $\{+1\}$ . Множество  $\{V_2^+\}$  есть конечная  $+1$ -траектория, которая определяется как

$$\{V_2^+\} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 - x_2, x_3 = 1 - e^{-x_2}, x_2 < 0 \right\}. \quad (7.145)$$

<sup>1</sup> Это обстоятельство является причиной выбора  $x_i$  в качестве фазовых координат.

**Определение 7.10.** Обозначим через  $\{V_2^-\}$  множество состояний  $(x_1, x_2, x_3)$ , которые переводятся в  $(0, 0, 0)$  управляющей последовательностью  $\{-1\}$ .

Множество  $\{V_2^-\}$  есть конечная  $-1$ -траектория, которая определяется как

$$\{V_2^-\} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 - x_2, x_3 = -1 + e^{x_2}, x_2 \geq 0 \right\}. \quad (7.146)$$

**Определение 7.11.** Обозначим через  $\{V_2\}$  сумму  $\{V_2^+\}$  и  $\{V_2^-\}$ . Для

$$\Delta^* = -\text{sign} \{x_2\} \quad (7.147)$$

найдем, что

$$\begin{aligned} \{V_2\} &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 = \frac{1}{2} \Delta^* x_2^2 - x_2, x_3 = \Delta^* - \Delta^* e^{-\Delta^* x_2} \right\} = \\ &= \{V_2^+\} \cup \{V_2^-\}. \end{aligned} \quad (7.148)$$

Из предыдущих определений следует, что  $\{V_2\}$  есть кривая в фазовом пространстве такая, что любое состояние из  $\{V_2\}$  может быть переведено в начало координат при помощи управления

$$u = \Delta^* = -\text{sign} \{x_2\}. \quad (7.149)$$

Проекции  $\{V_2\}$  на плоскости  $x_1 x_2$  и  $x_2 x_3$  показаны на рис. 7.20 и 7.21 соответственно.

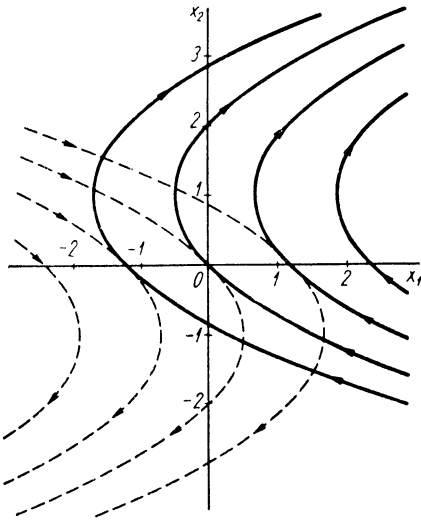


Рис. 7.18. Проекция вынужденных траекторий на плоскость  $x_1, x_2$ ; сплошные траектории соответствуют  $u = +1$ , пунктирные  $u = -1$ . Стрелками показано направление движения состояния при положительном времени

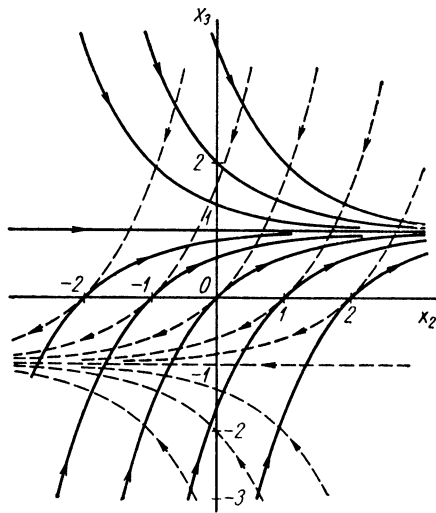


Рис. 7.19. Проекция вынужденных траекторий на плоскость  $x_2, x_3$ . Сплошные кривые соответствуют  $u = +1$ , пунктирные  $u = -1$ . Стрелками показано направление движения состояния при положительном времени

Рассмотрим множество состояний, которые можно перевести в начало координат управляющей последовательностью  $\{-1, +1\}$ . Очевидно, что переключение управления с  $u = -1$  на  $u = +1$  должно произойти на множестве  $\{V_2^+\}$  [так как  $\{V_2^+\}$  — множество всех состояний, которые могут быть переведены в начало координат  $(0, 0, 0)$  управлением  $u = +1$ ]. Если состояние  $(x_1, x_2, x_3)$  можно перевести в начало координат

управляющей последовательностью  $\{-1, +1\}$ , то существует состояние  $(x_{12}, x_{22}, x_{32}) \in \{V_2^+\}$  такое, когда состояние  $(x_1, x_2, x_3)$  лежит на траектории, получающейся под воздействием управления  $u = -1$  и заканчивающейся в точке  $(x_{12}, x_{22}, x_{32}) \in \{V_2^+\}$ . Обобщим эти рассуждения в виде следующего определения.

**Определение 7.12.** Обозначим через  $\{V_1\}$  множество состояний  $(x_1,$

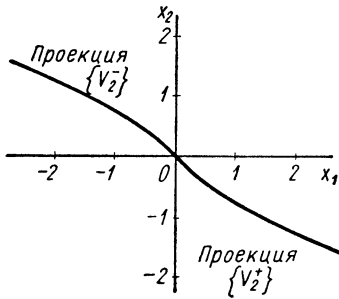


Рис. 7.20. Проекция множества (кривой)  $\{V_2\}$  на плоскость  $x_1, x_2$

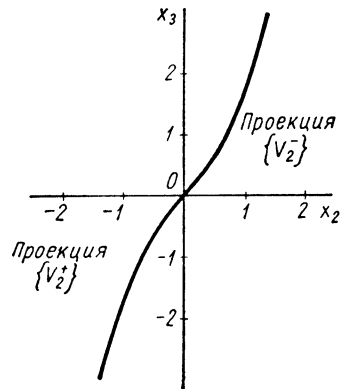


Рис. 7.21. Проекция множества (кривой)  $\{V_3\}$  на плоскость  $x_2, x_3$

$x_2, x_3$ ), которые могут быть переведены в начало координат управляющей последовательностью  $\{-\Delta^*, \Delta^*\}$ . Состояние  $(x_1, x_2, x_3) \in \{V_1\}$  в том и только в том случае, если

$$x_{12} = x_1 - (x_{22} - x_2) - \frac{1}{2} \Delta^* (x_{22}^2 - x_2^2); \quad (7.150)$$

$$x_{32} = (x_3 + \Delta^*) e^{\Delta^* (x_{22} - x_2)} - \Delta^*, \quad (7.151)$$

где

$$(x_{12}, x_{22}, x_{32}) \in \{V_2\}, \quad (7.152)$$

т. е. [см. уравнение (7.149)]

$$x_{12} = \frac{1}{2} \Delta^* x_{22}^2 - x_{22}; \quad (7.153)$$

$$x_{32} = \Delta^* - \Delta^* e^{-\Delta^* x_{22}} \quad (7.154)$$

и

$$\Delta^* = -\text{sign} \{x_{22}\}. \quad (7.155)$$

Отметим, что состояния, принадлежащие к множеству  $\{V_1\}$ , определены в параметрической форме через состояния  $(x_{12}, x_{22}, x_{32})$  из  $\{V_2\}$ . Можно исключить  $x_{12}, x_{22}, x_{32}$  из уравнений (7.150)–(7.154) и получить соотношение, связывающее  $x_1, x_2$  и  $x_3$ . Из уравнений (7.150) и (7.153) находим

$$x_{22} = \pm \left[ \frac{x_2^2}{2} + \Delta^* (x_1 + x_2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7.156)$$

Чтобы исключить произвол в выборе знака, используем уравнение (7.155) и запишем выражение (7.156) в виде

$$x_{22} = -\Delta^* \left[ \frac{x_2^2}{2} + \Delta^* (x_1 + x_2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7.157)$$

Из соотношений (7.151) и (7.154) заключаем, что

$$x_3 = -\Delta^* + \Delta^* e^{-\Delta^* (x_{22} - x_2)} (2 - e^{-\Delta^* x_{22}}). \quad (7.158)$$

Подставив выражение (7.157) в формулу (7.158), получаем соотношение

$$x_3 = -\Delta^* + \Delta^* \exp \left\{ \Delta^* x_2 + \left[ \frac{x_2^2}{2} + \Delta^* (x_1 + x_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \times \\ \times \left( 2 - \exp \left\{ \left[ \frac{x_2^2}{2} + \Delta^* (x_1 + x_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right). \quad (7.159)$$

Это соотношение устанавливает связь между переменными  $x_1, x_2, x_3$ , где  $(x_1, x_2, x_3) \in \{V_1\}$  и  $\Delta^* = \pm 1$ . Остается определить  $\Delta^*$  как функцию от  $x_1, x_2$  и  $x_3$ . На рис. 7.22 показана проекция  $\{V_2\}$  на плоскость  $x_1 x_2$ . Уравнение проекции имеет вид

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{sign}\{x_2\} x_2^2 - x_2. \quad (7.160)$$

Из рис. 7.22 видно, что траектории, принадлежащие к  $\{V_1\}$  и заканчивающиеся в точках  $\{V_2^+\}$ , получаются при  $\Delta^* = +1$ . Траектории, принадлежащие к  $\{V_1\}$  и заканчивающиеся в точках из  $\{V_2^-\}$ , получаются при  $\Delta^* = -1$ . Это означает, что если состояние  $(x_1, x_2, x_3)$  принадлежит к  $\{V_1\}$  и две координаты  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяют соотношению



Рис. 7.22. Проекция траекторий, принадлежащих к  $\{V_1\}$  на плоскость  $x_1, x_2$

$$x_1 > -\frac{1}{2} \text{sign}\{x_2\} x_2^2 - x_2, \quad (7.161)$$

то  $\Delta^* = +1$ . Если же координаты  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяют соотношению

$$x_1 < -\frac{1}{2} \text{sign}\{x_2\} x_2^2 - x_2, \quad (7.162)$$

то  $\Delta^* = -1$ .

Следовательно,

$$\Delta^* = \text{sign} \left\{ x_1 + \frac{1}{2} \text{sign}\{x_2\} x_2^2 + x_2 \right\}. \quad (7.163)$$

Итак, мы нашли выражение для  $\Delta^*$  через  $x_1$  и  $x_2$ . Если подставить уравнение (7.163) в соотношение (7.159), то получится уравнение, выражающее  $x_3$  в виде явной функции от  $x_1$  и  $x_2$ .

В уравнении (7.159) появляются члены вида

$$\sqrt{\frac{x_2^2}{2} + \Delta^* (x_1 + x_2)}. \quad (7.164)$$

Так как переменные  $x_1, x_2$  и  $x_3$  должны быть действительными величинами, используя соотношение (7.163), получаем условие

$$\frac{x_2^2}{2} + \text{sign} \left\{ x_1 + \frac{1}{2} \text{sign}\{x_2\} x_2^2 + x_2 \right\} (x_1 + x_2) \geq 0. \quad (7.165)$$

\*

**Упражнение 7.28.** Покажите, что уравнение (7.165) удовлетворяется для всех  $x_1$  и  $x_2$ . Указание: исследуйте знаки функций  $\frac{x_2^2}{2} + (x_1 + x_2)$  и  $\frac{x_2^2}{2} - (x_1 + x_2)$  на плоскости  $x_1, x_2$ .

В заключение сформулируем полученные выше результаты. Если переменные  $x_1, x_2$  и  $x_3$  удовлетворяют уравнениям (7.159) и (7.163), то  $(x_1, x_2, x_3) \in \{V_1\}$ . Множество  $\{V_1\}$  есть поверхность<sup>1</sup> в трехмерном фазовом пространстве. Легко показать, что эта поверхность обладает следующими свойствами:

1.  $0 \subset \{V_2\} \subset \{V_1\}$ .
2.  $\{V_1\}$  гладкая, непрерывная, действительная.
3.  $\{V_1\}$  однозначна; каждой паре  $(x_1, x_2)$  соответствует только одно  $x_3$ , при котором  $(x_1, x_2, x_3) \in \{V_1\}$ .
4.  $\{V_1\}$  симметрична относительно начала координат фазового пространства.
5. Поверхность  $\{V_1\}$  разделяет фазовое пространство на две части. Последним свойством мы воспользуемся при выработке стратегии управления для систем, оптимальных по быстродействию.

Условимся обозначать через  $\mathbf{x}_1 = \{x_{11}, x_{21}, x_{31}\}$  состояние, принадлежащее  $\{V_1\}$ . Очевидно, что если  $(x_{11}, x_{21}, x_{31}) \in \{V_1\}$ , то

$$x_{31} = -\Delta^* + \Delta^* \exp \left\{ \Delta^* x_{21} + \left[ \frac{x_{21}^2}{2} + \Delta^* (x_{11} + x_{21}) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \times \\ \times \left( 2 - \exp \left\{ \left[ \frac{x_{21}^2}{2} + \Delta^* (x_{11} + x_{21}) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right), \quad (7.166)$$

где

$$\Delta^* = \text{sign} \left\{ x_{11} + \frac{1}{2} \text{sign} \{x_{21}\} x_{21}^2 + x_{21} \right\}. \quad (7.167)$$

Выберем произвольное состояние  $(x_1, x_2, x_3)$  и проведем через него прямую, параллельную  $x_3$ . Эта прямая пересечет поверхность  $\{V_1\}$  в точке  $(x_{11}, x_{21}, x_{31})$ , причем  $x_{11} = x_1$  и  $x_{21} = x_2$ . Координата  $x_{31}$  определяется уравнениями (7.166) и (7.167). Этот случай показан на рис. 7.23. Если

$$x_3 - x_{31} > 0, \quad (7.168)$$

то будем говорить, что точка  $(x_1, x_2, x_3)$  расположена выше поверхности  $\{V_1\}$ , а при

$$x_3 - x_{31} < 0 \quad (7.169)$$

будем говорить, что точка  $(x_1, x_2, x_3)$  расположена ниже поверхности  $\{V_1\}$ . Если

$$x_3 - x_{31} = 0, \quad (7.170)$$

Рис. 7.23. Проекция состояния  $(x_1, x_2, x_3)$  на поверхность  $\{V_1\}$

то  $(x_1, x_2, x_3)$  принадлежит  $\{V_1\}$ . Рассмотрим состояния, которые не принадлежат поверхности  $\{V_1\}$ . Предположим, что нам задано состояние  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  выше поверхности  $\{V_1\}$ . В состоянии  $\mathbf{x}$  мы можем выбрать одно из двух управлений  $u = +1$  или  $u = -1$ . Легко убедиться,

<sup>1</sup> Эту поверхность часто называют поверхностью переключения.

что траектория, получающаяся при приложении  $u = +1$ , никогда не пересечет поверхности  $\{V_1\}$ , тогда как траектория, получающаяся при  $u = -1$ , пересекает  $\{V_1\}$ . Аналогично, если  $x$  лежит ниже  $\{V_1\}$ , то траектория при  $u = +1$  пересекает  $\{V_1\}$ , а при  $u = -1$  — нет.

Из этого можно сделать вывод: управляющая последовательность  $\{-1, +1, -1\}$  переводит в начало координат состояния, расположенные выше  $\{V_1\}$ , а последовательность  $\{+1, -1, +1\}$  — состояния, расположенные ниже поверхности  $\{V_1\}$ . Заметим, что обе последовательности  $\{+1, -1, +1\}$  и  $\{-1, +1, -1\}$  могут оказаться оптимальными управлениями [см. последовательности (7.139)].

Найдем теперь оптимальную по быстродействию управляющую последовательность для каждого из состояний фазового пространства. Методы, которые мы будем использовать, аналогичны методам двух предыдущих параграфов. Рассмотрим шесть последовательностей (7.139) и покажем, что существует только одна управляющая последовательность, переводящая данное начальное состояние в начало координат. Таким образом, мы докажем оптимальность управления методом исключения.

Рассмотрим состояние  $X$  на кривой  $\{V_2^+\}$  (определение 7.9). По этому определению управляющая последовательность  $\{+1\}$  переводит  $X$  в начало координат. Посмотрим, что произойдет, если мы будем использовать последовательности  $\{-1\}$ ,  $\{-1, +1\}$  или  $\{-1, +1, -1\}$ . Прикладывая вначале  $u = -1$ , мы получим вынужденную  $-1$ -траекторию. Если  $Y$  — произвольная точка на этой траектории, то легко показать, что точка  $Y$  лежит ниже поверхности  $\{V_1\}$ . Но мы показали, что если точка  $Y$  лежит ниже  $\{V_1\}$ , то для перевода этого состояния (т. е.  $Y$ ) в начало координат надо прикладывать управляющую последовательность  $\{+1, -1, +1\}$ . Следовательно, если мы начали с того, что приложили управление  $u = -1$ , то управляющей последовательностью, которая переведет  $X$  в начало координат, будет  $\{-1, +1, -1, +1\}$ . Очевидно, эта последовательность не оптимальна, и поэтому управляющие последовательности  $\{-1\}$ ,  $\{-1, +1\}$  и  $\{-1, +1, -1\}$  не могут быть оптимальными по быстродействию. Рассмотрим теперь две оставшиеся последовательности  $\{+1, -1\}$  и  $\{+1, -1, +1\}$ . Управление  $u = +1$  переводит  $X$  в  $X'$ , причем  $X' \in \{V_2^+\}$ . В точке  $X'$  управление переключается на  $u = -1$ , и получается вынужденная  $-1$ -траектория. Если  $Y'$  — произвольная точка на этой траектории, то  $Y'$  лежит ниже поверхности  $\{V_1\}$ . Используя те же аргументы, можно показать, что управляющие последовательности  $\{+1, -1\}$  и  $\{+1, -1, +1\}$  не могут перевести  $X$  в начало координат. Таким образом, рассуждая методом исключения, приходим к выводу<sup>1</sup>:

Если состояние принадлежит к  $\{V_2^+\}$ , то  $u = +1$  является оптимальным по быстродействию управлением.

Аналогично можно показать, что если состояние принадлежит к  $\{V_2^-\}$ , то оптимальным является управление  $u = -1$ . Подытожим эти выводы, сформулировав закон управления.

**Закон управления 7.5а.** Если  $(x_1, x_2, x_3) \in \{V_2\}$ , где  $\{V_2\}$  соответствует определению 7.11, то  $u^* = \Delta^*$  есть оптимальное управление. Отметим, что на линии  $\{V_2\}$ ,  $\Delta^*$  определяется уравнением (7.147).

Рассмотрим далее состояние  $X$  на поверхности  $\{V_1\}$ . Для определенности предположим, что для данного конкретного состояния  $\Delta^* = +1$  [уравнение (7.163)]. Тогда оптимальной управляющей последовательностью будет  $\{-1, +1\}$ . В самом деле, управляющая последовательность

<sup>1</sup> Этого доказательства можно избежать, воспользовавшись единственностью экстремальных управлений (см. теорему 6.9). Мы выбрали геометрическое доказательство для того, чтобы читатель смог лучше разобраться во всех связанных с этим вопросом понятиях.

$\{-1, +1\}$  переводит  $X$  в  $(0, 0, 0)$  по определению. Управляющие последовательности  $\{+1\}$  и  $\{-1\}$  дают траектории, не проходящие через начало координат. Последовательность  $\{+1, -1\}$  не может перевести  $X$  в начало координат, так как это противоречит предположению о том, что  $\Delta^* = +1$ . Управляющая последовательность  $\{+1, -1, +1\}$  при  $u = +1$  переводит  $X$  в состояние  $Y$  выше поверхности  $\{V_1\}$ . Наконец, управляющая последовательность  $\{-1, +1, -1\}$  противоречит предположению  $\Delta^* = +1$ . Пользуясь, как и ранее, методом исключения, мы доказали, что оптимальной должна быть последовательность  $\{-1, +1\}$  если переключение с  $u = -1$  на  $u = +1$  происходит на кривой  $\{V_2\}$ . Обобщим все это в виде следующих законов управления.

**Закон управления 7.5б.** Если  $(x_1, x_2, x_3) \in \{V_1\}$  (см. определение 7.12), то  $u^* = -\Delta^*$  является оптимальным по быстродействию управлением.  $\Delta^*$  определяется уравнением (7.163).

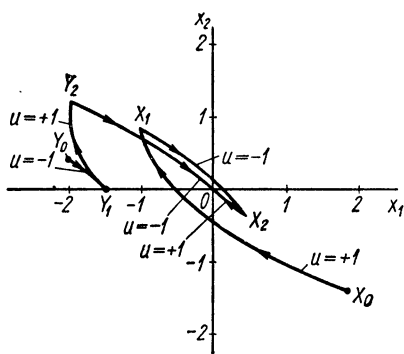


Рис. 7.24. Проекция оптимальных по быстродействию траекторий на плоскость  $x_1, x_2$

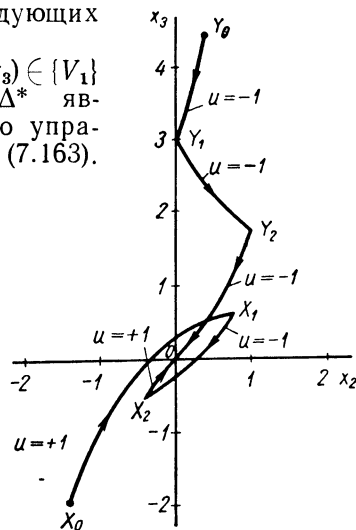


Рис. 7.25. Проекция оптимальных по быстродействию траекторий на плоскость  $x_2, x_3$

**Закон управления 7.5в.** Если состояние  $(x_1, x_2, x_3)$  расположено над поверхностью  $\{V_1\}$ , то  $u^* = -1$  является оптимальным управлением. Если состояние  $(x_1, x_2, x_3)$  расположено под поверхностью  $\{V_1\}$ , то оптимально управление  $u^* = +1$ .

Таким образом, порядок действий должен быть следующим. Предположим, что состояние расположено выше поверхности  $\{V_1\}$ ; в этом случае управление  $u = -1$  дает траекторию, которая пересечет  $\{V_1\}$ , скажем, в точке  $(x_{11}, x_{21}, x_{31})$ . В этот момент управление переключается с  $u = -1$  на  $u = +1$ . Далее траектория будет расположена на поверхности  $\{V_1\}$  и пересечет  $\{V_2\}$  в точке  $(x_{12}, x_{22}, x_{32})$ . Если в этот момент управление переключится с  $u = +1$  на  $u = -1$ , то траектория пойдет вдоль  $\{V_1\}$ , пока не попадет в начало координат. Можно проверить, что в точке  $(x_{11}, x_{21}, x_{31})$  величина  $\Delta^*$  равна  $-1$  и в  $(x_{12}, x_{22}, x_{32})$  снова  $\Delta^* = -1$ . На рис. 7.24 и 7.25 показаны проекции некоторых оптимальных траекторий.

Так как законы управления 7.5а—7.5в дают оптимальное по быстродействию управление для любого состояния  $(x_1, x_2, x_3)$ , можно спроектировать систему, которая будет автоматически обеспечивать оптимальное управление объектом. Схема должна определить, находится ли точка  $(x_1, x_2, x_3)$  выше или ниже поверхности  $\{V_1\}$ . Для этого вычисляется проекция  $(x_1, x_2, x_3)$  на поверхность  $\{V_1\}$  (см. рис. 7.23). Таким образом, вычисляется состояние  $(x_1, x_2, x_{31}) \in \{V_1\}$ , и разность

$$m(t) = x_3 - x_{31} \quad (7.171)$$

управляет идеальным реле, выход которого является оптимальным управлением  $u(t)$ . Полная блок-схема оптимальной по быстродействию системы показана на рис. 7.26. Фазовые координаты  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  измеряются, например, при помощи устройства, показанного на рис. 7.17. Координаты  $x_1$  и  $x_2$  используются для определения  $\Delta^*$ , которое, согласно соотношению (7.163), выражается как

$$\Delta^* = \text{sign} \{a\} = \text{sign} \left\{ x_1 + x_2 + \frac{1}{2} x_2 |x_2| \right\}. \quad (7.172)^1$$

Чтобы получить  $\Delta^*$ , сигнал  $x_2$  пропускается через нелинейность  $N_1$ , выход которой равен  $\frac{1}{2} x_2 |x_2|$ . Реле  $R_1$  выполняет операцию  $\text{sign}$  над сигналом  $a$ . Сигнал  $b$  в соответствии с уравнением

$$b = \frac{1}{2} x_2^2 + \Delta^* (x_1 + x_2) \quad (7.173)$$

получается в результате пропускания  $x_2$  через квадратичную нелинейность  $N_2$ , выход которой равен  $\frac{1}{2} x_2^2$ , и суммирования результата с сигналом

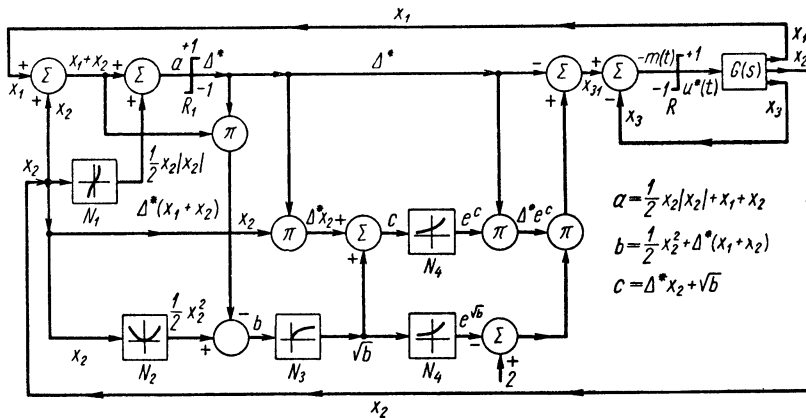


Рис. 7.26. Оптимальная по быстродействию система управления объектом с передаточной функцией  $G(s) = \frac{K}{s^2(s+a)}$

лом  $\Delta^* (x_1 + x_2)$ . Сигнал  $b$  затем подается на нелинейность  $N_3$ , после которой получается сигнал, пропорциональный  $\sqrt{b}$ . Два нелинейных элемента  $N_4$  имеют экспоненциальную зависимость выхода от входа. Таким образом, подвергая сигналы  $x_1$  и  $x_2$  многократным линейным и нелинейным алгебраическим преобразованиям, можно получить сигнал  $x_{31}$ . Сравнение  $x_{31}$  с измеренным сигналом  $x_3$  дает сигнал  $-m(t)$  [см. уравнение (7.171)]. Реле  $R$  выполняет над сигналом  $-m(t)$  операцию  $\text{sign}$ , и на его выходе получается сигнал, являющийся оптимальным управлением  $u^*(t)$ , который и используется для управления системой  $G(s)$ .

Система, показанная на рис. 7.26, довольно сложна. Полезно сравнить ее со схемами, показанными на рис. 7.5 и 7.14, чтобы оценить сложность оптимальной системы третьего порядка по сравнению с системами второго порядка. Для этой системы оказалось возможным получить уравнение

<sup>1</sup> Так как  $\frac{1}{2} \text{sign} \{x_2\} x_2^2 = \frac{1}{2} x_2 |x_2|$ .



поверхности  $\{V_1\}$  в явном виде и спроектировать аналоговый нелинейный регулятор. Как мы увидим далее, явное выражение для  $\{V_1\}$  можно получить далеко не всегда.

В литературе по управлению поверхность  $\{V_1\}$  часто называют поверхностью переключения, так как реле переключается тогда, когда состояние системы достигает поверхности  $\{V_1\}$ . Если построить или промоделировать систему, показанную на рис. 7.26, то неизбежные шумы и неидеальность оборудования приведут к тому, что реле будет переключаться чуть-чуть выше или ниже поверхности переключения, и поэтому действительный переходный процесс системы будет только близок к теоретическому. Следовательно, в реальной системе может существовать предельный цикл вокруг начала координат, параметры которого будут зависеть от величины отклонений характеристик реального оборудования от идеализированных теоретических.

Наконец, эта техническая реализация просто моделирует поверхность переключения  $\{V_1\}$ , и если все компоненты идеальны, то как только состояние системы окажется на поверхности  $\{V_1\}$ , сигнал  $m(t)$  будет равен нулю. Таким образом, если все компоненты идеальны, то необходимо добавить блок, который вырабатывает оптимальное управление при  $x \in \{V_1\}$ , и еще один, дающий оптимальное управление, когда  $x \in \{V_2\}$ . Однако из-за неидеальности оборудования состояние не может все время оставаться ни в  $\{V_1\}$ , ни в  $\{V_2\}$ . Таким образом, любая реализация будет лишь близка к оптимальной, и действительные траектории будут только близки к поверхности переключения.

В следующем параграфе мы распространим идеи данного параграфа на системы с произвольным числом действительных полюсов.

**Упражнение 7.29.** Рассмотрите объект с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{s^3}, \quad (7.174)$$

который можно представить в фазовом пространстве в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) &= u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.175)$$

Управление удовлетворяет ограничению

$$|u(t)| \leq 1. \quad (7.176)$$

Следуя методике настоящего параграфа, найдите оптимальное по быстродействию управление, переводящее систему в начало координат.

**Упражнение 7.30.** Рассмотрите неустойчивую систему<sup>1</sup> с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}, \quad (7.177)$$

которую можно представить в фазовом пространстве в виде [см. уравнения (7.131)]

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -u(t); \\ \dot{x}_3(t) &= x_3(t) - u(t), \end{aligned} \right\} \quad (7.178)$$

где управление  $u(t)$  ограничено по величине:

$$|u(t)| \leq 1. \quad (7.179)$$

Найдите множество начальных состояний, для которых существует оптимальное управление, переводящее систему в начало координат (0, 0, 0). Найдите оптимальный по быстродействию закон управления.

<sup>1</sup> См. § 3.26.

## 7.5. УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ, ИМЕЮЩИМ ПЕРЕДАТОЧНУЮ ФУНКЦИЮ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ПОЛЮСАМИ <sup>1</sup>

Мы продемонстрировали различные способы синтеза оптимального по быстродействию управления для систем второго и третьего порядка. Теперь рассмотрим оптимальное управление объектом с  $N$  действительными полюсами. Исследуем систему  $N$ -го порядка, которая описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^N u(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = K \cdot u(t), \quad (7.180)$$

где  $y(t)$  — выход системы;  $K$  — коэффициент усиления и  $u(t)$  — управление. Предположим, что управление ограничено по величине:

$$|u(t)| \leq 1. \quad (7.181)$$

В теории автоматического регулирования говорят, что система (7.180) имеет передаточную функцию

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{K}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (7.182)$$

Будем считать, что  $G(s)$  имеет  $N$  различных действительных отрицательных полюсов и может быть записана в виде

$$G(s) = \frac{K}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_N)}, \quad (7.183)$$

где  $s_i$  — действительные числа и

$$0 < s_1 < s_2 < \dots < s_N. \quad (7.184)$$

Мы рассматривали сведение системы  $N$ -го порядка вида (7.180) к системе  $N$  уравнений первого порядка в § 3.24. Предположим, что это преобразование выполнено, а также выполнено преобразование подобия, и система с передаточной функцией (7.183) приведена к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= -s_1 z_1(t) + r_1 u(t); \\ \dot{z}_2(t) &= -s_2 z_2(t) + r_2 u(t); \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{z}_N(t) &= -s_N z_N(t) + r_N u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.185)$$

Переменные  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ , ...,  $z_N(t)$  являются линейными комбинациями  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ , ...,  $y^{(N-1)}(t)$ , а постоянные  $r_1$ , ...,  $r_N$  зависят от  $s_i$  и  $K$ . Введем новые переменные  $x_1$ ,  $x_2$ , ...,  $x_N$ , приняв

$$x_i(t) = z_i(t) \frac{s_i}{r_i}; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.186)$$

Новые переменные удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\dot{x}_i(t) = -s_i x_i(t) + s_i u(t); \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.187)$$

В дальнейшем в данном параграфе мы будем пользоваться исключительно этими переменными.

Рассмотрим задачу.

**Задача 7.6.** Дана система уравнений (7.187), требуется найти допустимое управление, переводящее любое начальное состояние  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$  в начало координат  $(0, 0, \dots, 0)$  за минимальное время.

<sup>1</sup> Материал данного параграфа основан на работах [1], [2], [197] и [144].

Основная идея решения этой задачи состоит в том, чтобы распространить способы, рассмотренные в предыдущем параграфе, с трехмерного на  $N$ -мерное пространство. Обозначим через  $\Delta^*$  величину оптимального управления на последнем участке траектории и определим ряд множеств  $\{V_{N-1}\}, \{V_{N-2}\}, \dots, \{V_1\}$ , которые представляют собой геометрические места точек фазового пространства, обладающие тем свойством, что управление должно переключаться с  $+1$  на  $-1$  (или с  $-1$  на  $+1$ ), если траектория пересекает любое из этих множеств  $\{V_{N-1}\}, \{V_{N-2}\}, \dots, \{V_1\}$ . Множество  $\{V_1\}$  окажется гиперповерхностью, и мы найдем параметрическую систему уравнений, которые ее определяют. Основной целью данного параграфа является изложение порядка действий, которые должна выполнять оптимальная по быстродействию управляющая система с обратной связью.

Гамильтониан  $H$  для оптимального по быстродействию управления системой [уравнение (7.187)] имеет вид

$$H = 1 - \sum_{i=1}^N s_i x_i(t) p_i(t) + u(t) \sum_{i=1}^N s_i p_i(t). \quad (7.188)$$

Управление, минимизирующее абсолютно гамильтониан  $H$ , определяется выражением:

$$u(t) = -\operatorname{sign} \left\{ \sum_{i=1}^N s_i p_i(t) \right\}. \quad (7.189)$$

Дополнительные переменные  $p_i(t)$  являются решениями уравнений

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i(t)} = s_i p_i(t) \quad (7.190)$$

для  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Следовательно,

$$p_i(t) = \pi_i e^{s_i t}; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.191)$$

где

$$p_i(0) = \pi_i; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.192)$$

Таким образом, выражение (7.189) сводится к виду

$$u(t) = -\operatorname{sign} \left\{ \sum_{i=1}^N s_i \pi_i e^{s_i t} \right\}. \quad (7.193)$$

Легко показать, что функция  $\sum_{i=1}^N s_i \pi_i e^{s_i t}$  обладает свойствами:

- 1) имеет не более  $N - 1$  нулей при любых значениях  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N$ ;
- 2) не может быть тождественно равна нулю на конечном интервале времени<sup>1</sup>.

Отсюда следует, что оптимальное управление есть кусочно-постоянная функция времени, которая «переключается» не более  $N - 1$  раз.

Пусть

$$u = \Delta = \pm 1; \quad (7.194)$$

подставим  $u = \Delta$  в уравнение (7.187), и тогда получим

$$\dot{x}_i(t) = (\xi_i - \Delta) e^{-s_i t} + \Delta; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.195)$$

где

$$\xi_i \equiv x_i(0); \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.196)$$

<sup>1</sup> Это исключает возможность вырожденных управлений [так как система (7.187) нормальна].

Из этих уравнений можно исключить  $t$  и получить уравнение траектории в  $N$ -мерном пространстве, исходящей из  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$  и производимой управлением  $u = \Delta$ . Например, из системы (7.195) при  $i = 1$  получаем

$$t = \frac{1}{s_1} \log \frac{\xi_1 - \Delta}{x_1 - \Delta}. \quad (7.197)$$

Подставляя выражение для  $t$  в уравнения (7.195) при  $i = 2, 3, \dots, N$  получим

$$x_k = \Delta + (\xi_k - \Delta) \left( \frac{\xi_1 - \Delta}{x_1 - \Delta} \right)^{\frac{s_k}{s_1}}; \quad k = 2, 3, \dots, N. \quad (7.198)$$

Последние  $N - 1$  уравнений описывают траекторию в  $N$ -мерном пространстве. Из уравнения (7.195) получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \Delta; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.199)$$

Это означает, что траектория, полученная от управления  $u = +1$ , стремится к точке (или состоянию в фазовом пространстве)  $(1, 1, \dots, 1)$ , а траектория от управления  $u = -1$  — к точке  $(-1, -1, \dots, -1)$  пространства состояний.

Получим теперь последовательность множеств  $\{V_{N-1}\}, \{V_{N-2}\}, \dots, \{V_2\}, \{V_1\}$ , аналогичных кривым и поверхностям переключения, рассмотренным в § 7.4, обобщив методы предыдущего параграфа. Сначала мы дадим формальные определения, а затем их проанализируем.

**Определение 7.13.** Пусть  $\{V_{N-1}\}$  — множество состояний, которые могут быть переведены в начало координат  $\mathbf{0}$  пространства состояний с помощью управления

$$u = \Delta^* = \pm 1 \quad (7.200)$$

(иначе говоря, с помощью управляющей последовательности  $\{+1\}$  или же  $\{-1\}$ ). Состояние, принадлежащее множеству  $\{V_{N-1}\}$ , будем обозначать через  $\mathbf{x}_{N-1}$ , а его компоненты — через  $x_{i, N-1}$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ . Через  $t_{N-1}$  обозначим время, требующееся для перевода  $\mathbf{x}_{N-1}$  в  $\mathbf{0}$ , при использовании управления  $u = \Delta^*$ . Из уравнения (7.195) находим, что  $x_{i, N-1}$  определяются соотношениями

$$x_{i, N-1} = \Delta^* - \Delta^* e^{s_i t_{N-1}} \quad (7.201)$$

для  $i = 1, 2, \dots, N$ .

**Определение 7.14.** Пусть  $\{V_{N-2}\}$  — множество состояний, которые можно перевести в множество  $\{V_{N-1}\}$  с помощью управления  $u = -\Delta^*$ . Состояние, принадлежащее к  $\{V_{N-2}\}$ , будем обозначать через  $\mathbf{x}_{N-2}$ , а его координаты — через  $x_{i, N-2}$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ . Обозначим через  $t_{N-2}$  время, требующееся для перевода  $\mathbf{x}_{N-2}$  в  $\mathbf{x}_{N-1} \in \{V_{N-1}\}$ . Координаты  $x_{i, N-2}$  определяются соотношениями

$$x_{i, N-2} = -\Delta^* + (x_{i, N-1} + \Delta^*) e^{s_i t_{N-2}} \quad (7.202)$$

для  $i = 1, 2, \dots, N$ , где  $x_{i, N-1}$  удовлетворяют уравнениям (7.201).

**Определение 7.15.** Пусть  $\{V_{N-3}\}$  — множество состояний, которые можно перевести в множество  $\{V_{N-2}\}$  с помощью управления  $u = \Delta^*$ . Состояние, принадлежащее к  $\{V_{N-3}\}$ , будем обозначать через  $\mathbf{x}_{N-3}$ , а его координаты — через  $x_{i, N-3}$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ . Обозначим через  $t_{N-3}$  время, требующееся для перевода  $\mathbf{x}_{N-3}$  в  $\mathbf{x}_{N-2} \in \{V_{N-2}\}$ . Координаты  $x_{i, N-3}$  определяются соотношениями:

$$x_{i, N-3} = \Delta^* + (x_{i, N-2} + \Delta^*) e^{s_i t_{N-3}} \quad (7.203)$$

для  $i = 1, 2, \dots, N$ , где  $x_{i, N-2}$  удовлетворяют уравнению (7.202).





Следовательно, если состояние  $x_{N-R}$  принадлежит к множеству  $\{V_{N-R}\}$ , где  $R = 1, 2, \dots, N-1$ , то его компоненты  $x_{i, N-R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  должны удовлетворять следующим уравнениям:

Для  $N$  нечетного и  $i = 1, 2, \dots, N$

$$\Delta^* x_{i, N-R} + 1 = 2\omega_1^{s_i} - 2\omega_2^{s_i} + \dots + 2\omega_{N-2}^{s_i} - \omega_{N-1}^{s_i}. \quad (7.218)$$

Для  $N$  четного и  $i = 1, 2, \dots, N$

$$\Delta^* x_{i, N-R} - 1 = -2\omega_1^{s_i} + 2\omega_2^{s_i} - \dots + 2\omega_{N-2}^{s_i} - \omega_{N-1}^{s_i}, \quad (7.219)$$

где переменные  $\omega$  удовлетворяют соотношениям

$$1 = \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{N-R-1} < \omega_{N-R} < \omega_{N-R+1} < \dots < \omega_{N-1}. \quad (7.220)$$

Уравнения (7.218), (7.219) и (7.220) можно упростить.

Для  $R$  четного и  $i = 1, 2, \dots, N$

$$\Delta^* x_{i, N-R} + 1 = 2\omega_{N-R}^{s_i} - 2\omega_{N-R+1}^{s_i} + \dots + 2\omega_{N-2}^{s_i} - \omega_{N-1}^{s_i}; \quad (7.221)$$

для  $R$  нечетного и  $i = 1, 2, \dots, N$

$$\Delta^* x_{i, N-R} - 1 = -2\omega_{N-R}^{s_i} + 2\omega_{N-R+1}^{s_i} - \dots + 2\omega_{N-2}^{s_i} - \omega_{N-1}^{s_i}, \quad (7.222)$$

где переменные  $\omega_{N-R}, \omega_{N-R+1}, \dots, \omega_{N-1}$  удовлетворяют неравенствам

$$1 < \omega_{N-R} < \omega_{N-R+1} < \dots < \omega_{N-1}, \quad (7.223)$$

где, в свою очередь,  $R = 1, 2, \dots, N-1$ .

**Пример 7.1.** Предположим, что объект описывается передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}; \quad (7.224)$$

$N = 4$  (четное) и  $s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 3, s_4 = 4$

[сравните уравнение (7.224) с (7.183)]. Следовательно, если  $x_1$  есть состояние, принадлежащее к  $\{V_1\}$ , то для компонент  $x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}$  справедливы уравнения

$$\left. \begin{aligned} \Delta^* x_{1,1} - 1 &= -2\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3; \\ \Delta^* x_{2,1} - 1 &= -2\omega_1^2 + 2\omega_2^2 - \omega_3^2; \\ \Delta^* x_{3,1} - 1 &= -2\omega_1^3 + 2\omega_2^3 - \omega_3^3; \\ \Delta^* x_{4,1} - 1 &= -2\omega_1^4 + 2\omega_2^4 - \omega_3^4; \end{aligned} \right\} \quad (7.225)$$

где  $1 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ .

(7.226)

Если  $x_2$  — состояние, принадлежащее множеству  $\{V_2\}$ , то для компонент  $x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}, x_{4,2}$  справедливы соотношения [уравнение (7.221), где  $R = 2, N = 4$ ]

$$\left. \begin{aligned} \Delta^* x_{1,2} + 1 &= 2\omega_2 - \omega_3; \\ \Delta^* x_{2,2} + 1 &= 2\omega_2^2 - \omega_3^2; \\ \Delta^* x_{3,2} + 1 &= 2\omega_2^3 - \omega_3^3; \\ \Delta^* x_{4,2} + 1 &= 2\omega_2^4 - \omega_3^4; \end{aligned} \right\} \quad (7.227)$$

где  $1 < \omega_2 < \omega_3$ .

(7.228)

Если  $x_3$  — состояние, принадлежащее множеству  $\{V_3\}$ , то по уравнению (7.222) при  $R = 3, N = 4$  для компонент  $x_{1,3}, x_{2,3}, x_{3,3}, x_{4,3}$  получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta^* x_{1,3} - 1 &= -\omega_3; \\ \Delta^* x_{2,3} - 1 &= -\omega_3^2; \\ \Delta^* x_{3,3} - 1 &= -\omega_3^3; \\ \Delta^* x_{4,3} - 1 &= -\omega_3^4; \end{aligned} \right\} \quad (7.229)$$

где  $1 < \omega_3$ .

(7.230)

Используя определения и уравнения множеств  $\{V_1\}, \{V_2\}, \dots, \dots, \{V_{N-1}\}$ , можно обнаружить их некоторые важные свойства, позволяющие лучше понять геометрический смысл задачи.

**Свойство 1.** Множество  $\{V_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N - 1$  симметрично относительно начала координат. Чтобы обнаружить это, рассмотрим уравнение множества  $\{V_{N-R}\}$  в виде (7.221). Приняв  $\Delta^* = +1$ , получим

$$(x_{i, N-R})^+ + 1 = 2\omega_{N-R}^{s_i} - 2\omega_{N-R+1}^{s_i} + \dots + 2\omega_{N-2}^{s_i} - \omega_{N-1}^{s_i}. \quad (7.231)$$

При  $\Delta^* = -1$  имеем

$$-(x_{i, N-R})^- + 1 = 2\omega_{N-R}^{s_i} - 2\omega_{N-R+1}^{s_i} + \dots + 2\omega_{N-2}^{s_i} - \omega_{N-1}^{s_i}. \quad (7.232)$$

Сравнивая выражения (7.231) и (7.232), сразу получим

$$(x_{i, N-R})^+ = -(x_{i, N-R})^-, \quad (7.233)$$

откуда и следует симметричность  $\{V_{N-R}\}$  относительно начала координат. Физически это означает, что состояния, расположенные на этом множестве симметрично относительно начала координат, требуют для перевода в начало координат одного и того же времени<sup>1</sup>.

**Свойство 2.** В  $N$ -мерном фазовом пространстве множество  $\{V_{N-1}\}$  есть кривая или одномерное многообразие<sup>2</sup>; множество  $\{V_{N-2}\}$  — поверхность, или двумерное многообразие. Множество  $\{V_{N-R}\}$  является  $R$ -мерным многообразием; множество  $\{V_1\}$  — гиперповерхностью, или  $N - 1$ -мерным многообразием. Так как множество  $\{V_1\}$  есть гиперповерхность, то она делит пространство состояний (фазовое пространство) на две части.

**Свойство 3.** Множества  $\{V_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N - 1$  являются «гладкими» и «непрерывными», так как они образованы семействами гладких и непрерывных траекторий.

**Свойство 4.** Множества  $\{V_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N - 1$  являются «бесконечными» в продолжении. Это означает, что если в уравнении (7.221) положить  $|x_{1, N-R}| = \infty$ , то по уравнению (7.223) имеем  $\omega_{N-R} = \infty$  и, следовательно,  $|x_{k, N-R}| = \infty$  для  $k = 2, 3, \dots, N$ .

**Свойство 5.** Начало координат  $0$  содержится в множестве  $\{V_{N-1}\}$ ; множество  $\{V_{N-1}\}$  содержится в  $\{V_{N-2}\}$  и т. д. Иначе говоря,

$$0 \subset \{V_{N-1}\} \subset \{V_{N-2}\} \subset \dots \subset \{V_2\} \subset \{V_1\}. \quad (7.234)$$

Это свойство непосредственно вытекает из определения множеств. Свойством 5 мы воспользуемся в настоящем параграфе несколько ниже.

**Свойство 6.** Мы отметили, что гиперповерхность  $\{V_1\}$  делит пространство состояний на две части. Удобно установить понятия «сверху» и «снизу»<sup>3</sup> по отношению к гиперповерхности  $\{V_1\}$ . Чтобы сделать это,

<sup>1</sup> Например, сравните симметричные состояния на линии переключения  $\gamma^+$  и  $\gamma^-$  для системы второго порядка, рассмотренной в § 7.2 и 7.3.

<sup>2</sup> Предположим, что в  $n$ -мерном евклидовом пространстве мы имеем  $n$  переменных  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и  $m$  параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ,  $m < n$ . Пусть

$$y_i = f_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m); \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где функции  $f_i$  независимы. Говорят, что точки, удовлетворяющие этим уравнениям, образуют  $m$ -мерное многообразие в  $n$ -мерном пространстве. В частности, если  $m = 1$ , то одномерное многообразие называют кривой, если  $m = 2$ , то двумерное многообразие называют поверхностью, и если  $m = n - 1$ , то  $n - 1$ -мерное многообразие называют гиперповерхностью (см. также § 3.13).

<sup>3</sup> Так же, как это мы сделали в § 7.4 для системы третьего порядка.



предположим  $N$  нечетным, и поэтому состояние  $\mathbf{x}_1 \in \{V_1\}$  удовлетворяет уравнению (7.211), которое мы запишем в развернутом виде:

$$\Delta^* x_{1,1} + 1 = 2\omega_1^{s_1} - 2\omega_2^{s_2} + \dots - 2\omega_{N-2}^{s_{N-2}} - \omega_{N-1}^{s_{N-1}}; \quad (7.235_1)$$

$$\Delta^* x_{2,1} + 1 = 2\omega_1^{s_2} - 2\omega_2^{s_2} + \dots + 2\omega_{N-2}^{s_2} - \omega_{N-1}^{s_2}; \quad (7.235_2)$$

$$\Delta^* x_{N-1,1} + 1 = 2\omega_1^{s_{N-1}} - 2\omega_2^{s_{N-1}} + \dots + 2\omega_{N-2}^{s_{N-1}} - \omega_{N-1}^{s_{N-1}}; \quad (7.235_{N-1})$$

$$\Delta^* x_{N,1} + 1 = 2\omega_1^{s_N} - 2\omega_2^{s_N} + \dots + 2\omega_{N-2}^{s_N} - \omega_{N-1}^{s_N}. \quad (7.235_N)$$

Пусть мы имеем некоторое состояние  $\mathbf{x}$ :

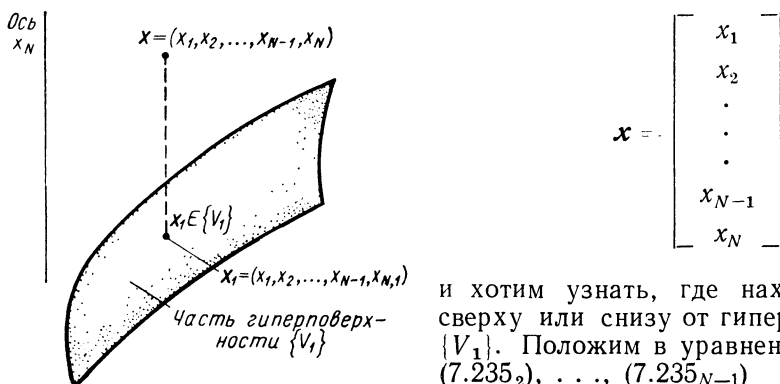


Рис. 7.27. Абстрактное изображение проекции состояния  $\mathbf{x}$  на гиперповерхность  $\{V_1\}$  (точка  $\mathbf{x}_1$ )

и хотим узнать, где находится  $\mathbf{x}$  — сверху или снизу от гиперповерхности  $\{V_1\}$ . Положим в уравнениях (7.235<sub>1</sub>), (7.235<sub>2</sub>), ..., (7.235<sub>N-1</sub>)

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= x_1, \quad x_{2,1} = x_2, \dots, \\ x_{N-1,1} &= x_{N-1}, \end{aligned} \quad (7.236)$$

тогда получим из них  $N - 1$  уравнение, из которых найдем  $N - 1$  переменную  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N-1}$  и  $\Delta^* = +1$  или  $\Delta^* = -1$ , имея в виду неравенства

$$1 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{N-1}. \quad (7.237)$$

Подставим значения  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N-1}$  и  $\Delta^*$  в уравнение (7.235<sub>N</sub>) и получим значение  $x_{N,1}$ . Значение  $x_{N,1}$  сравним с величиной последней компоненты  $x_N$  состояния  $\mathbf{x}$ . Если

$$x_N - x_{N,1} > 0, \quad (7.238)$$

то будем считать, что состояние  $\mathbf{x}$  находится сверху от гиперповерхности  $\{V_1\}$ . Если

$$x_N - x_{N,1} = 0, \quad (7.239)$$

то  $\mathbf{x} \in \{V_1\}$ , и если

$$x_N - x_{N,1} < 0, \quad (7.240)$$

то будем считать, что состояние  $\mathbf{x}$  находится снизу от гиперповерхности  $\{V_1\}$ . Эти соображения иллюстрирует рис. 7.27. Так же, как и в § 7.4 (рис. 7.23), на нем изображена прямая, проходящая через точку  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  параллельно оси  $x_N$ , которая благодаря свойству 2 пересекает гиперповерхность  $\{V_1\}$  в точке  $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_{N,1})$ . Сравнение  $x_N$  с  $x_{N,1}$  показывает, где находится точка  $\mathbf{x}$  — сверху или снизу от гиперповерхности  $\{V_1\}$ . Аналогичным способом можно проверить, принадлежит ли  $\mathbf{x}_1$  из  $\{V_1\}$  к  $\{V_2\}$  и т. д.

**Свойство 7.** Если  $N$  нечетно, то состояние  $(1, 1, \dots, 1)$  находится выше, а состояние  $(-1, -1, \dots, -1)$  ниже гиперповерхности  $\{V_1\}$ .

Если  $N$  четно, то наоборот, состояние  $(1, 1, \dots, 1)$  находится ниже гиперповерхности  $\{V_1\}$ , а состояние  $(-1, -1, \dots, -1)$  выше нее. Полное доказательство данного утверждения мы опускаем, ограничимся иллюстрацией этого положения на примере системы третьего порядка.

**Пример 7.2.** Рассмотрим систему третьего порядка с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{K}{(s + s_1)(s + s_2)(s + s_3)}; \quad 0 < s_1 < s_2 < s_3. \quad (7.241)$$

Уравнение поверхности  $\{V_1\}$ <sup>1)</sup> можно найти из соотношения (7.211), положив  $N = 3$  (нечетное):

$$\Delta^* x_{1,1} + 1 = 2\omega_1^{s_1} - \omega_2^{s_1}; \quad (7.242)$$

$$\Delta^* x_{2,1} + 1 = 2\omega_1^{s_2} - \omega_2^{s_2}; \quad (7.243)$$

$$\Delta^* x_{3,1} + 1 = 2\omega_1^{s_3} - \omega_2^{s_3}. \quad (7.244)$$

Покажем, что точка  $(1, 1, 1)$  находится выше поверхности  $\{V_1\}$ , для чего воспользуемся методом, описанным в свойстве 6. Рассмотрим состояние  $x_1 = (1, 1, x_{3,1})$ , принадлежащее поверхности  $\{V_1\}$ , и покажем, что  $1 - x_{3,1} > 0$ . Первый шаг состоит в подстановке значений  $x_{1,1} = 1$  и  $x_{2,1} = 1$  в соотношения (7.242) и (7.243) соответственно:

$$\Delta^* + 1 = 2\omega_1^{s_1} - \omega_2^{s_1}; \quad (7.245)$$

$$\Delta^* + 1 = 2\omega_1^{s_2} - \omega_2^{s_2}. \quad (7.246)$$

Напомним, что  $\Delta^*$  выбирается таким, чтобы удовлетворялись неравенства

$$1 < \omega_1 < \omega_2. \quad (7.247)$$

Предположим, что мы выбрали  $\Delta^* = -1$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_1^{s_1} &= \omega_2^{s_1}; \\ 2\omega_1^{s_2} &= \omega_2^{s_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.248)$$

Очевидно, что

$$\omega_2 = 2^{\frac{1}{s_1}} \omega_1 = 2^{\frac{1}{s_2}} \omega_1, \quad (7.249)$$

и, следовательно,

$$2^{\frac{1}{s_1}} = 2^{\frac{1}{s_2}}, \quad (7.250)$$

что невозможно, так как  $0 < s_1 < s_2$ . Таким образом, выбор является неправильным, и для подстановки в уравнения (7.245) и (7.246) мы должны выбрать

$$\Delta^* = +1. \quad (7.251)$$

Получаем соотношения

$$2 = 2\omega_1^{s_1} - \omega_2^{s_1}; \quad (7.252)$$

$$2 = 2\omega_1^{s_2} - \omega_2^{s_2} \quad (7.253)$$

или

$$\omega_2 = [2(\omega_1^{s_1} - 1)]^{\frac{1}{s_1}} = [2(\omega_1^{s_2} - 1)]^{\frac{1}{s_2}}. \quad (7.254)$$

Отметим, что для произвольных значений  $s_1$  и  $s_2$  решить уравнение (7.254) относительно  $\omega_1$  невозможно.

На следующем шаге следует найти  $x_{3,1}$  [по уравнению (7.244)], для которого при  $\Delta^* = +1$  получается соотношение:

$$x_{3,1} = -1 + 2\omega_1^{s_3} - \omega_2^{s_3}. \quad (7.255)$$

Мы должны показать, что

$$1 - x_{3,1} > 0 \quad (7.256)$$

<sup>1)</sup> Так как  $N = 3$ , гиперповерхность  $\{V_1\}$  есть просто поверхность в трехмерном пространстве состояний.

или, эквивалентно, что

$$\omega_2 > [2(\omega_1^{s_3} - 1)]^{\frac{1}{s_3}}. \quad (7.257)$$

Вид уравнений (7.254) и (7.257) подсказывает целесообразность введения функции

$$g(\omega_1, s) = [2(\omega_1^s - 1)]^{\frac{1}{s}}, \quad (7.258)$$

рассматриваемой как функция  $s$  с  $\omega_1 > 1$  в качестве параметра. По определению будет иметь место равенство

$$g(\omega_1, s_1) = g(\omega_1, s_2), \quad (7.259)$$

и мы должны показать, что

$$g(\omega_1, s_3) < g(\omega_1, s_2) \text{ при } s_2 < s_3. \quad (7.260)$$

Нетрудно обнаружить, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} g(\omega_1, s) = 0 \quad (7.261)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g(\omega_1, s) = \omega_1 > 1, \quad (7.262)$$

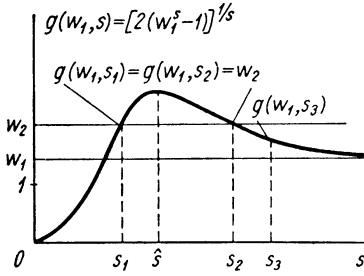


Рис. 7.28. График функции  $g(\omega_1, s)$  в зависимости от  $s$

а также

$$\frac{d}{ds} g(\omega_1, s) = \frac{[2(\omega_1^s - 1)]^{\frac{1}{s}}}{s^2(\omega_1^s - 1)} [s\omega_1^s \log \omega_1 - (\omega_1^s - 1) \log 2(\omega_1^s - 1)]. \quad (7.263)$$

Так как  $\omega_1 > 1$  и  $s > 0$ , член  $\frac{[2(\omega_1^s - 1)]^{\frac{1}{s}}}{s^2(\omega_1^s - 1)}$  в уравнении (7.263) всегда положителен. Убедимся, что существует только одно  $s = \hat{s}$ , для которого

$$\hat{s}\omega_1^{\hat{s}} \log \omega_1 = (\omega_1^{\hat{s}} - 1) \log 2(\omega_1^{\hat{s}} - 1), \quad (7.264)$$

т. е.

$$\left. \frac{d}{ds} g(\omega_1, s) \right|_{\hat{s}} = 0. \quad (7.265)$$

Эти соображения позволяют установить характер функции  $g(\omega_1, s)$ . Как показано на рис. 7.28,  $g(\omega_1, s)$  как функция от  $s$  начинается с нуля, достигает максимума при  $s = \hat{s}$ , а затем убывает, асимптотически стремясь к  $\omega_1$  при  $s \rightarrow \infty$ . Очевидно, что для любого  $s_3 > s_2$   $g(\omega_1, s_3) < g(\omega_1, s_2)$ .

**Упражнение 7.31.** Рассмотрите передаточную функцию (7.241), положив  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 2$ ,  $s_3 = 3$ . Повторите шаги, перечисленные в примере 7.2, и покажите, что  $\omega_1 = 3$ ,  $\omega_2 = 4$ ,  $x_{3,1} = -11$ . Убедитесь, что точка  $(1, 1, 1)$  находится сверху от поверхности  $\{V_1\}$ , так как точка  $(1, 1, -11)$  принадлежит к  $\{V_1\}$ . Нарисуйте график функции

$$g(3, s) = [2(3^s - 1)]^{\frac{1}{s}}$$

для  $0 < s < \infty$  и убедитесь, что он похож на график рис. 7.28.

Свойства множеств  $\{V_1\}, \{V_2\}, \dots, \{V_{N-1}\}$  мы используем при формулировке оптимального по быстродействию закона управления для объекта  $N$ -го порядка с передаточной функцией (7.183).

**Закон управления 7.6 (решение задачи 7.6).** Дано произвольное состояние  $x$ . Оптимальное по быстродействию управление  $u^*$ , переводящее  $x$  в начало координат  $0$ , определяется следующим образом:

- если  $\mathbf{x}$  выше  $\{V_1\}$ , то  $u^* = (-1)^N$ ;
- если  $\mathbf{x}$  ниже  $\{V_1\}$ , то  $u^* = -(-1)^N$ ;
- если  $\mathbf{x} \in \{V_1\}$ , то  $u^* = (-1)^N \Delta^*$ ;
- если  $\mathbf{x} \in \{V_2\}$ , то  $u^* = -(-1)^N \Delta^*$ ;
- .....
- если  $\mathbf{x} \in \{V_{N-R}\}$ , то  $u^* = (-1)^{R+1} \Delta^*$ ;
- .....
- если  $\mathbf{x} \in \{V_{N-2}\}$ , то  $u^* = -\Delta^*$ ;
- если  $\mathbf{x} \in \{V_{N-1}\}$ , то  $u^* = \Delta^*$ .

**Элементы доказательства.** Из определений множеств  $\{V_j\}$  следует, что если состояние (или изображающая точка в фазовом пространстве) принадлежит к множеству  $\{V_{N-R}\}$ ,  $R = 1, 2, \dots, N - 1$ , то управление, переводящее  $\mathbf{x}$  в начало координат, переключается в точности  $R - 1$  раз. В частности, если состояние  $\mathbf{x}$  принадлежит к гиперповерхности  $\{V_1\}$ , то управление переключается  $N - 2$  раз. Напомним, далее, что поскольку система имеет  $N$  действительных собственных значений, то оптимальное по быстродействию управление может переключаться не более  $N - 1$  раз. Рассмотрим состояние

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

которое, по свойству 7, расположено выше  $\{V_1\}$  при  $N$  нечетном. Если  $N$  нечетно, то закон управления устанавливает, что  $u^* = -1$ . Попробуем доказать это утверждение. Приложим в точке  $\mathbf{1}$  управление  $u = +1$ . Так как все траектории, производимые управлением  $u = +1$ , стремятся к  $\mathbf{1}$ , то система останется в исходном состоянии  $\mathbf{1}$  навсегда. Следовательно, мы обязаны приложить управление  $u = -1$  при  $\mathbf{1}$  и произвести траекторию, которая попадет в множество  $\{V_1\}$ . Если по достижении  $\{V_1\}$  управление переключается с  $u = -1$  на  $u = +1$ , то общее число переключений будет равно  $N - 1$ , что, очевидно, не противоречит необходимым условиям. Следовательно, если  $N$  нечетно и состояние  $\mathbf{x}$  выше  $\{V_1\}$ , то управление должно быть  $u = -1$ . Аналогично доказывается, что если  $\mathbf{x}$  выше  $\{V_1\}$  (и поэтому ввиду свойства 5 не принадлежит к  $\{V_2\}, \dots, \{V_{N-1}\}$ ), то управление  $u = (-1)^N$  переводит  $\mathbf{x}$  в  $\{V_1\}$ , а если  $\mathbf{x}$  ниже  $\{V_1\}$ , то  $u = -(-1)^N$  переводит  $\mathbf{x}$  в  $\{V_1\}$ . В каждом случае число переключений в точности равно  $N - 1$ .

Следующий шаг состоит в доказательстве того, что если состояние  $\mathbf{x}_1$  принадлежит  $\{V_1\}$ , то управление должно быть равно  $u = (-1)^N \Delta^*$ .

Предположим, что  $N$  нечетно и что для  $\mathbf{x}_1 \in \{V_1\}$  значение  $\Delta^* = -1$ . Согласно закону управления в точке  $\mathbf{x}_1$  мы должны приложить к системе управление  $u = +1$ . Такое управление дает траекторию, расположенную в гиперповерхности  $\{V_1\}$  и попадающую в  $\{V_2\}$  в точке, в которой управление должно переключиться на  $-1$  и т. д. Эта управляющая последовательность требует в точности  $N - 2$  переключений. Предположим, что в точке  $\mathbf{x}_1$  мы приложили  $u = -1$ . Получившаяся в результате траектория не будет лежать в гиперповерхности  $\{V_1\}$ ; она будет расположена ниже  $\{V_1\}$  (поскольку она стремится к состоянию  $-1$ , расположенному ниже  $\{V_1\}$ ). Поэтому управление должно переключиться с  $u = -1$  на  $u = +1$  для того, чтобы вернуть состояние в  $\{V_1\}$ . Однако, такая



Вычисленное значение  $x_{N,1}$  сравнивается с измеренной величиной  $x_N$ . Если полученная разность  $x_N - x_{N,1}$  положительна, то измеряемое состояние находится выше гиперповерхности  $\{V_1\}$  (см. свойство б), а если  $x_N - x_{N,1}$  отрицательна, то ниже  $\{V_1\}$ . Умножение разности  $x_N - x_{N,1}$  на  $(-1)^N$  дает сигнал правильной полярности, прикладываемый к реле  $R$ , выход которого  $u^*(t)$  является управлением, оптимальным по быстродействию.

Очевидно, что система, показанная на рис. 7.29, определяет, где находится измеряемое состояние — выше или ниже гиперповерхности  $\{V_1\}$ <sup>1</sup>, и вырабатывает управление, которое переводит состояние  $x$  в гиперповерхность  $\{V_1\}$  за минимальное время. Обычные ошибки в вычислениях и задержки во времени почти всегда приводят к тому, что переключения управления будут происходить чуть-чуть выше или чуть-чуть ниже  $\{V_1\}$ , и поэтому траектории близки, но не принадлежат множествам  $\{V_1\}, \{V_2\}, \dots, \{V_{N-1}\}$ . После  $N - 1$  переключений состояние близко к началу координат. Степень точности будет зависеть от скорости и точности используемых вычислительных средств. Именно поэтому практическая реализация, показанная на рис. 7.29, не включает логических операций для множеств  $\{V_2\}, \{V_3\}, \dots, \{V_{N-1}\}$ .

## 7.6. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В предыдущих параграфах мы рассмотрели задачу об оптимальном управлении для двух систем второго порядка, для одной системы третьего порядка и одной системы  $N$ -го порядка. Эти системы обладали следующими общими свойствами:

- 1) были линейными, нормальными и инвариантными во времени;
- 2) их передаточные функции не имели нулей;
- 3) полюса передаточных функций были действительными не положительными (не обязательно различными) числами;
- 4) управление осуществлялось одной управляющей переменной  $u(t)$ , ограниченной по амплитуде  $|u(t)| \leq 1$ ;
- 5) желаемым конечным состоянием было начало координат, которое является точкой равновесия системы, и поэтому по достижении начала координат достаточно выключить управление для того чтобы система осталась в покое (т. е. в начале координат).

Метод решения был для всех задач почти одним и тем же. Отметим основные этапы синтеза оптимального управления.

1. Прежде всего мы сводили систему дифференциальных уравнений к системе уравнений первого порядка, используя в качестве переменных состояния выходной сигнал  $y(t)$  и достаточное число его производных. Например, для системы  $N$ -го порядка мы использовали  $N - 1$  производную выходного сигнала.

2. После этого выбирали удобную систему переменных состояния (фазовых координат) с помощью ряда невырожденных линейных преобразований, которые приводили матрицу системы к ее жордановой канонической форме. Для системы с двойным интегрированием (§ 7.2) это преобразование не было необходимым, потому что матрица системы уже представляла собой жорданову каноническую форму.

3. Затем к полученной системе переменных состояния применялся принцип минимума. Мы рассматривали гамильтониан, определяемый уравнениями, справедливыми для дополнительных переменных, и отыскивали управление, которое абсолютно минимизирует гамильтониан. Мы

<sup>1</sup> Гиперповерхность  $\{V_1\}$  часто называют гиперповерхностью переключения.

обнаружили, что для нормальных систем оптимальное по быстродействию управление должно было быть кусочно-постоянным и могло переключаться не более  $N - 1$  раз для системы  $N$ -го порядка. В результате всего этого мы отыскивали управляющие последовательности, которые могли оказаться управлениями, оптимальными по быстродействию.

4. Далее методом исключения выбирали управление, оптимальное по быстродействию. Мы рассматривали каждое состояние в фазовом пространстве и исследовали каждое из управлений, которое могло быть оптимальным. Среди всех управляющих последовательностей, переводящих произвольное состояние в начало координат, выделялась одна, которая и давала закон управления. Побочным результатом этих методов явились понятия линии переключения для системы второго порядка, поверхности переключения для системы третьего порядка и гиперповерхности переключения для системы порядка  $N$ . Иначе говоря, мы определили множества состояний, разделяющие фазовое пространство на две различные области, в одной из которых оптимальное по быстродействию управление было равно  $+1$ , а в другой  $-1$ .

5. И, наконец, реализовывали оптимальный по быстродействию закон управления, моделируя линию (поверхность или гиперповерхность) переключения и определяя, где находится состояние — выше или ниже линии (поверхности или гиперповерхности) переключения. При помощи реле получался оптимальный управляющий сигнал, который воздействовал на вход системы.

При отыскании оптимального по быстродействию управления для системы  $N$ -го порядка мы определили множества  $\{V_1\}, \{V_2\}, \dots, \{V_{N-1}\}$ , включая гиперповерхность переключения, состоящие из траекторий системы, которые соответствуют постоянному управлению  $u = \Delta = \pm 1$  по требованиям принципа минимума.

Множества  $\{V_i\}$  состоят из траекторий системы в том случае, если ее полюса не имеют мнимых частей и конечным состоянием является начало координат. Существует много задач (см., например, упражнение 7.19), для которых линия переключения не является траекторией системы, если областью  $S$  является точка, отличная от начала координат. В следующем параграфе мы увидим, что линия переключения для системы с комплексными полюсами не состоит целиком из траекторий системы даже в том случае, когда конечным состоянием является начало координат.

Следующие три упражнения иллюстрируют оптимальное по быстродействию управление для некоторых систем с действительными полюсами.

**Упражнение 7.32.** Рассмотрите объект второго порядка, описываемый дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a \frac{dy(t)}{dt} = ku(t), \quad (7.269)$$

где  $a > 0$ ,  $k > 0$  и  $|u(t)| \leq 1$ . (7.270)

Такой объект имеет передаточную функцию

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{k}{s(s+a)}. \quad (7.271)$$

Обычно говорят, что этот объект представляет собой интегратор с аperiodическим звеном. Используя фазовые координаты  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ -u \end{bmatrix}, \quad (7.272)$$

найдите связь между переменными  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  и выходной координатой  $y(t)$  и ее производной  $\dot{y}(t)$ . Покажите, что для того, чтобы перевести любое исходное состояние системы в начало координат  $(0, 0)$ , оптимальное управление, как функция  $x_1$  и  $x_2$ , получается из уравнения

$$u^* = \text{sign} \left\{ \frac{x_1}{|x_1|} (1 - e^{-ax_1}) - x_2 \right\}. \quad (7.273)$$

**Упражнение 7.33.** Определите оптимальное по быстродействию управление к началу координат для объекта третьего порядка, описываемого дифференциальным уравнением

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + (s_1 + s_2) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + s_1 s_2 \frac{dy(t)}{dt} = ku(t), \quad (7.274)$$

где  $0 < s_1 < s_2$ ,  $k > 0$ ,  $|u(t)| \leq 1$ . (7.275)

Такой объект имеет передаточную функцию вида

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{k}{s(s + s_1)(s + s_2)}. \quad (7.276)$$

**У к а з а н и е:** для решения задачи надо найти аналитическое выражение поверхности переключения  $\{V_1\}$ .

**Упражнение 7.34.** Найдите оптимальное по быстродействию управление к началу координат для объекта

$$\frac{d^4 y(t)}{dt^4} = u(t), \quad |u(t)| \leq 1.$$

## 7.7. УПРАВЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ <sup>1</sup>

До сих пор мы рассматривали задачу об оптимальном управлении для систем с действительными собственными значениями матрицы системы. В этом параграфе мы рассмотрим систему второго порядка с чисто мнимыми собственными значениями.

Пусть система описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = Ku(t), \quad (7.277)$$

где  $K > 0$  и управление удовлетворяет ограничению

$$|u(t)| \leq 1. \quad (7.278)$$

В теории и практике автоматического регулирования такая система описывается передаточной функцией

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{K}{s^2 + \omega^2}. \quad (7.279)$$

Определим фазовые координаты (переменные состояния) как

$$y_1(t) = y(t); \quad y_2(t) = \dot{y}(t). \quad (7.280)$$

Вектор  $\mathbf{y}(t)$  удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Ku(t) \end{bmatrix}. \quad (7.281)$$

Введем более удобные координаты  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , приняв

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\omega}{K} y_1(t); \\ x_2(t) &= \frac{1}{K} y_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.282)$$

<sup>1</sup> Первым эту задачу решил Бушау [38]. Дополнительными источниками являются работы [5], [9], [39], [41] и [122].



Эти координаты (которые мы и будем использовать на протяжении всего параграфа) удовлетворяют векторному дифференциальному уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix}. \quad (7.283)$$

Рассматривая матрицу системы  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.284)$$

легко убедиться, что ее собственными значениями являются

$$\lambda_1 = j\omega; \quad \lambda_2 = -j\omega. \quad (7.285)^1$$

Впервые в настоящей главе мы столкнулись с матрицей с комплексными собственными значениями. Как мы увидим, это обстоятельство существенно изменяет форму линии переключения и метод ее получения.

Существует много физических систем, дифференциальные уравнения которых можно привести к виду (7.283); две из них рассмотрены ниже.

**Пример 7.3.** Рассмотрим массу  $m$ , подвешенную на пружине, имеющей коэффициент упругости  $k$  (рис. 7.30). Пусть  $y(t)$  обозначает линейное перемещение от положения равновесия (например, нуля) и  $f(t)$  ( $|f(t)| \leq F$ ) ограниченная по величине прикладываемая сила. Дифференциальное уравнение для  $y(t)$  имеет вид

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + ky(t) = f(t). \quad (7.286)$$

Уравнение (7.286) можно преобразовать к виду (7.277) [и, следовательно, к виду (7.283)], выбрав

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad K = \frac{F}{m}, \quad u(t) = \frac{f(t)}{F}. \quad (7.287)$$

К тому же общему классу колебательных звеньев относятся маятники (при малых перемещениях) и крутильные маятники.

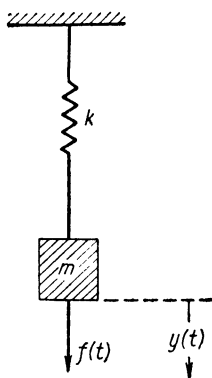


Рис. 7.30. Система, состоящая из пружины и массивного тела

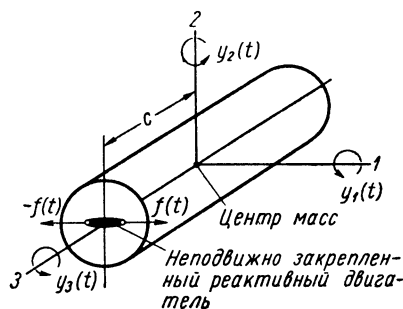


Рис. 7.31. Симметричное тело, подверженное одновременному вращению относительно трех связанных с ним осей. Угловые скорости равны  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  и  $y_3(t)$

**Пример 7.4.** В этом примере рассмотрим уравнения движения вращающегося в пространстве тела с одной осью симметрии. Мы встретимся с такой же системой и в последующих частях книги (см., например, § 10.7). На рис. 7.31 показано такое тело с одной осью симметрии. Введем оси 1, 2 и 3, связанные с телом и проходящие через центр масс. Из рис. 7.31 очевидно, что ось 3 есть ось симметрии тела.

Обозначим через  $I_3$  момент инерции относительно оси 3, а через  $I$  — момент инерции относительно осей 1 и 2. Через  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  и  $y_3(t)$  обозначим угловые скорости вращения

<sup>1</sup> В соответствии с принятой терминологией  $j = \sqrt{-1}$ .

относительно осей 1, 2 и 3 соответственно. Предположим, что мы укрепили на теле реактивный двигатель с ограниченной тягой  $f(t)$ ,  $|\dot{f}(t)| \leq F$  на расстоянии  $c$  от центра масс, и поэтому момент  $cf(t)$  может управлять величиной углового ускорения  $\dot{y}_2(t)$ . Тогда <sup>1</sup> угловые скорости  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  и  $y_3(t)$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} I\dot{y}_1(t) &= (I - I_3)y_2(t)y_3(t); \\ I\dot{y}_2(t) &= (I_3 - I)y_1(t)y_3(t) + cf(t); \\ I_3\dot{y}_3(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.288)$$

Из последнего уравнения имеем

$$y_3(t) = \text{const} = \eta_3. \quad (7.289)$$

Следовательно, если выбрать

$$\omega = \frac{(I - I_3)\eta_3}{I}, \quad (7.290)$$

то получим следующие дифференциальные уравнения для угловых скоростей  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= \omega y_2(t); \\ \dot{y}_2(t) &= -\omega y_1(t) + \frac{c}{I} f(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.291)$$

Если принять

$$K = \frac{c}{I} F \text{ и } u(t) = \frac{\dot{f}(t)}{F}, \text{ так что } |u(t)| \leq 1, \quad (7.292)$$

то новые переменные  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , определенные как

$$x_1(t) = \frac{1}{K} y_1(t); \quad x_2(t) = \frac{1}{K} y_2(t), \quad (7.293)$$

будут удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \omega x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega x_1(t) + u(t), \end{aligned} \right\} \quad (7.294)$$

которые тождественны уравнениям (7.283).

Полезно рассмотреть некоторые свойства гармонического осциллятора, который описывается уравнением (7.283). Прежде всего отметим, что матрица системы  $\mathbf{A}$  (7.284) косо-симметрична <sup>2</sup>. Рассматривая невозбуждаемую систему [ $u(t) = 0$  в уравнении (7.283)]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (7.295)$$

можно показать, что фундаментальная матрица  $\Phi(t)$  равна

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}. \quad (7.296)$$

Нетрудно убедиться, что  $\Phi(t)$  — ортогональная матрица <sup>3</sup>. Поэтому, если положить

$$x_1(0) = \xi_1; \quad x_2(0) = \xi_2, \quad (7.297)$$

то решение уравнения (7.295) запишется в виде

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}. \quad (7.298)$$

<sup>1</sup> См. [85], [5], [9] и [72].

<sup>2</sup> См. уравнения (2.99) и (2.100).

<sup>3</sup> См. уравнения (2.104)–(2.109).

Итак, получим

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = \xi_1^2 + \xi_2^2 = \text{const.} \quad (7.299)$$

Это означает, что траекториями движения невозбуждаемой системы являются окружности в плоскости  $x_1x_2$  с центром в начале координат  $(0, 0)$  радиуса  $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ , как показано на рис. 7.32. Движение направлено по часовой стрелке, что отмечено соответствующими стрелочками на траекториях. Физический смысл этого состоит в том, что гармонический осциллятор является консервативной системой. Это очевидно из примеров 7.3

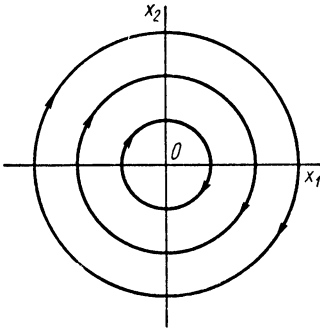


Рис. 7.32. Траектории гармонического осциллятора при отсутствии управления ( $u = 0$ )

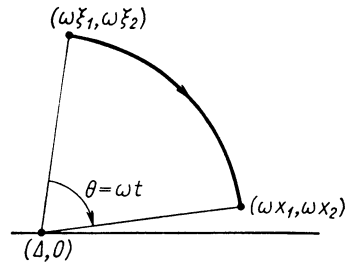


Рис. 7.33. Угол  $\theta = \omega t$  определяет время движения от  $(\xi_1, \xi_2)$  до  $(x_1, x_2)$

и 7.4. Время  $t$ , требующееся для перехода из начального состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  в состояние  $(x_1, x_2)$  по дуге окружности, можно определить по формуле

$$t = \frac{\theta}{\omega}, \quad (7.300)$$

где  $\theta$  — угол, показанный на рис. 7.33.

Мы можем теперь сформулировать задачу об оптимальном по быстродействию управлении гармоническим осциллятором.

**Задача 7.7.** Дана система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix}. \quad (7.301)$$

Управление  $u(t)$  ограничено по величине, т. е.

$$|u(t)| \leq 1. \quad (7.302)$$

Найти допустимое управление, которое переводит систему (7.301) из любого начального состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  в начало координат  $(0, 0)$  за минимальное время.

В этом параграфе мы воспользуемся в основном той же методикой, которой мы следовали ранее. Однако в данном случае верхней границы числа переключений оптимального управления не существует. По этой причине мы не сможем выделить последовательности, которые могут оказаться оптимальными по быстродействию. Этот недостаток информации скомпенсируется дополнительной информацией, даваемой необходимыми условиями относительно максимальной величины времени, в течение которого оптимальное управление может быть постоянным. Поэтому мы снова окажемся в состоянии найти линию переключения для этой задачи. Из-за того, что она окажется сложнее предыдущих, мы потратим несколько больше времени на рассмотрение квазиоптимальных устройств, в кото-

рых используются более «простые» линии переключения. Приступим теперь к решению поставленной задачи.

Гамильтониан данной задачи имеет вид

$$H = 1 + \omega x_2(t) p_1(t) - \omega x_1(t) p_2(t) + u(t) p_2(t). \quad (7.303)$$

Управление, абсолютно минимизирующее гамильтониан, равно:

$$u(t) = -\text{sign} \{p_2(t)\}. \quad (7.304)$$

Дополнительные переменные  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = \omega p_2(t); \\ \dot{p}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -\omega p_1(t), \end{aligned} \right\} \quad (7.305)$$

которые можно записать в векторной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}. \quad (7.306)$$

Система (7.306) имеет тот же вид, что и система (7.295). Этого следовало ожидать потому, что матрица системы  $A$  косо-симметрична. Используя уже знакомые обозначения

$$p_1(0) = \pi_1; \quad p_2(0) = \pi_2, \quad (7.307)$$

находим

$$\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} \quad (7.308)$$

и, в частности,

$$p_2(t) = -\pi_1 \sin \omega t + \pi_2 \cos \omega t. \quad (7.309)$$

Функция  $p_2(t)$  равна сумме двух синусоид, и поэтому сама является синусоидой вида

$$p_2(t) = a \sin(\omega t + \alpha). \quad (7.310)$$

На рис. 7.34 показан типичный вид  $p_2(t)$  и управления  $u(t)$ , полученного по уравнению (7.304), откуда можно сделать следующие выводы:

1. Оптимальное управление должно быть кусочно-постоянной функцией времени и переключаться между двумя значениями  $u(t) = +1$  и  $u(t) = -1$ .

2. Оптимальное управление может оставаться неизменным не дольше, чем в течение  $\frac{\pi}{\omega}$  единиц времени.

3. Верхней границы числа переключений оптимального управления не существует.

4. Функция  $p_2(t)$  не может быть равна нулю на конечном интервале времени, так как для этого должно быть  $\pi_1 = \pi_2 = 0$ , откуда, в свою очередь, имеем  $p_1(t) = p_2(t) = 0$  для всего времени  $t$ , и, следовательно, гамильтониан  $H$  не будет равен нулю, как этого требует принцип минимума. Таким образом, возможность существования вырожденного управления исключена, т. е. рассматриваемая задача нормальна.

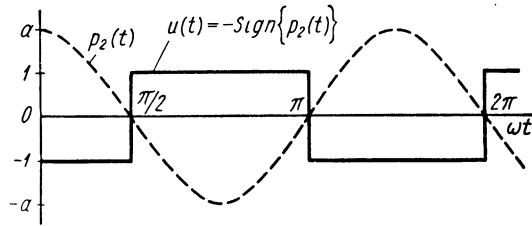


Рис. 7.34. Синусоидальная дополнительная переменная  $p_2(t)$  и управление  $u(t) = -\text{sign} \{p_2(t)\}$

Отсутствие верхней границы числа переключений управления для этой системы второго порядка существенно отличает ее от систем второго порядка (для которых оптимальное управление переключалось не более одного раза), рассмотренных ранее в § 7.2 и 7.3. Как мы увидим далее, линия переключения для систем с комплексными собственными значениями существенно отличается от линии переключения для систем с действительными собственными значениями.

Следующий шаг состоит в том, чтобы найти решение системы (7.301) при постоянном управлении

$$u = \Delta = \pm 1. \quad (7.311)$$

Если начальным состоянием является точка

$$\xi_1 = x_1(0); \quad \xi_2 = x_2(0), \quad (7.312)$$

то решением системы (7.301) будет

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \left( \xi_1 - \frac{\Delta}{\omega} \right) \cos \omega t + \xi_2 \sin \omega t + \frac{\Delta}{\omega}; \\ x_2(t) &= - \left( \xi_1 - \frac{\Delta}{\omega} \right) \sin \omega t + \xi_2 \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (7.313)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \omega x_1(t) &= (\omega \xi_1 - \Delta) \cos \omega t + \omega \xi_2 \sin \omega t + \Delta; \\ \omega x_2(t) &= -(\omega \xi_1 - \Delta) \sin \omega t + \omega \xi_2 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (7.314)$$

Возведём обе части этих уравнений в квадрат, почленно сложим их и после преобразований получим

$$[\omega x_1(t) - \Delta]^2 + [\omega x_2(t)]^2 = (\omega \xi_1 - \Delta)^2 + (\omega \xi_2)^2. \quad (7.315)$$

Это уравнение не содержит времени, и, таким образом, представляет собой уравнение траекторий на плоскости  $\omega x_1 - \omega x_2$ <sup>1</sup>. Очевидно, что эти

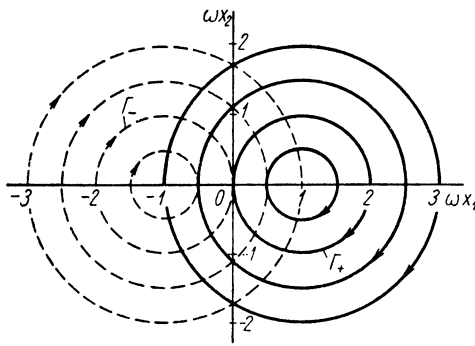


Рис. 7.35. Сплошные окружности представляют собой траектории гармонического осциллятора при  $u = +1$ , пунктирные — при  $u = -1$ . Состояние движется по часовой стрелке

траектории представляют собой окружности на плоскости  $\omega x_1 - \omega x_2$  с центрами в точке  $(\Delta, 0)$ . Следовательно, если  $u = +1$ , то траектории представляют собой окружности с центром в точке  $(1, 0)$ , а если  $u = -1$ , то центром окружности будет точка  $(-1, 0)$ . Эти траектории показаны на рис. 7.35.

Из уравнения (7.314) легко получить аналитическое выражение для времени, требующегося на переход из точки  $(\omega \xi_1, \omega \xi_2)$  в точку  $(\omega x_1, \omega x_2)$ , когда управление  $u = \Delta$ . Это выражение имеет вид

$$t = \frac{1}{\omega} \operatorname{tg}^{-1} \frac{(\omega x_1 - \Delta) \omega \xi_2 - \omega x_2 (\omega \xi_1 - \Delta)}{(\omega x_2) (\omega \xi_2) + (\omega x_1 - \Delta) (\omega \xi_1 - \Delta)}. \quad (7.316)$$

Данная сложная формула имеет очень простую интерпретацию на плоскости  $\omega x_1 - \omega x_2$ . Как показано на рис. 7.36, время можно опреде-

<sup>1</sup> С этого момента мы будем пользоваться плоскостью  $\omega x_1 - \omega x_2$ , а не  $x_1 x_2$ . Можно, конечно, ввести новые переменные  $z_1 = \omega x_1$  и  $z_2 = \omega x_2$ , но это не добавит ничего нового к изложению.

лить, измерив угол  $\theta = \omega t$  дуги окружности между точками  $(\omega\xi_1, \omega\xi_2)$  и  $(\omega x_1, \omega x_2)$ , причем центр дуги расположен в точке  $(\Delta, 0)$ .

На рис. 7.35 отмечены две окружности  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ , проходящие через начало координат плоскости  $\omega x_1 - \omega x_2$ ; на рис. 7.37 они показаны отдельно. Эти окружности можно рассматривать как множества, или геометрические места точек:

$$\Gamma_+ = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1\}; \quad (7.317)$$

$$\Gamma_- = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1\}. \quad (7.318)$$

Любое состояние из  $\Gamma_+$  можно перевести в начало координат при помощи управления  $u = +1$ . В частности, точку  $(2, 0)$  можно перевести в начало координат за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек, так как длина дуги полуокружности

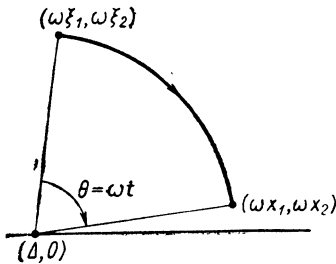


Рис. 7.36. При  $u = \Delta = \pm 1$  угол  $\theta = \omega t$  определяет время, требующееся для перевода точки  $(\omega\xi_1, \omega\xi_2)$  в  $(\omega x_1, \omega x_2)$

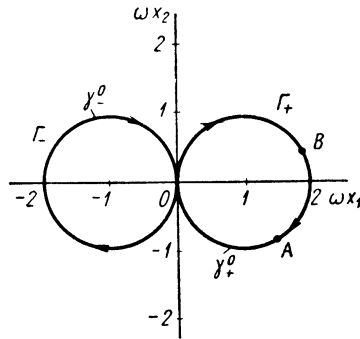


Рис. 7.37. Окружности  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  представляют собой две вынужденные траектории, проходящие через начало координат фазовой плоскости. Полуокружность  $\gamma_+^0$  — нижняя половина окружности  $\Gamma_+$ ;  $\gamma_-^0$  — верхняя половина окружности  $\Gamma_-$

равна точно  $\pi$  рад. Из рис. 7.37 видно, что управление  $u = +1$  переводит точку  $A$  из  $\Gamma_+$  в начало координат быстрее, чем за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек. На перевод в

начало координат точки  $B$  из  $\Gamma_+$  потребуется более  $\frac{\pi}{\omega}$  сек, что прямо противоречит требованию, вытекающему из необходимых условий, согласно которому оптимальное по быстродействию управление не может оставаться постоянным дольше, чем  $\frac{\pi}{\omega}$  сек.

Эти рассуждения приводят к следующему определению.

**Определение 7.18.** Пусть  $\gamma_+^0$  есть множество состояний, которые могут быть переведены в начало координат управлением  $u = +1$  не более, чем за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек. Очевидно, что

$$\gamma_+^0 = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1, \omega x_2 < 0\}. \quad (7.319)$$

Как показано на рис. 7.37, кривая  $\gamma_+^0$  есть часть окружности  $\Gamma_+$ , расположенная ниже оси  $\omega x_1$ , т. е.  $\gamma_+^0$  — полуокружность, расположенная ниже оси  $\omega x_1$ .

**Определение 7.19.** Пусть  $\gamma_-^0$  есть множество состояний, которые могут быть переведены в начало координат управлением  $u = -1$  не более, чем за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек. Очевидно, что

$$\gamma_-^0 = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1, \omega x_2 > 0\}. \quad (7.320)$$

Как показано на рис. 7.37, полуокружность  $\gamma_-^0$  есть часть круга  $\Gamma_-$ , расположенная выше оси  $\omega x_1$ .

Докажем, что кривые  $\gamma_+^0$  и  $\gamma_-^0$  образуют оптимальный путь в начало координат.

**Закон управления 7.7а.** Для данного состояния  $(\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_+^0 \cup \gamma_-^0$  оптимальное по быстродействию управление единственно и равно

$$u^* = u^*(\omega x_1, \omega x_2) = +1 \text{ для всех } (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_+^0;$$

$$u^* = u^*(\omega x_1, \omega x_2) = -1 \text{ для всех } (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_-^0.$$

**Доказательство.** Это утверждение нетрудно доказать, воспользовавшись существованием и единственностью оптимальных и экстремальных управлений. Мы, однако, проведем геометрическое доказательство.

Точка  $A$  расположена на кривой  $\gamma_+^0$  (рис. 7.38). По определению, управление  $u = +1$  переведет точку  $A$  в  $O$  вдоль дуги  $AO$ , которая принадлежит к  $\gamma_+^0$ . Предположим, что в точке  $A$  мы прикладываем управление  $u = -1$ . Получится траектория, являющаяся дугой окружности с центром в точке  $(-1, 0)$ , максимальная длина которой равна  $\pi \text{ рад}$  (на рис. 7.38 дуга  $AC$  равна  $\pi \text{ рад}$ ). Очевидно, что дуга  $AC$  не содержит начала координат  $O$ . Предположим теперь, что мы переключили управление с  $u = -1$  на  $u = +1$  в некоторой точке  $D$  дуги  $AC$ . Траектория, соответствующая  $u = +1$ , есть дуга окружности с центром в точке  $(1, 0)$ , максимальная длина которой равна  $\pi \text{ рад}$  (на рис. 7.38 дуга  $DE$  равна  $\pi \text{ рад}$ ). Так как дуга  $DE$  не содержит начала координат, мы переключим в точке  $E$  управление с  $u = +1$  на  $u = -1$  и получим в результате дугу  $EF$ , которая опять не содержит начала координат, и т. д. Итак, если в точке  $A$  мы прикладываем управление  $u = -1$ , а затем управляющую последовательность в соответствии с принципом минимума, то мы не можем попасть в начало координат, так как все более от него удаляемся. Остается выяснить, почему не может быть оптимальной траектория  $ADGO$ , где точка  $G$  принадлежит кривой  $\gamma_-^0$ . Для того чтобы получить траекторию  $ADGO$ , необходимо подать на систему управляющую последовательность  $\{-1, +1, -1\}$ . Из рис. 7.34 видно, что длины дуг  $AD$  и  $GO$  произвольны (в пределах от 0 до  $\pi$ ), но дуга  $DG$  должна быть равна точно  $\pi \text{ рад}$ , что для траектории  $ADGO$  не соблюдается. Следовательно, траектория  $ADGO$  не может быть оптимальной, поскольку она не удовлетворяет необходимым условиям. Из всех этих рассуждений следует, что для любой точки  $A$  на  $\gamma_+^0$  оптимальным по быстродействию может быть только  $u = +1$ , поскольку не существует других последовательностей, удовлетворяющих необходимым условиям и переводящих точку  $A$  в начало координат. Доказательство завершается аналогичным рассмотрением точек кривой  $\gamma_-^0$ .

**Определение 7.20.** Обозначим через  $R_-^1$  множество состояний, которые можно перевести в точки кривой  $\gamma_+^0$  управлением  $u = -1$  за время, не превышающее  $\frac{\pi}{\omega} \text{ сек}$ . Множество  $R_-^1$  состоит из дуг окружностей с центром  $(-1, 0)$  длиной  $\pi \text{ рад}$ , заканчивающихся в точках кривой  $\gamma_+^0$ . Множество  $R_-^1$  показано на рис. 7.39.

**Определение 7.21.** Обозначим через  $R_+^1$  множество состояний, которые можно перевести в точки кривой  $\gamma_-^0$  управлением  $u = +1$  за время, не превышающее  $\frac{\pi}{\omega} \text{ сек}$ . Множество  $R_+^1$  состоит из дуг окружностей

с центром  $(+1, 0)$  длиной  $\pi$  рад, заканчивающихся в точках кривой  $\gamma_-^0$ . Множество  $R_+^1$  показано на рис. 7.39.

**Определение 7.22.** Обозначим через  $\gamma_-^1$  множество состояний, которые можно перевести в точки кривой  $\gamma_+^0$  управлением  $u = -1$  точно за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек. Кривая  $\gamma_-^1$  показана на рис. 7.39 и представляет собой полуокружность, расположенную выше оси  $\omega x_1$  с центром в точке  $(-3, 0)$ :

$$\gamma_-^1 = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + 3)^2 + (\omega x_2)^2 = 1; \omega x_2 > 0\}. \quad (7.321)$$

**Определение 7.23.** Обозначим через  $\gamma_+^1$  множество состояний, которые можно перевести в точки кривой  $\gamma_-^0$  управлением  $u = +1$  точно за

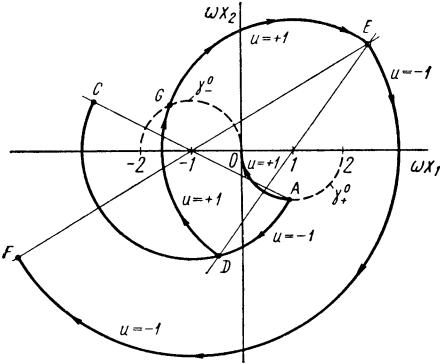


Рис. 7.38. Примеры оптимальных и не-оптимальных траекторий

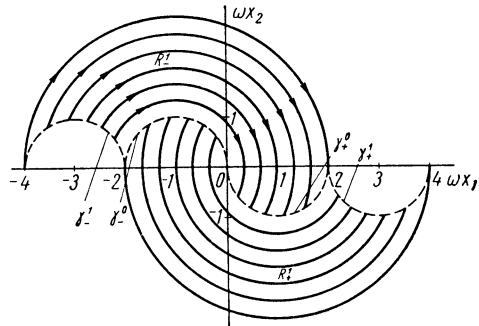


Рис. 7.39. Полуокружности  $\gamma_+^0, \gamma_-^0, \gamma_+^1, \gamma_-^1$  и области  $R_+^1$  и  $R_-^1$

$\frac{\pi}{\omega}$  сек. Кривая  $\gamma_+^1$  показана на рис. 7.39 и представляет собой полуокружность, расположенную ниже оси  $\omega x_1$  с центром в точке  $(+3, 0)$ :

$$\gamma_+^1 = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - 3)^2 + (\omega x_2)^2 = 1; \omega x_2 < 0\}. \quad (7.322)$$

На базе этих определений можно сформулировать следующий закон управления.

**Закон управления 7.7б.** Если задано состояние  $(\omega x_1, \omega x_2) \in R_+^1 \cup R_-^1$ , то оптимальное управление является единственным и равняется

$$u^* = u^*(\omega x_1, \omega x_2) = +1 \text{ для всех } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_+^1;$$

$$u^* = u^*(\omega x_1, \omega x_2) = -1 \text{ для всех } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_-^1.$$

Доказательство этого закона управления очень похоже на доказательство закона управления 7.7а. Выбрав точку из  $R_-^1$ , надо показать, что единственной управляющей последовательностью, удовлетворяющей необходимым условиям принципа минимума, является следующая.

Управление  $u = -1$  прикладывается до тех пор, пока не будет достигнута кривая  $\gamma_+^0$ , а затем нужно переключить управление на  $u = +1$  и прикладывать его до тех пор, пока не будет достигнута точка  $(0, 0)$ . Читатель может самостоятельно провести доказательство этого с помощью построений, аналогичных рис. 7.38.

Обобщим эти понятия в виде ряда определений.



**Определение 7.24.** Обозначим через  $\gamma'_+$ ,  $j = 1, 2, \dots$  полуокружности единичного радиуса, расположенные ниже оси  $\omega x_1$ , с центрами в точках  $(2j + 1, 0)$ :

$$\gamma'_+ = \{(\omega x_1, \omega x_2) : [\omega x_1 - (2j + 1)]^2 + (\omega x_2)^2 = 1; \omega x_2 > 0\}. \quad (7.323)$$

**Определение 7.25.** Обозначим через  $\gamma'_-$ ,  $j = 1, 2, \dots$  полуокружности единичного радиуса, расположенные выше оси  $\omega x_1$ , с центрами в точках  $(-2j - 1, 0)$ :

$$\gamma'_- = \{(\omega x_1, \omega x_2) : [\omega x_1 + (2j + 1)]^2 + (\omega x_2)^2 = 1; \omega x_2 > 0\}. \quad (7.324)$$

Эти кривые  $\gamma'_+$  и  $\gamma'_-$  показаны на рис. 7.40.

**Определение 7.26.** Обозначим через  $R'_-$ ,  $j = 1, 2, \dots$  множество состояний, которые можно перевести в точки кривой  $\gamma'^{j-1}_+$  не дольше, чем за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек управлением  $u = -1$ , а через  $R'_+$ ,  $j = 1, 2, \dots$  множество состояний, которые можно перевести в точки кривой  $\gamma'^{j-1}_-$  не дольше, чем за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек управлением  $u = +1$ . Множества  $R'_-$  и  $R'_+$  показаны на рис. 7.40.

Из последних определений следует, что кривая  $\gamma'_-$  есть геометрическое место всех состояний, которые можно перевести точно за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек в точки кривой  $\gamma'^{j-1}_+$  управлением  $u = -1$ , а кривая  $\gamma'_+$  — геометрическое место состояний, которые можно также перевести точно за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек в точки кривой  $\gamma'^{j-1}_-$  управлением  $u = +1$ . Иначе говоря, кривую  $\gamma'_-$  можно получить из кривой  $\gamma'^{j-1}_+$ , повернув каждую точку кривой  $\gamma'^{j-1}_+$  вокруг центра  $(-1, 0)$  на угол, равный  $180^\circ$ ; кривая  $\gamma'_+$  получается аналогичным образом, но центром в этом случае является точка  $(+1, 0)$ .

Определим линию переключения  $\gamma$  соотношением

$$\gamma = \left[ \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma'_+ \right] \cup \left[ \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma'_- \right] = \gamma_+ \cup \gamma_-. \quad (7.325)$$

Если принять

$$\left. \begin{aligned} R_- &= \bigcup_{j=0}^{\infty} R'_-; \\ R_+ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} R'_+, \end{aligned} \right\} \quad (7.326)$$

то  $R_-$  будет представлять собой множество точек, расположенных выше линии переключения  $\gamma$ , а  $R_+$  — множество точек, расположенных ниже  $\gamma$ .

Можно сформулировать оптимальный по быстродействию закон управления для задачи 7.7 следующим образом.

**Закон управления 7.7 (решение задачи 7.7).** Оптимальное по быстродействию управление как функция состояния  $(\omega x_1, \omega x_2)$  определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(\omega x_1, \omega x_2) = +1 \text{ для всех } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_+ \cup \gamma_+ \\ u^* &= u^*(\omega x_1, \omega x_2) = -1 \text{ для всех } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_- \cup \gamma_-, \end{aligned} \right\} \quad (7.327)$$

где  $R_+$ ,  $R_-$ ,  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  определяются уравнениями (7.325) и (7.326). Оптимальное управление единственно.

Мы опускаем доказательство этого закона управления, потому что основные идеи его были изложены при обсуждении законов управления

7.7а и 7.7б. Доказательство опирается на единственность экстремальных управлений и существование оптимального управления к началу координат. Итак, если начальное состояние находится выше линии переключения  $\gamma$ , то оптимальным по быстродействию является управление  $u^* = -1$ ; если начальное состояние ниже кривой  $\gamma$ , то оптимальным является управление  $u^* = +1$ . На рис. 7.41 показаны две различные траектории в начало координат.

Рассмотрим рис. 7.41 более внимательно. Линия переключения  $\gamma$  показана пунктиром; сплошными линиями изображены две оптимальные по быстродействию траектории. Рассмотрим траекторию  $ABCDEFO$ ; управление, за счет которого получена эта траектория, переключается

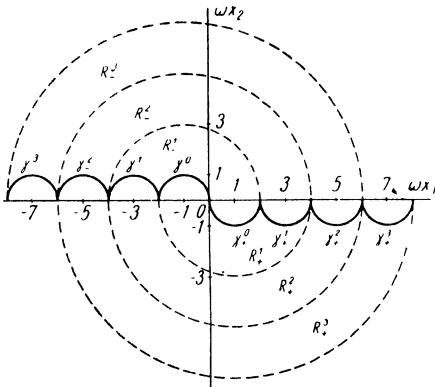


Рис. 7.40. Полуокружности  $\gamma_{\pm}^j$  и  $\gamma_{\pm}^j = 0, 1, 2, \dots$  и области  $R_{\pm}^j$  и  $R_{\pm}^j, j = 1, 2, \dots$

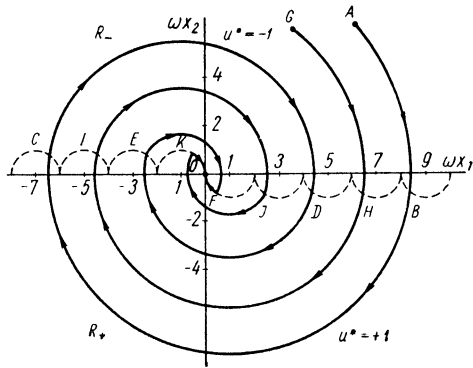


Рис. 7.41. Линия переключения  $\gamma$  показана пунктирной кривой.  $R_-$  — область состояний выше линии переключения,  $R_+$  — ниже линии переключения. Сплошными кривыми показаны две оптимальные по быстродействию траектории  $ABCDEFO$  и  $GHIJKO$

пять раз (в точках  $B, C, D, E$  и  $F$  на линии переключения). Легко видеть <sup>1</sup>, что отрезок  $AB$  целиком принадлежит множеству  $R_-^5$ , отрезок  $BC$  принадлежит множеству  $R_+^4$ , отрезок  $CD$  — множеству  $R_-^3$  и т. д. Дуги окружностей  $BC, CD, DE$  и  $EF$  имеют длину точно  $\pi$  рад, а дуги  $AB$  и  $FO$  короче  $\pi$  рад. Таким образом, управляющая последовательность удовлетворяет необходимым условиям. Заметим, что единственным участком траектории, совпадающим с кривой  $\gamma$ , является отрезок дуги  $FO$ , который действительно принадлежит кривой  $\gamma_+^0$ . Для оптимальной траектории  $GHIJKO$  только дуга  $KO$  содержится в линии переключения  $\gamma$  и принадлежит кривой  $\gamma_-^0$ . Таким образом, единственным участком линии переключения  $\gamma$ , который может содержать оптимальные траектории, есть объединение кривых  $\gamma_-^0$  и  $\gamma_+^0$ . Другими словами, кривые  $\gamma_{\pm}^j$  и  $\gamma_{\pm}^j$  для  $j = 1, 2, \dots$  не являются частями оптимальных траекторий. Это обстоятельство существенно отличает рассматриваемый случай от систем второго порядка с действительными собственными значениями, для которых вся линия переключения совпадает с траекториями, оптимальными по быстродействию <sup>2</sup>.

Имеется и еще одно отличие гармонического осциллятора от систем второго порядка, рассмотренных в § 7.2 и 7.3. Для последних оптимальное

<sup>1</sup> См. Определение 7.26.

<sup>2</sup> См. § 7.2 — определение 7.4 и рис. 7.3 и 7.6, а также § 7.3 — определение 7.8 и рис. 7.13 и 7.16.

по быстродействию управление требовало наименьшего числа переключений<sup>1</sup>, а для гармонического осциллятора это не справедливо. Как видно из рис. 7.37, точка  $B$  на окружности  $\Gamma_+$  (которая может быть переведена в начало координат управлением  $u = +1$ ) принадлежит множеству  $R_-^1$  и оптимальное по быстродействию управление, переводящее  $B$  в начало координат, переключается один раз. Иначе говоря, для гармонического осциллятора управление, требующее минимального числа переключений, не обязательно является оптимальным по быстродействию.

**Упражнение 7.35.** Покажите, что постоянное управление  $u = +1$  переводит состояние  $(1, 1)$  в плоскости  $\omega x_1 - \omega x_2$  в начало координат за  $\frac{3\pi}{2\omega}$  сек, тогда как оптимальное по быстродействию управление требует только  $\frac{3\pi}{4\omega}$  сек.

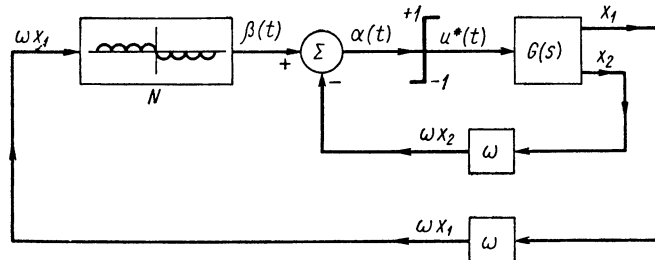


Рис. 7.42. Блок-схема оптимального по быстродействию управляющего устройства для гармонического осциллятора. Характеристика нелинейности  $N$  соответствует (повторяет) линии переключения  $\gamma$

Поскольку закон оптимального управления с обратной связью найден, можно спроектировать оптимальное по быстродействию управляющее устройство. Такое «устройство» показано на рис. 7.42. Мы видим, что структура системы рис. 7.42 похожа на структуру управляющих устройств для двух предшествовавших систем второго порядка, показанных на рис. 7.5 и 7.14 в том смысле, что требуется только один нелинейный элемент. Нелинейность  $N$ , изображенная на рис. 7.42 (зависимость выходной координаты от входной), представляет собой линию переключения  $\gamma$ . Однако ее техническая реализация (например, с помощью диодов) затруднительна. Поэтому рассмотрим способы управления, близкие к оптимальным (см. примеры 7.5 и 7.6), т. е. устройства, построенные на основе оптимальных, но с более простыми нелинейностями.

Так как гармонический осциллятор является основной и очень важной системой, полезно рассмотреть его минимальные изохроны. Так же, как и раньше<sup>2</sup>, мы определим минимальную изохрону  $S(t^*)$  как множество состояний, которые можно перевести в начало координат за одно и то же минимальное время  $t^*$ . На рис. 7.43 изображены минимальные изохроны гармонического осциллятора, соответствующие  $t^*$ . Прежде чем обсуждать свойства изохрон, полезно привести метод их построения. На рис. 7.44 показана типичная оптимальная траектория  $ASO$  в области  $R_+^1$ . Предположим, что минимальное время, которое требуется для перевода  $A$  в  $O$ , равно  $t_A^*$ . Мы хотим построить минимальную изохрону  $S(t_A^*)$ , которая проходит через состояние  $A$ . Для этого:

<sup>1</sup> Это верно и для систем  $N$ -го порядка, рассматриваемых в § 7.5.

<sup>2</sup> См. определение 7.6.

1. Начертим окружность радиуса, равного 2, с центром в точке  $A$  и найдем точку ее пересечения с окружностью  $\Gamma_+$ , т. е. точку  $B$ . Легко показать, что минимальное время  $t_A^*$  можно определить по углу  $\omega t_A^*$  (из подобия треугольников доказывается, что величина угла  $\omega t_A^*$  равна сумме углов  $ANC$  и  $CMO$ ).

2. Начертим окружность радиуса, равного 2, с центром в точке  $B$ , которая начинается из точки  $D$  на кривой  $\gamma_+^1$  и касается границы множества  $R_+^1$  в точке  $E$ . Дуга  $DAE$  есть часть изохроны  $S(t_A^*)$  в области  $R_+^1$ , так как по построению любая точка дуги  $DAE$  требует одного и того же минимального времени  $t_A^*$  для перевода в начало координат.

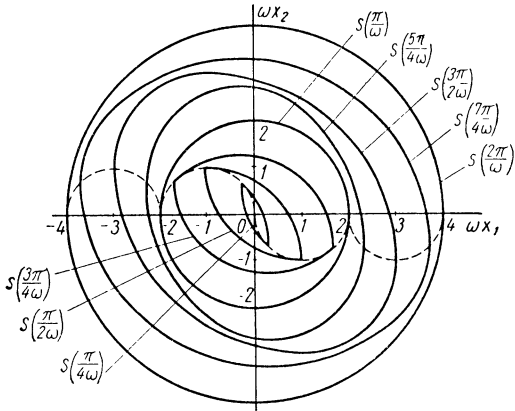


Рис. 7.43. Минимальные изохроны для гармонического осциллятора

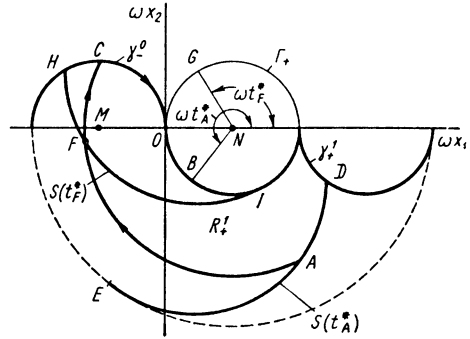


Рис. 7.44. Построение минимальных изохрон  $S(t_A^*)$  и  $S(t_F^*)$

Выберем теперь другую точку в  $R_+^1$  с оптимальной траекторией  $FCO$  и найдем минимальную изохрону  $S(t_F^*)$ , где  $t_F^*$  — минимальное время, за которое  $F$  можно перевести в начало координат.  $S(t_F^*)$  получается построением, аналогичным описанному выше. Окружность радиуса, равного 2, с центром в точке  $F$  пересекает кривую  $\Gamma_+$  в точке  $G$ . Время  $t_F^*$  определяется углом  $\omega t_F^*$  (опять-таки подобие треугольников используется для того, чтобы доказать равенство  $\omega t_F^*$  сумме углов  $FNC$  и  $CMO$ ). Дуга  $HFI$  есть дуга окружности радиуса, равного 2, с центром в точке  $G$ . Эта дуга есть часть минимальной изохроны  $S(t_F^*)$  в  $R_+^1$ , причем точка  $H$  принадлежит кривой  $\gamma_-^0$ , а точка  $I$  — кривой  $\gamma_+^1$ . То же построение можно использовать для любого начального состояния из  $R_-^1$ .

На рис. 7.45 показаны построения для исходного состояния  $K$  из  $R_-^2$ . Оптимальной является траектория  $KPQO$ . Минимальное время  $t_K^*$  можно найти по углу  $\omega t_K^*$  (используя подобие треугольников, можно доказать, что угол  $\omega t_K^*$  равен сумме трех углов  $KMP$ ,  $PNQ$  и  $QMO$ ). Для того чтобы найти  $S(t_K^*)$ , начертим окружность радиуса, равного 4, вокруг точки  $K$  и найдём ее пересечение с окружностью  $\Gamma_-$ , т. е. точку  $L$ . Минимальная изохрона  $S(t_K^*)$  есть дуга  $SKR$  окружности радиуса 4 с центром в точке  $L$ , где  $S$  — точка касания  $S(t_K^*)$  с границей  $R_-^1$  (штриховая линия), а точка  $R$  принадлежит кривой  $\gamma_+^1$ .

Эти методы можно обобщить и построить минимальную изохрону, проходящую через любую заданную точку на плоскости  $\omega x_1 - \omega x_2$ . Ниже мы укажем последовательность действий для построения минимальной изохроны.

\*

**Определение 7.27.** Пусть  $C_m$ ,  $m = 2, 4, 6, \dots$  — множество состояний:

$$(\omega x_1)^2 + (\omega x_2)^2 \leq m^2, \quad m = 2, 4, 6, \dots \quad (7.328)$$

Иначе говоря,  $C_2$  — множество точек круга радиуса, равного 2, с центром в начале координат и т. д.

Изложим методику построения изохрон для состояний ниже линии переключения, так как изохроны для состояний выше линии переключения строятся симметрично.

Пусть задана точка  $A$  ниже линии переключения.

Если  $A \in C_2 \cap R_+^1$ , то изохрона  $S(t_A^*)$  есть дуга окружности радиуса, равного 2, с центром, расположенным на верхней половине окружности  $\Gamma_+$ ,

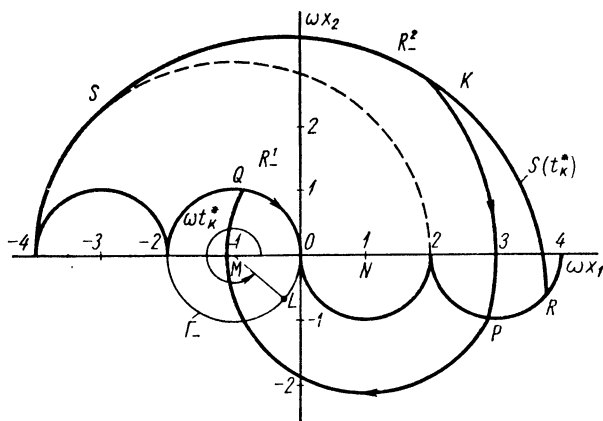


Рис. 7.45. Построение минимальной изохроны  $S(t_K^*)$ , где  $K$  — точка из  $R_-^2$

а если  $A \in R_+^1 - C_2$ , то изохрона  $S(t_A^*)$  есть дуга окружности радиуса, равного 2, с центром, расположенным на нижней половине окружности  $\Gamma_+$ .

Если  $A \in C_4 \cap R_+^2$ , то изохрона  $S(t_A^*)$  есть дуга окружности радиуса, равного 4, с центром, расположенным на верхней половине окружности  $\Gamma_+$ , а если  $A \in R_+^2 - C_4$ , то изохрона  $S(t_A^*)$  есть дуга окружности, радиуса равного 4, с центром, расположенным на нижней половине окружности  $\Gamma_+$ . В общем случае, если  $A \in C_{2j} \cap R_+^j$ ;  $j = 1, 2, \dots$ , то изохрона  $S(t_A^*)$  есть дуга окружности радиуса  $2j$  с центром, расположенным на верхней половине окружности  $\Gamma_+$ . Для  $A \in R_+^j - C_{2j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  изохрона  $S(t_A^*)$  есть дуга окружности радиуса  $2j$  с центром, расположенным на нижней половине окружности  $\Gamma_+$ .

**Упражнение 7.36.** Разработайте ваши собственные правила построения минимальной изохроны  $S(t^*)$ , когда задано  $t^*$ . Нарисуйте изохроны  $S\left(\frac{7\pi}{8\omega}\right)$  и  $S\left(\frac{7\pi}{4\omega}\right)$ .

Теперь мы в состоянии сделать выводы относительно минимальных изохрон гармонического осциллятора и сравнить их с минимальными изохронами для объекта с двойным интегрированием (§ 7.2, рис. 7.7)<sup>1</sup>. Читателю следует обращаться к рис. 7.43, чтобы проверить справедливость следующих заключений:

1. Минимальные изохроны в множестве  $C_2$ , т. е. в круге радиуса, равного 2, с центром в начале координат, состоят из двух дуг, симметрич-

<sup>1</sup> А также для системы из упражнения 7.22.

ных относительно кривых  $\gamma_-^0$  и  $\gamma_+^0$  [см., например, изохроны  $S\left(\frac{\pi}{4\omega}\right)$ ,  $S\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$ ,  $S\left(\frac{3\pi}{4\omega}\right)$  на рис. 7.43]. Эти изохроны имеют «углы» на кривых  $\gamma_-^0$  и  $\gamma_+^0$ . Последнее означает, что каждая из минимальных изохрон  $S(t^*)$ ,  $0 < t^* < \frac{\pi}{\omega}$  дифференцируема везде, за исключением точек сопряжения дуг, принадлежащих кривым  $\gamma_-^0$  и  $\gamma_+^0$ . В этом отношении изохроны  $S(t^*)$ ,  $0 < t^* < \frac{\pi}{\omega}$  «похожи» на изохроны системы с двойным интегрированием (см. рис. 7.7).

2. Минимальные изохроны  $S\left(\frac{i\pi}{\omega}\right)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  представляют собой окружности с центром в начале координат радиуса  $2i$ . Очевидно, что окружности дифференцируемы везде и не имеют углов.

3. Минимальные изохроны  $S(t^*)$ ,  $t^* > \frac{\pi}{\omega}$ ,  $t^* \neq \frac{i\pi}{\omega}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  состоят из дуг четырех окружностей. Как видно из рис. 7.43 (изохроны  $S\left(\frac{5\pi}{4\omega}\right)$ ,  $S\left(\frac{3\pi}{2\omega}\right)$ ,  $S\left(\frac{7\pi}{4\omega}\right)$ ), эти изохроны дифференцируемы везде. Иначе говоря, все минимальные изохроны  $S(t^*)$ ,  $t^* > \frac{\pi}{\omega}$  не имеют «углов» ни на линиях переключения, ни где-либо еще<sup>1</sup>. В этом смысле изохроны при  $t^* \geq \frac{\pi}{\omega}$  отличны от изохрон при  $t < \frac{\pi}{\omega}$ , а следовательно, отличны и от изохрон систем с действительными значениями.

4. Центры всех окружностей, дуги которых образуют изохроны, лежат на окружностях  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  (см. рис. 7.37). Следовательно, при «больших» значениях  $t^*$  изохроны «стремятся» к «чистым» окружностям. Это свойство позволяет проектировать хорошие системы, близкие к оптимальным (см. примеры 7.5 и 7.6).

Обратим теперь наше внимание на задачу об управлении, близком к оптимальному, которая, по сути дела, состоит в том, чтобы заменить сложную нелинейность  $N$ , показанную на рис. 7.42, нелинейностью, которая реализуется более просто. Поскольку связи между входом и выходом нелинейности  $N$  (см. рис. 7.42) идентичны линии переключения, задачу о субоптимальном управлении можно рассматривать как задачу об аппроксимации линии переключения. Рассмотрим два примера, иллюстрирующих такую аппроксимацию.

**Пример 7.5.** Напомним, что линия переключения  $\gamma$  была определена как

$$\gamma = \left[ \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_+^j \right] \cup \left[ \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_-^j \right]. \quad (7.329)$$

Рассмотрим кривую

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} \gamma_+^0 \cup \gamma_-^0, & |\omega x_1| \leq 2; \\ \omega x_2 = 0, & |\omega x_1| > 2. \end{cases} \quad (7.330)$$

$$(7.331)$$

Кривая  $\hat{\gamma}$  показана на рис. 7.46. Кривые  $\gamma_-^j$  и  $\gamma_+^j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  в этом случае заменены осью  $\omega x_1$ . Управление  $u = -1$  используется для любого состояния выше, а  $u = +1$  — ниже кривой  $\hat{\gamma}$ . Типичные траектории, производимые таким субоптимальным управлением, показаны штриховыми линиями на рис. 7.46. Очевидно, что этот субоптимальный закон управления переводит любое исходное состояние в начало координат; иначе говоря, закон управления устойчив.

<sup>1</sup> Это, естественно, означает, что для каждой точки  $S(t^*)$ ,  $t^* > \frac{\pi}{\omega}$  можно определить единственную опорную прямую.

Практическая реализация этого субоптимального закона идентична системе, показанной на рис. 7.42, с той лишь разницей, что нелинейность  $N$  (см. рис. 7.42) заменена нелинейностью  $\hat{N}$  (рис. 7.47). Нелинейность  $\hat{N}$  реализуется намного проще, чем нелинейность  $N$ . Для того чтобы решить, насколько целесообразна такая субоптимальная система, нужно вычертить минимальные изохроны, соответствующие кривой  $\hat{\gamma}$ , и сравнить их с минимальными изохронами рис. 7.43. Различия между временами  $\hat{t}$  и  $t^*$  показано на рис. 7.48. На этом рисунке показано относительное увеличение времени перехода из состояний, расположенных на оси  $\omega x_1$ . Очевидно, что время перехода в обоих случаях одинаково для состояний  $|\omega x_1| \leq 2$ ,  $|\omega x_1| = 4$ ,  $|\omega x_1| = 6 \dots$ , потому что для них значения кривой  $\hat{\gamma}$  тождественны значениям кривой  $\gamma$ . Из рис. 7.48 видно также, что максимальное относительное увеличение времени не превышает 4,3%, а для точек, достаточно удаленных от начала координат, время  $\hat{t}$  стремится к  $t^*$ . Последнее следует из того обстоятельства, что минимальные и субоптимальные изохроны с удалением исходного состояния (от начала координат) стремятся к одним и тем же окружностям. Для многих практических систем увеличение времени переходного процесса на 4,3% вполне приемлемо, и поэтому такое субоптимальное устройство часто оказывается весьма полезным.

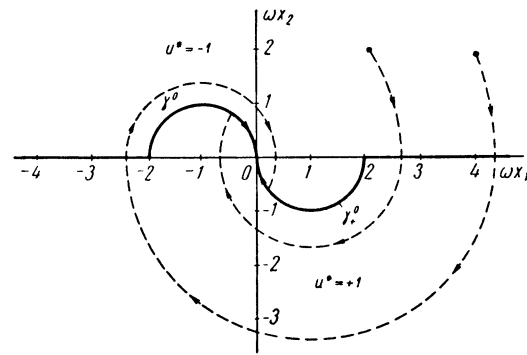


Рис. 7.46. Линия переключения  $\hat{\gamma}$  для субоптимальной системы из примера 7.5. Управление  $u = -1$  выше и  $u = +1$  ниже линии переключения. Пунктирными кривыми показаны траектории, получающиеся при субоптимальном законе управления

Пример 7.6. Предположим, что мы аппроксимируем линию переключения  $\gamma$  кривой  $\tilde{\gamma}$ :

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} \gamma_+^0 \cup \gamma_-^0 & \text{при } |\omega x_1| \leq 1; \\ \omega x_2 = -1 & \text{при } \omega x_1 > 1; \\ \omega x_2 = +1 & \text{при } \omega x_1 < -1. \end{cases} \quad (7.332)$$

Кривая  $\tilde{\gamma}$  показана на рис. 7.49. Субоптимальный закон управления для нее формулируется следующим образом:

Управление  $u = -1$  используется для всех состояний выше, а  $u = +1$  — ниже кривой  $\tilde{\gamma}$ . Типичные траектории, соответствующие такому субоптимальному закону управления, показаны штриховыми линиями на рис. 7.49. Этот закон управления также переводит любое исходное состояние в начало координат, и поэтому закон управления устойчив.

Реализация такого закона идентична реализации оптимального закона управления, показанного на рис. 7.42, с той лишь разницей, что нелинейность  $N$  заменена нелинейностью  $\tilde{N}$ , изображенной на рис. 7.50. Нелинейность  $\tilde{N}$  реализовать еще легче, чем нелинейность  $\hat{N}$ . Однако в общем случае время переходного процесса будет больше, чем с нелинейностью  $\hat{N}$ .

Следующие четыре упражнения связаны с субоптимальным и оптимальным управлением гармоническим осциллятором.

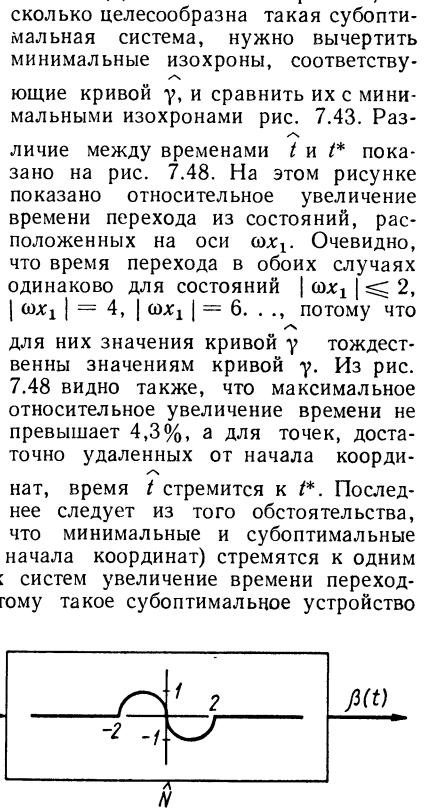


Рис. 7.47. Характеристика нелинейности  $\hat{N}$ , необходимая для построения субоптимальной системы из примера 7.5

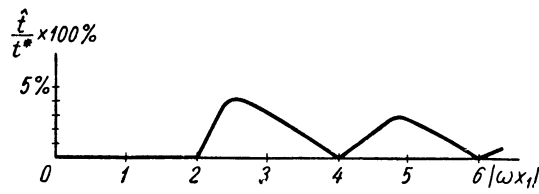


Рис. 7.48. График зависимости  $\frac{\hat{t}}{t^*} 100\%$  от  $|\omega x_1|$

**Упражнение 7.37.** Пусть  $\tilde{t}$  — время, требующееся для перевода произвольного исходного состояния на оси  $\omega x_1$  при помощи субоптимальной системы с нелинейностью  $\tilde{N}$ . Нарисуйте график  $\frac{\tilde{t}}{t^*} \cdot 100\%$  в зависимости от  $|\omega x_1|$ , аналогичный рис. 7.48. Покажите, что максимальное значение  $\frac{\tilde{t}}{t^*} \cdot 100\%$  больше, чем  $\frac{\hat{t}}{t^*} \cdot 100\%$ .

**Упражнение 7.38.** Покажите, что в случае, когда вся линия переключения  $\gamma$  аппроксимируется осью  $\omega x_1$  (субоптимальный закон управления есть  $u = -\text{sign} \{\omega x_2\}$ ), произвольное исходное состояние может быть переведено не в начало координат, а только в замкнутый сегмент  $|\omega x_1| \leq 1, \omega x_2 = 0$ .

**Упражнение 7.39.** Покажите, что закон управления  $u = -\text{sign} \{\omega x_2 + \text{sign} \{\omega x_1\}\}$  даст предельный цикл, проходящий через точки  $(0, 1)$  и  $(0, -1)$ .

**Упражнение 7.40.** Дан гармонический осциллятор с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Пусть  $u(t), |u(t)| \leq 1$  — управление на входе объекта, а

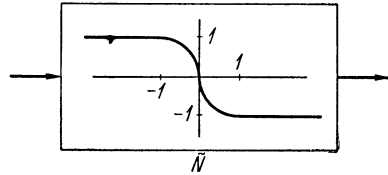


Рис. 7.50. Характеристика нелинейности  $\tilde{N}$ , требующаяся для получения субоптимальной линии переключения  $\tilde{\gamma}$

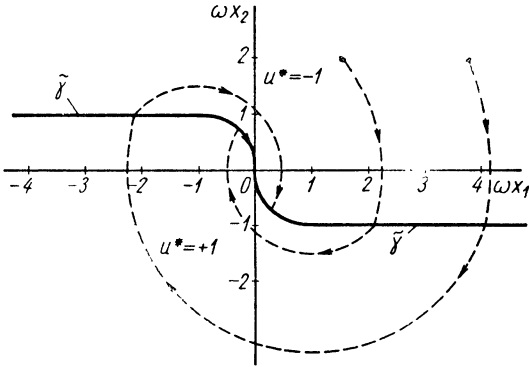


Рис. 7.49. Линия переключения  $\tilde{\gamma}$  для субоптимальной системы из примера 7.6. Управление  $u = -1$  выше  $\tilde{\gamma}$  и  $u = +1$  ниже нее. Пунктиром показаны траектории, соответствующие этому субоптимальному закону управления

$y(t)$  — его выход с произвольными начальными условиями  $y(0)$  и  $\dot{y}(0)$ . На вход системы подается ступенчатый сигнал  $r(t) = r$ , постоянный при  $t \geq 0$  и ограниченный соотношением  $|r| \leq 1$ . Определите сигнал ошибки  $e(t) = r(t) - y(t)$  и получите оптимальное управление как функцию от  $e(t)$  и  $\dot{e}(t)$  такое, чтобы ошибка  $e(t)$  и ее скорость  $\dot{e}(t)$  обращались в нуль за минимальное время

В следующих трех упражнениях рассматривается задача об оптимальном по быстродействию управлении гармоническим осциллятором, когда конечное состояние  $(\theta_1, \theta_2)$  не обязательно является началом координат.

**Упражнение 7.41.** Рассмотрите систему (7.301) с ограничением управления (7.302). Пусть  $(\theta_1, \theta_2)$  — произвольное конечное состояние и  $(\xi_1, \xi_2)$  — произвольное начальное состояние. Покажите, что оптимальное по быстродействию управление, переводящее систему (7.301) из любого начального  $(\xi_1, \xi_2)$  в любое конечное состояние  $(\theta_1, \theta_2)$  существует.

**Упражнение 7.42.** Рассмотрите систему (7.301) при  $\omega = 1$ , с ограничением управления (7.302). Предположите, что желаемым конечным состоянием является  $(1, 1)$ . Найдите оптимальное управление с обратной связью, переводящее систему из произвольного начального состояния в состояние  $(1, 1)$ . Постройте линии переключения. Рассмотрите единственность экстремальных управлений. У к а з а н и е: см. упражнение 7.15. Нарисуйте некоторые минимальные изохроны и исследуйте непрерывность поверхности минимальных времен. У к а з а н и е: см. упражнение 7.16.

**Упражнение 7.43.** Повторите упражнение 7.42 для состояния  $(1, -1)$ .

Последние три упражнения относятся к случаю, когда  $S$  является некоторой областью пространства состояний.

**Упражнение 7.44.** Рассмотрите систему (7.301) при  $\omega = 1$  и ограничении управления (7.302). Рассмотрите замкнутое, невыпуклое множество  $\hat{S}$ , определяемое соотношением

$$\hat{S} = \{(x_1, x_2) : x_1 = 1, x_2 = 0 \text{ или } x_1 = -1, x_2 = 0\}$$



т. е. область  $\widehat{S}$  состоит из двух изолированных точек  $(1, 0)$  и  $(-1, 0)$ . Покажите, что оптимальное управление к  $\widehat{S}$  существует для любого исходного состояния. Единственно ли оно? Единственны ли экстремальные управления? Найдите оптимальный закон управления. Нарисуйте минимальные изохроны. У к а з а н и е: см. упражнение 7.17.

**Упражнение 7.45.** Рассмотрите систему (7.301) при  $\omega = 1$  с ограничением управления (7.302). Областью цели  $S$  является область

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq (0,5)^2\}.$$

Покажите, что оптимальным законом управления является закон, показанный на рис. 7.51. У к а з а н и е: см. [179] и сравните с упражнением 7.19. Покажите, что линия переключения не состоит из оптимальных траекторий.

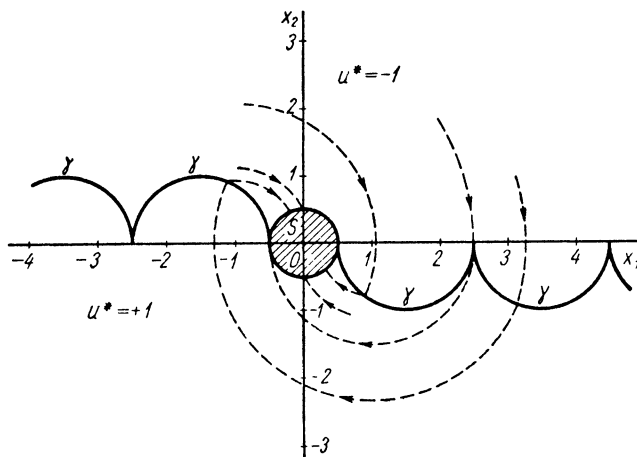


Рис. 7.51. Оптимальный по быстродействию закон управления для упражнения 7.45:  $u^* = -1$  для состояний, расположенных выше, и  $u^* = +1$  — ниже линии переключения  $\gamma$ . Пунктиром показаны оптимальные по быстродействию траектории к области цели  $S$

**Упражнение 7.46.** Повторите упражнение 7.45 для следующих областей:

$$S_1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = (1,5)^2\}; \quad S_2 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 2^2\}.$$

Найдите оптимальный по быстродействию закон управления для состояний внутри и вне окружностей.

## 7.8. УПРАВЛЕНИЕ УСТОЙЧИВЫМ ГАРМОНИЧЕСКИМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ<sup>1</sup>

В предыдущем параграфе мы рассмотрели физические системы, которые описывались уравнениями типа гармонического осциллятора. Мы полагаем, что в системах, рассмотренных в примерах 7.3 и 7.4, трение отсутствовало. Если в тех же системах имеется вязкое трение, то их называют гармоническими осцилляторами с демпфированием. Кратко рассмотрим оптимальное по быстродействию управление такими системами. Исследуем систему второго порядка, описываемую дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy(t)}{dt} + (\alpha^2 + \omega^2) y(t) = Ku(t), \quad (7.333)$$

где  $y(t)$  — выход;  
 $u(t)$  — управление с обычным ограничением:

$$|u(t)| \leq 1 \text{ для } t \geq 0; \quad (7.334)$$

<sup>1</sup> См. работы [39], [42] и [122].

$K$  — положительный коэффициент усиления;  
 $\alpha$  и  $\omega$  — постоянные, причем

$$\alpha > 0; \quad \omega > 0. \quad (7.335)$$

В теории регулирования система (7.333) описывается передаточной функцией

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{K}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}. \quad (7.336)$$

Искушенный читатель знает, что полюса  $G(s)$  являются комплексно сопряженными числами

$$s = -\alpha \pm j\omega. \quad (7.337)$$

На рис. 7.52 показано изображение  $G(s)$  на плоскости  $s$ . Постоянную  $\omega$  иногда называют собственной частотой, а постоянную  $\alpha$  — коэффициентом демпфирования.

Обозначим через

$$y_1(t) = y(t); \quad y_2(t) = \dot{y}(t) \quad (7.338)$$

фазовые координаты системы. Эти координаты удовлетворяют векторному дифференциальному уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha^2 + \omega^2) & -2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K u(t) \end{bmatrix}. \quad (7.339)$$

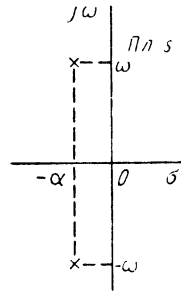


Рис. 7.52. Расположение на плоскости  $s$  полюсов устойчивого гармонического осциллятора с демпфированием

Удобно ввести новую пару координат  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , применив соответствующее линейное преобразование, а именно:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}. \quad (7.340)$$

Эти новые переменные удовлетворяют векторному дифференциальному уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \omega \\ -\omega & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix}. \quad (7.341)$$

**Упражнение 7.47.** Проверьте уравнение (7.341).

**Упражнение 7.48.** Покажите, что если вращающееся тело из примера 7.4 подвержено трению, то дифференциальные уравнения относительно скоростей имеют вид (7.341).

Отметим, что если в уравнении (7.341) положить  $\alpha = 0$ , то получится дифференциальное уравнение гармонического осциллятора без демпфирования. Матрицу системы (7.341) можно представить в виде суммы диагональной и косо-симметричной матриц:

$$\begin{bmatrix} -\alpha & \omega \\ -\omega & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.342)$$

Диагональная матрица соответствует действительным частям полюсов или собственным значениям, а косо-симметричная — мнимым частям полюсов или собственным значениям.

Сформулируем теперь задачу об оптимальном по быстродействию управлении гармоническим осциллятором с демпфированием.

**Задача 7.8.** Для системы (7.341) найти управление  $u(t)$ , удовлетворяющее ограничению  $|u(t)| \leq 1$  и переводящее произвольное исходное состояние  $(\xi_1, \xi_2)$  в начало координат  $(0, 0)$  за минимальное время. Будем решать эту задачу методами § 7.7, и поэтому не будем излагать деталей решения.

Гамильтониан  $H$  имеет вид

$$H = 1 - \alpha x_1(t) p_1(t) + \omega x_2(t) p_1(t) - \omega x_1(t) p_2(t) - \alpha x_2(t) p_2(t) + u(t) p_2(t). \quad (7.343)$$

Управление, абсолютно минимизирующее гамильтониан, имеет вид

$$u(t) = -\text{sign}\{p_2(t)\}. \quad (7.344)$$

Дополнительные переменные  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  удовлетворяют векторному дифференциальному уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}. \quad (7.345)$$

Фундаментальная матрица  $\Psi$  системы (7.345) равна

$$\Psi(t) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}. \quad (7.346)$$

Пусть

$$M(t) := \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}. \quad (7.347)$$

Очевидно, что  $M(t)$  — ортогональная матрица<sup>1</sup>. Поскольку дополнительный вектор  $p(t)$  выражается как

$$p(t) = e^{\alpha t} M(t) \pi, \quad \pi = p(0); \quad (7.348)$$

$$\|p(t)\| = e^{\alpha t} \|\pi\|, \quad (7.349)$$

то это означает, что вектор  $p(t)$  движется по спирали, раскручивающейся от начала координат плоскости  $p_1 p_2$ . Интересующая нас функция  $p_2(t)$  выражается соотношением

$$p_2(t) = e^{\alpha t} (\pi_1 \cos \omega t + \pi_2 \sin \omega t). \quad (7.350)$$

Поскольку  $\alpha > 0$ , функция  $p_2(t)$  есть произведение возрастающей экспоненты на синусоиду. На рис. 7.53 показан типичный вид функции  $p_2(t)$  и управления  $u(t)$ , определяемого соотношением (7.344) как функция от  $p_2(t)$ .

Отметим следующие свойства управления  $u(t)$ :

1)  $u(t)$  должно быть кусочно-постоянно и переключаться между значениями  $u = +1$  и  $u = -1$ ;

2)  $u(t)$  не может оставаться постоянным дольше, чем  $\frac{\pi}{\omega}$  сек;

3) не должно существовать верхней границы числа переключений;

4) исключено существование вырожденного управления.

Заметим, что эти необходимые условия оптимального управления аналогичны условиям § 7.7.

<sup>1</sup> См. уравнения (2.109)—(2.111).

Перейдем к решению уравнения (7.341) для управления

$$u = \Delta = \pm 1. \quad (7.351)$$

Если принять, что

$$\xi_1 = x_1(0); \quad \xi_2 = x_2(0), \quad (7.352)$$

то после громоздких алгебраических преобразований можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1(t) = & \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} \xi_1 e^{-\alpha t} \cos \omega t + \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} \xi_2 e^{-\alpha t} \times \\ & \times \sin \omega t - \Delta \frac{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \psi) + \Delta; \end{aligned} \quad (7.353)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2(t) = & -\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\alpha} \xi_1 e^{-\alpha t} \sin \omega t + \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\alpha} \xi_2 e^{-\alpha t} \times \\ & \times \cos \omega t - \Delta \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \psi) + \Delta \frac{\alpha}{\omega}, \end{aligned} \quad (7.354)$$

где  $\psi = \arctg \frac{\omega}{\alpha}$ . (7.355)

Заметим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \Delta; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \Delta \frac{\alpha}{\omega}. \quad (7.356)$$

Уравнениям (7.353)–(7.355) соответствуют логарифмические спирали, стремящиеся к точке  $(\Delta, \Delta \frac{\alpha}{\omega})$  плоскости  $(\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} x_1, \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} x_2)$ .

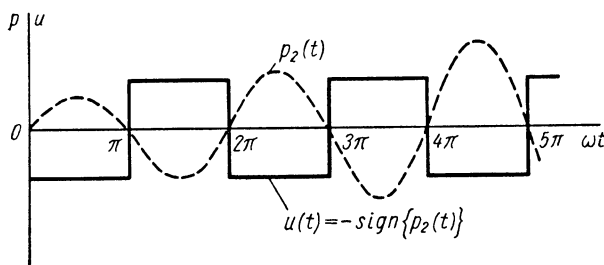


Рис. 7.53. Типичный вид  $p_2(t)$  и управления, соответствующего уравнению (7.344)

К сожалению, из-за трансцендентности уравнений (7.353) и (7.354) исключить из них время и получить фазовые траектории невозможно.

Сформулируем определение.

**Определение 7.28.** Обозначим через  $\gamma_+^0$  множество состояний, которые можно перевести в начало координат управлением  $u = \Delta = +1$  не дольше, чем за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек, а через  $\gamma_-^0$  — состояния, переводимые в начало координат за то же время управлением  $u = -1$ . Очевидно, что эти кривые  $\gamma_+^0$  и  $\gamma_-^0$  образуют путь в начало координат, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности.

Вид кривых  $\gamma_+^0$  и  $\gamma_-^0$  показан на рис. 7.54. С помощью аргументов, аналогичных приведенным в § 7.7, можно показать (методом исключения), что  $\gamma_+^0$  и  $\gamma_-^0$  являются оптимальными траекториями, ведущими в начало координат.

Приемом, аналогичным использованному в § 7.7, построим последовательность кривых  $\gamma_+^j$  и  $\gamma_-^j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Определим кривую  $\gamma_-^1$  как

множество всех точек, которые могут быть переведены в точки кривой  $\gamma_+^0$  ровно за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек управлением  $u = -1$ . Точно так же определим кривую  $\gamma_+^1$  как множество всех точек, переводимых в точки кривой  $\gamma_-^0$  ровно за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек управлением  $u = +1$ . Итак, имеем следующие определения.

**Определение 7.29.** Кривые  $\gamma_-^j, j = 1, 2, \dots$  есть множества точек, которые можно перевести управлением  $u = -1$  в точки кривых  $\gamma_+^{j-1}$

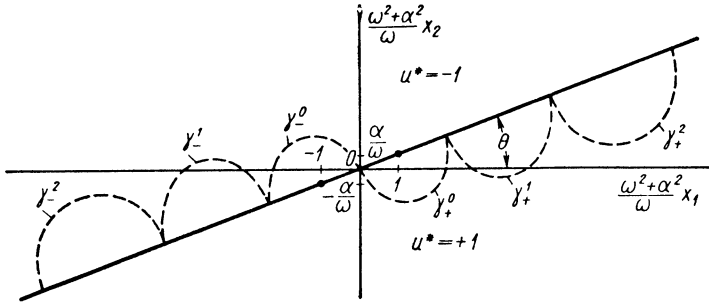


Рис. 7.54. Линия переключения  $\gamma$  для гармонического осциллятора с демпфированием. Оптимальным является управление  $u^* = -1$  для состояния выше линии переключения и  $u^* = +1$  — ниже нее

ровно за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек. Кривые  $\gamma_+^j, j = 1, 2, \dots$  есть множества точек, переводимых управлением  $u = +1$  в точки кривых  $\gamma_-^{j-1}$  ровно за  $\frac{\pi}{\omega}$  сек.

Кривые  $\gamma_+^j$  и  $\gamma_-^j$  показаны на рис. 7.54.

**Определение 7.30.** Линия переключения  $\gamma$  есть объединение кривых  $\gamma_+^j$  и  $\gamma_-^j$ :

$$\gamma = \left\{ \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_+^j \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_-^j \right\}. \quad (7.357)$$

**Закон управления 7.8 (решение задачи 7.8).** Оптимальное по быстродействию управление как функция состояния  $\left( \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$  определяется по следующим правилам:

Если  $\left( \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$  выше линии  $\gamma$ , то  $u^* = -1$ .

Если  $\left( \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$  ниже линии  $\gamma$ , то  $u^* = +1$ .

Если  $\left( \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right) \in \gamma_+^0$ , то  $u^* = +1$ .

Если  $\left( \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right) \in \gamma_-^0$ , то  $u^* = -1$ .

Сравним рис. 7.54 с рис. 7.40 и исследуем роль постоянной  $\alpha$ . Из рис. 7.54 нетрудно видеть, что при  $\alpha \rightarrow 0$  угол  $\theta \rightarrow 0$ , и кривая  $\gamma$  рис. 7.54 превращается в кривую  $\gamma$ , идентичную рис. 7.40. При  $\alpha > 0$  размер  $\gamma_+^j$  и  $\gamma_-^j$  растет с ростом номера  $j$ . Это является естественным следствием увеличения размера спиральных траекторий, который определяется членом  $e^{-\alpha t}$ .

**Упражнение 7.49.** Аппроксимируйте кривую  $\gamma$  и получите субоптимальное управление. У к а з а н и е: просмотрите еще раз примеры 7.5 и 7.6. Возьмите значения  $\omega = 5$  и  $\alpha = 1$  и постройте точную кривую  $\gamma$  и ее аппроксимации, которые вы предлагаете. Определите, насколько хороша каждая из аппроксимаций, построив для этого графики отношения прироста времени перехода в  $(0; 0)$  к его минимально возможному значению.

**Упражнение 7.50.** Рассмотрите систему, которая описывается дифференциальным уравнением

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix}; \quad |u(t)| \leq 1, \quad (7.358)$$

для  $\alpha > 0, \omega > 0$ . Эта система представляет собой неустойчивый гармонический осциллятор, поскольку собственные значения матрицы системы равны  $\alpha + j\omega$  и  $\alpha - j\omega$ . Прежде всего найдите область начальных состояний, для которых возможно достичь начала координат (так как система сама по себе неустойчива, то существуют такие исходные состояния, когда ограниченное управление «недостаточно» для перевода их в начало координат). Для найденной области управляемых состояний найдите линию переключения и оптимальный по быстрдействию закон управления. У к а з а н и е: кривые  $\gamma_+^j$  и  $\gamma_-^j$  для этой системы уменьшаются с ростом номера  $j$ ; см. также [42].

### 7.9. УПРАВЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ ПРИ ПОМОЩИ ДВУХ ВХОДНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ<sup>1</sup>

В предыдущих параграфах настоящей главы мы рассматривали задачи об оптимальном управлении динамическими системами, когда управление осуществлялось единственной переменной  $u(t)$ , удовлетворяющей ограничению  $|u(t)| \leq 1$ . В этом параграфе мы рассмотрим задачу об оптимальном управлении динамической системой с двумя управляющими переменными  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , которые удовлетворяют ограничениям  $|u_1(t)| \leq 1$  и  $|u_2(t)| \leq 1$ . Мы постараемся на примере этой простой системы показать читателю, что способы, развитые для случая единственной управляющей переменной, нетрудно распространить и на случай нескольких управляющих переменных. Хотя законы управления и оказываются сложнее, однако основные понятия не представляют каких-либо принципиальных трудностей.

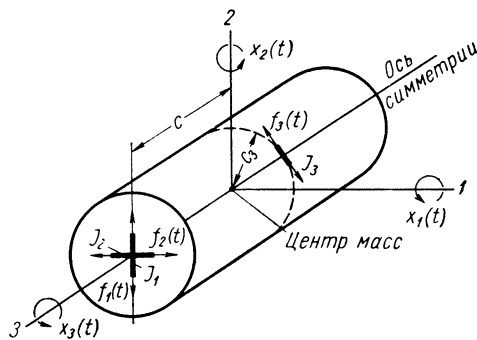


Рис. 7.55. Космическое тело с одной осью симметрии

Система, которую мы рассмотрим в настоящем параграфе, представляет собой вращающийся космический летательный аппарат, описанный в примере 7.4. Для полноты изложения мы еще раз составим дифференциальные уравнения его движения.

Рассмотрим тело в пространстве с единственной осью симметрии<sup>2</sup>, показанное на рис. 7.55. Выберем три основные оси тела 1, 2 и 3 и обозначим через  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$  угловые скорости (в *рад/сек*) относительно этих трех осей соответственно. Пусть  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  — моменты инерции относительно тех же осей. Известно<sup>3</sup>, что при отсутствии внешних момен-

<sup>1</sup> См. работы [5], [9] и [179].

<sup>2</sup> Существует много спутников и возвращаемых космических кораблей нецилиндрической формы с единственной осью симметрии, например, капсулы Меркурий, Джеминай и Аполлон, а также другие проекты космических станций.

<sup>3</sup> См. работу [85], гл. 5.

тов дифференциальные уравнения для угловых скоростей  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{x}_1(t) &= (I_2 - I_3) x_2(t) x_3(t); \\ I_2 \dot{x}_2(t) &= (I_3 - I_1) x_3(t) x_1(t); \\ I_3 \dot{x}_3(t) &= (I_1 - I_2) x_1(t) x_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.359)$$

Обычно они называются уравнениями движения Эйлера. Если на тело действуют внешние моменты, то дифференциальные уравнения движения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{x}_1(t) &= (I_2 - I_3) x_2(t) x_3(t) + \tau_1(t); \\ I_2 \dot{x}_2(t) &= (I_3 - I_1) x_3(t) x_1(t) + \tau_2(t); \\ I_3 \dot{x}_3(t) &= (I_1 - I_2) x_1(t) x_2(t) + \tau_3(t), \end{aligned} \right\} \quad (7.360)$$

где  $\tau_1(t)$ ,  $\tau_2(t)$  и  $\tau_3(t)$  — моменты относительно осей 1, 2 и 3 соответственно, которые представляют собой компоненты вектора момента

$$\tau(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \\ \tau_3(t) \end{bmatrix}. \quad (7.361)$$

Рассмотрим тело, показанное на рис. 7.55. Поскольку ось 3 есть ось симметрии, моменты инерции  $I_1$  и  $I_2$  равны, т. е.

$$I_1 = I_2 = I. \quad (7.362)$$

Пусть теперь  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  — три реактивных двигателя, укрепленных на космическом аппарате так, как это показано на рис. 7.55. Очевидно, что двигатель  $J_3$  создает момент  $\tau_3(t)$  только около одной оси 3;  $J_2$  — момент  $\tau_2(t)$  около оси 2 и  $J_1$  — момент  $\tau_1(t)$  — относительно оси 1. Предположим, что двигатели жестко прикреплены к аппарату и могут развивать тягу в обоих направлениях.

Пусть  $c$  — расстояние между плоскостью, проходящей через двигатели  $J_1$  и  $J_2$ , и плоскостью, в которой расположены оси 1 и 2, а  $c_3$  — расстояние двигателя  $J_3$  от оси 3 (для цилиндра  $c$  равно половине его высоты, а  $c_3$  — его радиусу). Если  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  и  $f_3(t)$  — тяги, развиваемые двигателями  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$ , то

$$\tau_1(t) = c f_1(t); \quad \tau_2(t) = c f_2(t); \quad \tau_3(t) = c_3 f_3(t). \quad (7.363)$$

Воспользовавшись уравнениями (7.363) и (7.362), приводим уравнения движения (7.360) к виду

$$\dot{x}_1(t) = \frac{I - I_3}{I} x_3(t) x_2(t) + \frac{c}{I} f_1(t); \quad (7.364)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{I - I_3}{I} x_3(t) x_1(t) + \frac{c}{I} f_2(t); \quad (7.365)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{c_3}{I_3} f_3(t). \quad (7.366)$$

Исследуем эти уравнения. Предположим, что в момент времени  $t = 0$  три скорости были равны:

$$x_1(0) = \xi_1; \quad x_2(0) = \xi_2; \quad x_3(0) = \xi_3. \quad (7.367)$$

Очевидно, что если тяга  $f_3(t)$  известна, то уравнение (7.366) можно проинтегрировать и получить:

$$x_3(t) = \xi_3 + \int_0^t \frac{c_3}{I_3} f_3(\tau) d\tau. \quad (7.368)$$

Таким образом, скоростью  $x_3(t)$  можно управлять независимо от скоростей  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , и поэтому  $x_3(t)$  можно рассматривать как известную функцию времени. Из-за того, что величина  $x_3(t)$  фигурирует в выражениях (7.364) и (7.365), скорость  $x_3(t)$  влияет на скорости<sup>1)</sup>  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

Рассмотрим задачу об оптимальном управлении скоростью, вытекающую из некоторых физических соображений. Предположим, что рассматриваемый аппарат является возвращаемой капсулой и что постоянное его вращение вокруг оси симметрии требуется с точки зрения устойчивости. Предположим, что скорость  $x_3(t)$  установлена равной желаемой величине (например,  $\xi_3$ ) при помощи одного только двигателя  $J_3$ . Если капсула вращалась также относительно осей 1 и 2, то при  $x_3 = \xi_3$  скорости  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  не будут равны нулю. Поэтому желательно сделать скорости  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  равными нулю за минимальное время, поддерживая при этом неизменной скорость  $x_3(t) = \xi_3$ . Другим примером является обитаемая космическая станция с искусственной гравитацией, получаемой путем вращения станции с постоянной скоростью вокруг оси симметрии. Здесь также может потребоваться уменьшить до нуля угловые скорости  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  за минимальное время<sup>2)</sup>. В обоих случаях требуется поддерживать скорость  $x_3(t)$  неизменной, а  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  уменьшать до нуля.

Если принять в уравнениях (7.366) и (7.367)

$$f_3(t) = 0, \quad (7.369)$$

то будем иметь

$$x_3(t) = \xi_3 = \text{const}. \quad (7.370)$$

Считаем, что тяги  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  двигателей  $J_1$  и  $J_2$  ограничены по величине:

$$|f_1(t)| \leq F; \quad |f_2(t)| \leq F, \quad (7.371)$$

т. е. двигатели  $J_1$  и  $J_2$  одинаковы.

Примем

$$\omega = \frac{I - I_3}{I} \xi_3; \quad (7.372)$$

$$k = \frac{c}{I} F; \quad (7.373)$$

$$u_1(t) = \frac{f_1(t)}{F}; \quad (7.374)$$

$$u_2(t) = \frac{f_2(t)}{F}. \quad (7.375)$$

Подставив эти величины в уравнения (7.364) и (7.365), получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \omega x_2(t) + k u_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega x_1(t) + k u_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.376)$$

<sup>1)</sup> Это происходит благодаря хорошо известному гироскопическому эффекту.

<sup>2)</sup> Это необходимо для того, чтобы исключить эффекты, вызываемые изменениями гравитации. Если эти изменения значительны, они могут отрицательно сказаться на людях и оборудовании.



В этой системе уравнений угловые скорости  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  можно считать переменными состояниями (фазовыми координатами) системы, а величины  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  — управляющими переменными, которые ввиду уравнений (7.371), (7.374) и (7.375) удовлетворяют ограничениям

$$|u_1(t)| \leq 1; \quad |u_2(t)| \leq 1 \text{ для любого } t. \quad (7.377)$$

Теперь сформулируем физический смысл задачи управления: необходимо найти тяги  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , уменьшающие скорости  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  до нуля за минимальное время. Эта постановка эквивалентна математической задаче 7.9.

**Задача 7.9.** Дана система, которая описывается дифференциальным уравнением:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (7.378)$$

где

$$|u_1(t)| \leq 1; \quad |u_2(t)| \leq 1. \quad (7.379)$$

Найти управления  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , которые переводят любое начальное состояние

$$x_1(0) = \xi_1; \quad x_2(0) = \xi_2 \quad (7.380)$$

в начало координат  $(0, 0)$  за минимальное время.

Сравнивая уравнение (7.378) с (7.301), легко заметить, что матрица систем одна и та же. Поэтому систему (7.378) можно рассматривать как недемпфированный гармонический осциллятор.

Используем принцип минимума для определения необходимых условий, которым должно удовлетворять оптимальное управление. Гамильтониан задачи об оптимальном по быстродействию управлении для системы (7.378) выражается уравнением

$$H = 1 + \omega x_2(t) p_1(t) - \omega x_1(t) p_2(t) + ku_1(t) p_1(t) + ku_2(t) p_2(t), \quad (7.381)$$

где дополнительные переменные  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  являются решениями дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = \omega p_2(t); \\ \dot{p}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -\omega p_1(t), \end{aligned} \right\} \quad (7.382)$$

которые могут быть записаны в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}. \quad (7.383)$$

Замечаем, что уравнение (7.383) тождественно уравнению (7.306), и поэтому фундаментальная матрица  $\Phi_1(t)$  системы (7.383) определяется уравнением (7.296), откуда

$$p_1(t) = \pi_1 \cos \omega t + \pi_2 \sin \omega t; \quad (7.384)$$

$$p_2(t) = -\pi_1 \sin \omega t + \pi_2 \cos \omega t, \quad (7.385)$$

где

$$\pi_1 = p_1(0); \quad \pi_2 = p_2(0). \quad (7.386)$$

Управления  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , абсолютно минимизирующие гамильтониан  $H$ , для положительного  $k$  выражаются соотношениями

$$u_1(t) = -\text{sign}\{p_1(t)\}; \quad (7.387)$$

$$u_2(t) = -\text{sign}\{p_2(t)\}. \quad (7.388)$$

Из последних уравнений следует, что функции  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  являются синусоидами частоты  $\omega$ , и, кроме того, функция  $p_2(t)$  с точностью до произвольной постоянной равна производной по времени от  $p_1(t)$ . Это положение можно сформулировать следующим образом: «синусоида  $p_2(t)$  на  $90^\circ$  опережает по фазе синусоиду  $p_1(t)$ ». На рис. 7.56 показаны две такие синусоиды  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  и управления  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , найденные

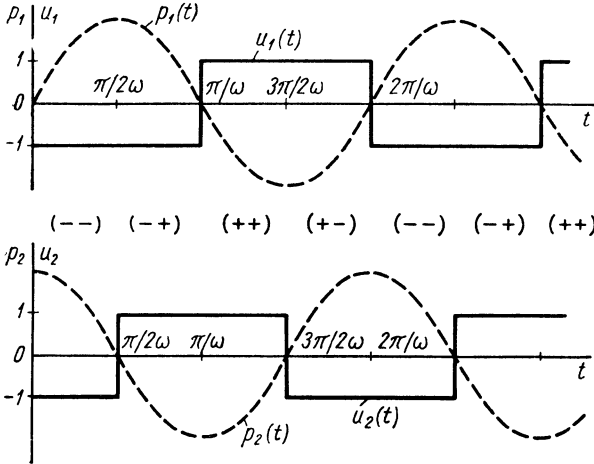


Рис. 7.56. Две синусоиды  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  и два кусочно-постоянных управления  $u_1(t) = -\text{sign}\{p_1(t)\}$  и  $u_2(t) = -\text{sign}\{p_2(t)\}$

по уравнениям (7.387) и (7.388). При внимательном рассмотрении рис. 7.56 обнаруживаются следующие обстоятельства, вытекающие из необходимых условий принципа минимума:

1. Каждое из управлений  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  является кусочно-постоянной функцией времени, переключающейся между значениями  $+1$  и  $-1$ . Верхней границы числа переключений не существует.

2. Поскольку синусоиды изменяют свою полярность через  $\frac{\pi}{\omega}$  сек, то каждое из управлений может оставаться постоянным не дольше, чем  $\frac{\pi}{\omega}$  сек.

3. Интервал времени, в течение которого остаются неизменными обе управляющие переменные  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , не превышает  $\frac{\pi}{2\omega}$  сек.

4. Если управление  $u_1(t)$  постоянно на интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$ , где  $t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ , то управление  $u_2(t)$  должно переключаться точно при  $t_3 = t_1 + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$  и наоборот.

5. Как видно из рис. 7.56, последовательность полярностей управлений должна быть

$$\dots, (--) , (-+) , (++) , (+-) , (--), \dots, \\ (-+)(++)(+-), \dots, \quad (7.389)$$

где символ (— —) означает, что на конечном интервале времени имеет место  $u_1 = -1, u_2 = -1$ , а символ (— +) означает, что  $u_1 = -1, u_2 = +1$ , и т. д. Последовательность (7.389) означает также, что полярность управлений в данный момент времени определяет их полярности в последующий момент времени. Например, если в данный момент времени оба управления положительны (+ +), то следующим должно переключиться с +1 на -1 управление  $u_2$ , и получится (+ —). Комбинации (— —) или (— +) непосредственно после (+ +) исключаются. Как мы увидим, эта информация позволяет найти оптимальный по быстродействию закон управления методом исключения, хорошо знакомым по предыдущим параграфам.

6. Вырожденного управления не существует (почему?).

Следующий шаг состоит в решении системы уравнений (7.378) для постоянных управлений

$$u_1(t) = \Delta_1 = \pm 1; \quad (7.390)$$

$$u_2(t) = \Delta_2 = \pm 1. \quad (7.391)$$

Решение, выраженное через начальные условия  $x_1(0) = \xi_1; x_2(0) = \xi_2$ , имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \omega x_1(t) &= (\omega \xi_1 - k\Delta_2) \cos \omega t + (\omega \xi_2 + k\Delta_1) \sin \omega t + k\Delta_2; \\ \omega x_2(t) &= -(\omega \xi_1 - k\Delta_2) \sin \omega t + (\omega \xi_2 + k\Delta_1) \cos \omega t - k\Delta_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.392)$$

Возведя в квадрат и сложив, получим соотношение

$$\begin{aligned} &[\omega x_1(t) - k\Delta_2]^2 + [\omega x_2(t) + k\Delta_1]^2 = \\ &= (\omega \xi_1 - k\Delta_2)^2 + (\omega \xi_2 + k\Delta_1)^2. \end{aligned} \quad (7.393)$$

Это соотношение означает, что оптимальные траектории представляют собой окружности на плоскости  $\omega x_1 - \omega x_2$  с центрами в точках  $(k\Delta_2, -k\Delta_1)$ , причем радиус окружностей зависит от начальных условий. Движение всегда направлено по часовой стрелке. Время  $t$ , требующееся для перехода из начального состояния  $(\omega \xi_1, \omega \xi_2)$  в состояние  $(\omega x_1, \omega x_2)$  вдоль окружности с центром в точке  $(k\Delta_2, -k\Delta_1)$ , равно

$$t = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{(\omega x_1 - k\Delta_2)(\omega \xi_2 + k\Delta_1) - (\omega x_2 + k\Delta_1)(\omega \xi_1 - k\Delta_2)}{(\omega x_2 + k\Delta_1)(\omega \xi_2 + k\Delta_1) + (\omega x_1 - k\Delta_2)(\omega \xi_1 - k\Delta_2)}, \quad (7.394)$$

т. е. время перехода  $t$  можно найти, измерив угол  $\theta$  на рис. 7.57. Итак,

$$t = \frac{\theta}{\omega}. \quad (7.395)$$

Далее будем, как и в § 7.7, рассматривать плоскость  $\omega x_1 - \omega x_2$ .

**Определение 7.31.** Обозначим через  $\Gamma_{++}$  множество состояний  $(\omega x_1, \omega x_2)$ , которые можно перевести в начало координат  $(0, 0)$  управлениями  $u_1 = +1$  и  $u_2 = +1$ , а через  $\Gamma_{+-}$  — множество состояний, переводимых в  $(0, 0)$  управлениями  $u_1 = +1$  и  $u_2 = -1$ . Через  $\Gamma_{-+}$  обозначим множество состояний, которые можно перевести в  $(0, 0)$  управлениями  $u_1 = -1$  и  $u_2 = +1$ , а через  $\Gamma_{--}$  — множество состояний, переводимых в  $(0, 0)$  управлениями  $u_1 = -1$  и  $u_2 = -1$ . Множества  $\Gamma_{++}, \Gamma_{+-}, \Gamma_{-+}$  и  $\Gamma_{--}$  представляют собой окружности, проходящие через начало коор-

динат с центрами, расположенными в точках  $(k, -k)$ ,  $(-k, -k)$ ,  $(k, k)$  и  $(-k, k)$  соответственно:

$$\Gamma_{++} = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - k)^2 + (\omega x_2 + k)^2 = 2k^2\}; \quad (7.396)$$

$$\Gamma_{+-} = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + k)^2 + (\omega x_2 + k)^2 = 2k^2\}; \quad (7.397)$$

$$\Gamma_{-+} = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - k)^2 + (\omega x_2 - k)^2 = 2k^2\}; \quad (7.398)$$

$$\Gamma_{--} = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + k)^2 + (\omega x_2 - k)^2 = 2k^2\}. \quad (7.399)$$

Четыре окружности  $\Gamma_{++}$ ,  $\Gamma_{+-}$ ,  $\Gamma_{-+}$  и  $\Gamma_{--}$  для  $k = 1$  показаны на рис. 7.58.

Следующий шаг состоит в отыскании участков этих окружностей, которые производятся управлениями, удовлетворяющими всем необходимым условиям принципа минимума. Рассмотрим точки  $A$  и  $B$  на окружности  $\Gamma_{++}$ , отмеченные на рис. 7.58. Обе точки можно перевести в начало координат управлениями  $u_1 = +1$  и  $u_2 = -1$ . Время, требующееся для перевода в начало координат точки  $A$ , превышает  $\frac{\pi}{2\omega}$  сек (см. рис. 7.57, где изображена связь угла  $\theta$  со временем). Для перевода в  $O$  точки  $B$  требуется менее  $\frac{\pi}{2\omega}$  сек. Так как одно из управлений должно переключаться не менее одного раза в течение  $\frac{\pi}{2\omega}$  сек, траектория  $AO$  не может быть оптимальной по быстрдействию. Эти рассуждения приводят нас к следующему определению.

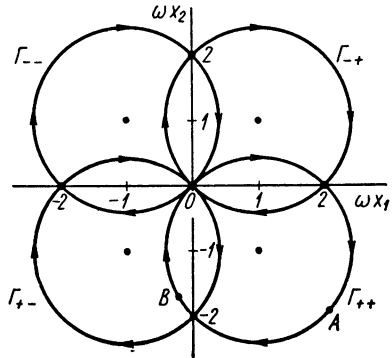


Рис. 7.58. Четыре окружности  $\Gamma_{++}$ ,  $\Gamma_{+-}$ ,  $\Gamma_{-+}$  и  $\Gamma_{--}$ , проходящие через начало координат ( $k = 1$ )

**Определение 7.32.** Обозначим через  $\gamma_{++}^0$  множество состояний  $(\omega x_1, \omega x_2)$ , которые можно перевести в начало координат  $(0, 0)$  не более чем за  $\frac{\pi}{2\omega}$  сек управлениями  $u_1 = +1$ ,  $u_2 = +1$ ; через  $\gamma_{+-}^0$  — управлениями  $u_1 = +1$ ,  $u_2 = -1$ ; через  $\gamma_{-+}^0$  — управлениями  $u_1 = -1$ ,  $u_2 = +1$  и через  $\gamma_{--}^0$  — управлениями  $u_1 = -1$ ,  $u_2 = -1$ . Множества  $\gamma_{++}^0$ ,  $\gamma_{+-}^0$ ,  $\gamma_{-+}^0$  и  $\gamma_{--}^0$  представляют собой четверти окружностей  $\Gamma_{++}$ ,  $\Gamma_{+-}$ ,  $\Gamma_{-+}$  и  $\Gamma_{--}$  соответственно:

$$\gamma_{++}^0 = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - k)^2 + (\omega x_2 + k)^2 = 2k^2, \quad (7.400)$$

$$\omega x_1 \leq 0, -2k \leq \omega x_2 \leq 0\};$$

$$\gamma_{+-}^0 = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + k)^2 + (\omega x_2 + k)^2 = 2k^2, \quad (7.401)$$

$$-2k \leq \omega x_1 \leq 0, \omega x_2 \geq 0\};$$

$$\gamma_{-+}^0 = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - k)^2 + (\omega x_2 - k)^2 = 2k^2, \quad (7.402)$$

$$0 \leq \omega x_1 \leq 2k, \omega x_2 \leq 0\};$$

$$\gamma_{--}^0 = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + k)^2 + (\omega x_2 - k)^2 = 2k^2, \quad (7.403)$$

$$0 \leq \omega x_1, 0 \leq \omega x_2 \leq 2k\}.$$

Четверти окружностей  $\gamma_{++}^0$ ,  $\gamma_{+-}^0$ ,  $\gamma_{-+}^0$  и  $\gamma_{--}^0$  для  $k = 1$  показаны на рис. 7.59.

**Закон управления 7.9а.** Для состояний  $(\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_{++}^0 \cup \gamma_{+-}^0 \cup \gamma_{-+}^0 \cup \gamma_{--}^0$  оптимальными по быстродействию управлениями являются

$$\left. \begin{aligned} u_1^* &= +1, u_2^* = +1 \text{ для } (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_{++}^0; \\ u_1^* &= +1, u_2^* = -1 \text{ для } (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_{+-}^0; \\ u_1^* &= -1, u_2^* = +1 \text{ для } (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_{-+}^0; \\ u_1^* &= -1, u_2^* = -1 \text{ для } (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_{--}^0. \end{aligned} \right\} \quad (7.404)$$

**Упражнение 7.51.** Докажите справедливость закона управления 7.9а. У к а з а н и е: возьмите точку (например, на  $\gamma_{++}^0$ ) и покажите, что из всех управлений, удовлетворяющих всем необходимым условиям, только управления  $u_1 = +1$  и  $u_2 = +1$  переводят это состояние

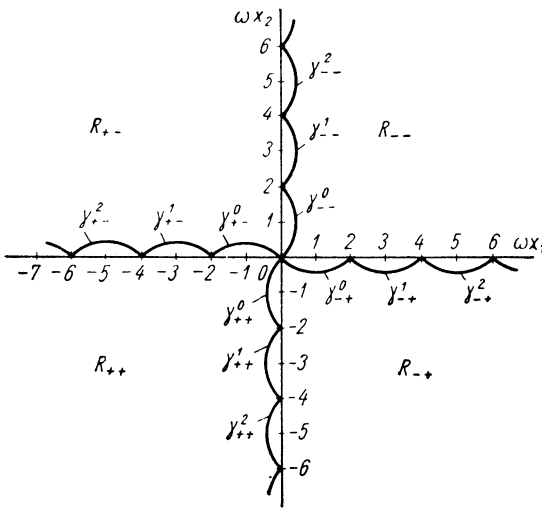


Рис. 7.59. Четверти окружностей  $\gamma_{++}^1, \gamma_{+-}^1, \gamma_{-+}^1$  и  $\gamma_{--}^1$  ( $u = 1$ ) и четыре области  $R_{++}, R_{+-}, R_{-+}$  и  $R_{--}$

в начало координат и поэтому они должны быть оптимальными по быстродействию. Аналогичным образом проводилось доказательство закона управления 7.7а.

Так как кривая  $\gamma_{++}^0$  является оптимальной траекторией движения в начало координат, то должны существовать состояния, для которых часть кривой  $\gamma_{++}^0$  является частью оптимальной траектории движения к началу координат. Поскольку полярности управлений для кривой  $\gamma_{++}^0$  равны  $(+ +)$ , управления, которые переводят исходные состояния в точки кривой  $\gamma_{++}^0$ , должны иметь полярности  $(- +)$ , т. е.  $u_1 = -1, u_2 = +1$ .

Таким образом, можно найти множество состояний, переводимых в точки кривой  $\gamma_{++}^0$  управлениями  $u_1 = -1, u_2 = +1$  за время, меньшее или равное  $\frac{\pi}{2\omega}$  сек<sup>1)</sup>. В частности, можно найти множество состояний  $\gamma_{-+}^1$ , которые могут быть переведены в точки кривой  $\gamma_{++}^0$  управлениями  $u_1 = -1, u_2 = +1$  точно за  $\frac{\pi}{2\omega}$  сек. Эти соображения приводят к следующему определению.

**Определение 7.33.** Обозначим:

через  $\gamma_{-+}^1$  множество состояний, переводимых в точки кривой  $\gamma_{++}^0$  точно за  $\frac{\pi}{2\omega}$  сек управлениями  $u_1 = -1, u_2 = +1$ .

через  $\gamma_{--}^1$  множество состояний, переводимых в точки кривой  $\gamma_{--}^0$  точно за  $\frac{\pi}{2\omega}$  сек управлениями  $u_1 = -1, u_2 = -1$ ;

<sup>1)</sup> Аналогичным образом были определены множества  $R_{-}^1$  и  $R_{+}^1$  (см. определения 7.20 и 7.21).

через  $\gamma_{+-}^1$  множество состояний, переводимых в точки кривой  $\gamma_{--}^0$  точно за  $\frac{\pi}{2\omega}$  сек управлениями  $u_1 = +1, u_2 = -1$ ;

через  $\gamma_{++}^1$  множество состояний, переводимых в точки кривой  $\gamma_{+-}^0$  точно за  $\frac{\pi}{2\omega}$  сек управлениями  $u_1 = +1, u_2 = +1$ .

Эти кривые получены путем поворота на  $90^\circ$  против часовой стрелки кривых  $\gamma_{++}^0, \gamma_{+-}^0, \gamma_{--}^0, \gamma_{+-}^0$  вокруг центров:

кривая  $\gamma_{-+}^1$  поворотом  $\gamma_{++}^0$  вокруг  $(k, k)$ ;

кривая  $\gamma_{--}^1$  поворотом  $\gamma_{+-}^0$  вокруг  $(-k, k)$ ;

кривая  $\gamma_{+-}^1$  поворотом  $\gamma_{--}^0$  вокруг  $(-k, -k)$ ;

кривая  $\gamma_{++}^1$  поворотом  $\gamma_{+-}^0$  вокруг  $(k, -k)$ .

Определим последовательность таких кривых.

**Определение 7.34.** Обозначим через  $\gamma'_{-+}, \gamma'_{--}, \gamma'_{+-}$  и  $\gamma'_{++}, j = 1, 2, 3, \dots$  кривые, построенные следующим образом:

кривая  $\gamma'_{-+}$  — вращением кривой  $\gamma_{++}^{j-1}$  вокруг точки  $(k, k)$ ;

кривая  $\gamma'_{--}$  — вращением кривой  $\gamma_{+-}^{j-1}$  вокруг точки  $(-k, k)$ ;

кривая  $\gamma'_{+-}$  — вращением кривой  $\gamma_{--}^{j-1}$  вокруг точки  $(-k, -k)$ ;

кривая  $\gamma'_{++}$  — вращением кривой  $\gamma_{+-}^{j-1}$  вокруг точки  $(k, -k)$ .

Уравнения кривых  $\gamma'_{-+}, \gamma'_{--}, \gamma'_{+-}, \gamma'_{++}, j = 1, 2, 3, \dots$  имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma'_{++} &= \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - k)^2 + [\omega x_2 + (2j + 1)k]^2 = 2k^2; \\ &\quad \omega x_1 \leq 0; \quad -(2j + 2)k \leq \omega x_2 \leq -2jk\}; \end{aligned} \quad (7.405)$$

$$\begin{aligned} \gamma'_{+-} &= \{(\omega x_1, \omega x_2) : [\omega x_1 + (2j + 1)k]^2 + (\omega x_2 + k)^2 = 2k^2; \\ &\quad -(2j + 2)k \leq \omega x_1 \leq -2jk; \quad \omega x_2 \geq 0\}; \end{aligned} \quad (7.406)$$

$$\begin{aligned} \gamma'_{-+} &= \{(\omega x_1, \omega x_2) : [\omega x_1 - (2j + 1)k]^2 + (\omega x_2 - k)^2 = 2k^2; \\ &\quad 2jk \leq \omega x_1 \leq (2j + 2)k; \quad \omega x_2 \leq 0\}; \end{aligned} \quad (7.407)$$

$$\begin{aligned} \gamma'_{--} &= \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + k)^2 + [\omega x_2 - (2j + 1)k]^2 = 2k^2; \\ &\quad \omega x_1 \geq 0; \quad 2jk \leq \omega x_2 \leq (2j + 2)k\}. \end{aligned} \quad (7.408)$$

Кривые  $\gamma'_{++}, \gamma'_{+-}, \gamma'_{-+}, \gamma'_{--}$  показаны на рис. 7.59.

Теперь можно найти четыре линии переключения:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{++} &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma'_{++}; \\ \gamma_{+-} &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma'_{+-}; \\ \gamma_{-+} &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma'_{-+}; \\ \gamma_{--} &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma'_{--}. \end{aligned} \right\} \quad (7.409)$$

Эти четыре линии переключения делят всю плоскость  $\omega x_1 - \omega x_2$  на четыре области (или множества)  $R_{++}, R_{+-}, R_{--}, R_{-+}$ , как показано на рис. 7.59. Иными словами,

- $R_{++}$  — множество точек слева от кривой  $\gamma_{++}$  и ниже кривой  $\gamma_{+-}$ ;
- $R_{+-}$  — множество точек слева от кривой  $\gamma_{--}$  и выше кривой  $\gamma_{+-}$ ;
- $R_{--}$  — множество точек справа от кривой  $\gamma_{--}$  и выше кривой  $\gamma_{-+}$ ;
- $R_{-+}$  — множество точек справа от кривой  $\gamma_{++}$  и ниже кривой  $\gamma_{-+}$ .

**Закон управления 7.9. Решение задачи 7.9.** Оптимальное управление  $u^*$  как функция от состояния  $(\omega x_1, \omega x_2)$  определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u_1^* &= +1, u_2^* = +1 \text{ для всех } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{++} \cup \gamma_{++}; \\ u_1^* &= +1, u_2^* = -1 \text{ для всех } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{+-} \cup \gamma_{+-}; \\ u_1^* &= -1, u_2^* = +1 \text{ для всех } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{-+} \cup \gamma_{-+}; \\ u_1^* &= -1, u_2^* = -1 \text{ для всех } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{--} \cup \gamma_{--}. \end{aligned} \right\} (7.410)$$

Оптимальное управление  $u^*$  единственно.

**Упражнение 7.52.** Докажите справедливость закона управления 7.9.

На рис. 7.60 показаны различные оптимальные по быстрдействию траектории, идущие в начало координат для  $k = 1$ . Отметим, что последовательность полярностей управлений соответствует последовательности (7.389).

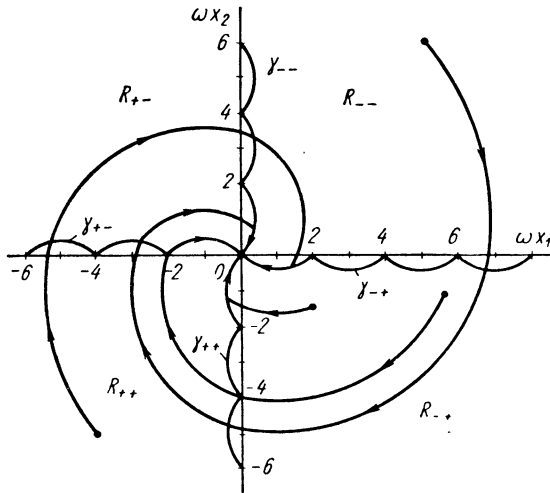


Рис. 7.60. Некоторые оптимальные по быстрдействию траектории к началу координат

Перейдем к технической реализации закона управления 7.9. Блок-схема оптимальной по быстрдействию системы с обратной связью показана на рис. 7.61. Система управления измеряет сигналы  $\omega x_1$  и  $\omega x_2$ , определяет, к какой из областей ( $R_{++}, R_{+-}, R_{-+}, R_{--}$ ) принадлежит состояние  $(\omega x_1, \omega x_2)$ , и на основании этого вырабатывает оптимальные управления  $u_1^*(t)$  и  $u_2^*(t)$  в соответствии с законом управления 7.9. Заметим, что для состояний из  $R_{--}$  и  $R_{-+}$   $u_1^* = -1$ , а для состояний из  $R_{+-}$  и  $R_{++}$   $u_1^*(t) = +1$  независимо от значения  $u_2(t)$ ; для состояний из  $R_{+-}$  и  $R_{--}$   $u_2^*(t) = -1$ , а для состояний из  $R_{++}$  и  $R_{-+}$   $u_2^*(t) = +1$  независимо от  $u_1^*(t)$ . Таким образом, для схемы, показанной на рис. 7.61, имеем

$$\left. \begin{aligned} \text{если } \text{sign} \{m(t)\} &= +1, \text{ то } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{++} \cup R_{-+}; u_2^* = +1; \\ \text{если } \text{sign} \{m(t)\} &= -1, \text{ то } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{+-} \cup R_{--}; u_2^* = -1; \\ \text{если } \text{sign} \{n(t)\} &= +1, \text{ то } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{-+} \cup R_{++}; u_1^* = +1; \\ \text{если } \text{sign} \{n(t)\} &= -1, \text{ то } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{--} \cup R_{+-}; u_1^* = -1. \end{aligned} \right\} (7.411)$$

Как показано на рис. 7.61, сигнал  $\omega x_1$  подается на нелинейность  $N_1$ , а сигнал  $\omega x_2$  — на нелинейность  $N_2$ . Нелинейности  $N_1$  и  $N_2$  одинаковы. Зависимость между входным и выходным сигналом каждой из них соответствует линиям переключения  $\gamma_{-+}$  и  $\gamma_{+-}$  (или  $\gamma_{--}$  и  $\gamma_{++}$ ).

На рис. 7.62 показана система ручного управления, оптимального по быстродействию. Переменные состояния (фазовые координаты)  $\omega x_1$  и  $\omega x_2$  измеряются и подаются на входы  $X$  и  $Y$  осциллографа, на экране которого нарисована линия переключения. Оператор определяет, к какой области принадлежит состояние, и нажимает соответствующие кнопки, управляющие реактивными двигателями <sup>1</sup>.

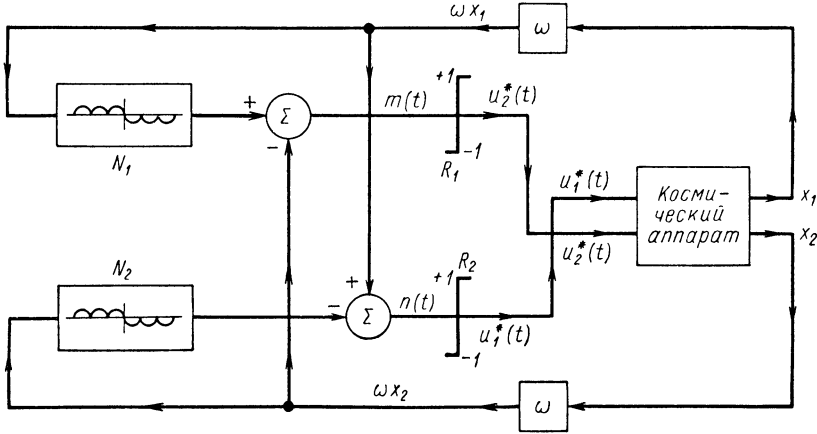


Рис. 7.61. Блок-схема оптимального по быстродействию управляющего устройства для вращающегося космического тела

Построим для нашей системы минимальные изохроны. Напомним что минимальная изохрона  $S(t^*)$  есть геометрическое место точек, которые могут быть переведены в начало координат за одно и то же минимальное время  $t^*$ . Различные минимальные изохроны <sup>2</sup> показаны на рис. 7.63 для  $k = 1$ . Обозначим через  $\hat{S}(t^*)$  множество, границей которого является  $S(t^*)$ :

$$\partial \hat{S}(t^*) = S(t^*). \quad (7.412)$$

Из рис. 7.63 видно, что множества  $\hat{S}(t^*)$  являются замкнутыми и выпуклыми. Заметим также, что множества  $\hat{S}(t^*)$  имеют углы, расположенные на кривых  $\gamma_{++}^0$ ,  $\gamma_{+-}^0$ ,  $\gamma_{-+}^0$ ,  $\gamma_{--}^0$ . Это означает, что в открытой области фазовой плоскости

$$(\omega x_1)^2 + (\omega x_2)^2 < 4k^2 \quad (7.413)$$

каждое из множеств  $\hat{S}(t^*)$ ,  $t^* < \frac{\pi}{2\omega}$  имеет четыре нерегулярных точки <sup>3</sup>, которые являются точками пересечения минимальных изохрон  $S(t^*)$  с кривыми  $\gamma_{++}^0$ ,  $\gamma_{+-}^0$ ,  $\gamma_{-+}^0$  и  $\gamma_{--}^0$ .

<sup>1</sup> Мы реализовали эту систему на аналоговой вычислительной машине, испытали свои способности в оптимальном по быстродействию управлении и нашли, что после минутной тренировки мы смогли управлять системой оптимально, по крайней мере для  $\omega < 3 \text{ рад/сек}$ . Для больших значений  $\omega$  время реакции человека слишком велико.

<sup>2</sup> Метод построения этих изохрон аналогичен методу, описанному в § 7.7. Подробное описание построений см. в работе [5].

<sup>3</sup> См. определение 3.22.



В области

$$(\omega x_1)^2 + (\omega x_2)^2 \geq 4k^2, \quad (7.414)$$

являющейся замкнутой, множества  $\hat{S}(t^*)$ ,  $t^* \geq \frac{\pi}{2\omega}$  замкнуты, выпуклы и регулярны (т. е. не имеют углов). Нетрудно заметить, что свойства изохрон на рис. 7.63 аналогичны свойствам изохрон на рис. 7.40.

Наконец, нетрудно показать, что после того, как состояние было

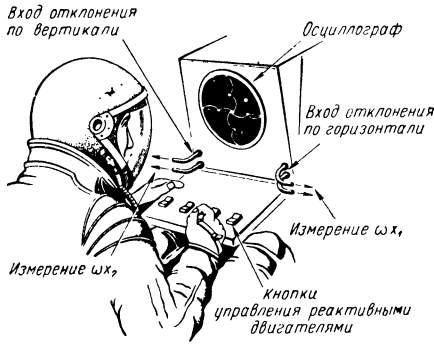


Рис. 7.62. Оптимальное по быстродействию ручное управление

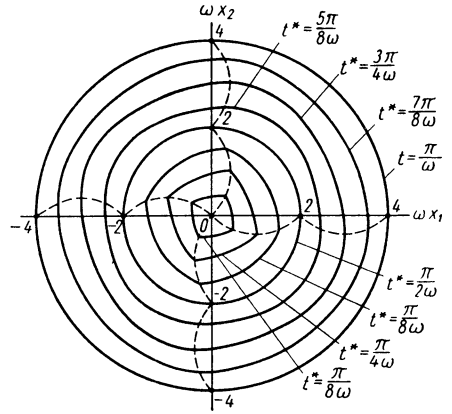


Рис. 7.63. Минимальные изохроны составлены из круговых дуг. Пунктирные кривые — линии переключения

переведено в начало координат, при отсутствии возмущений его будут удерживать в этом состоянии управления  $u_1 = u_2 = 0$ .

**Упражнение 7.53.** Так же, как и в примере 7.5, рассмотрите следующие аппроксимации кривых  $\gamma_{++}$ ,  $\gamma_{+-}$ ,  $\gamma_{-+}$ ,  $\gamma_{--}$ :

$$\left. \begin{aligned} \hat{\gamma}_{++} &= \begin{cases} \gamma_{++}^0 & \text{при } -2k \leq \omega x_2 \leq 0; \\ \omega x_1 = 0 & \text{при } \omega x_2 < -2k; \end{cases} \\ \hat{\gamma}_{+-} &= \begin{cases} \gamma_{+-}^0 & \text{при } -2k \leq \omega x_1 \leq 0; \\ \omega x_2 = 0 & \text{при } \omega x_1 < -2k; \end{cases} \\ \hat{\gamma}_{-+} &= \begin{cases} \gamma_{-+}^0 & \text{при } 0 \leq \omega x_1 \leq 2k; \\ \omega x_2 = 0 & \text{при } \omega x_1 > 2k, \end{cases} \\ \hat{\gamma}_{--} &= \begin{cases} \gamma_{--}^0 & \text{при } 0 \leq \omega x_2 \leq 2k; \\ \omega x_1 = 0 & \text{при } \omega x_2 > 2k \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (7.415)$$

Проанализируйте получившуюся субоптимальную систему и покажите, что она устойчива. Вычислите относительное увеличение минимального времени перехода в начало координат из точек, расположенных на оси  $\omega x_1$ , и постройте график в зависимости от  $|\omega x_1|$ . Сравните ваши результаты с графиком рис. 7.48 при  $k = 1$ .

**Упражнение 7.54.** Повторите упражнение 7.53 для следующих аппроксимаций линий переключения:

$$\hat{\gamma}_{++} = \begin{cases} \gamma_{++}^0 & \text{при } -k \leq \omega x_2 \leq 0; \\ \omega x_1 = -k\sqrt{2} + 1 & \text{при } \omega x_2 < -k; \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}_{+-} = \begin{cases} \gamma_{+-}^0 & \text{при } -k \leq \omega x_1 \leq 0; \\ \omega x_2 = k\sqrt{2} - 1 & \text{при } \omega x_1 < -k; \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}_{-+} = \begin{cases} \gamma_{-+}^0 & \text{при } 0 \leq \omega x_1 \leq k; \\ \omega x_2 = -k\sqrt{2} + 1 & \text{при } \omega x_1 > k; \end{cases} \quad (7.416)$$

$$\hat{\gamma}_{--} = \begin{cases} \gamma_{--}^0 & \text{при } 0 \leq \omega x_2 \leq k; \\ \omega x_1 = k\sqrt{2} - 1 & \text{при } \omega x_2 > k. \end{cases}$$

**Упражнение 7.55.** Рассмотрите систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (7.417)$$

где  $|u_1(t)| \leq 1; |u_2(t)| \leq 2. \quad (7.418)$

Найдите линии переключения и оптимальный по быстродействию закон управления к началу координат.

**Упражнение 7.56.** Рассмотрите систему (демпфированный гармонический осциллятор с двумя управляющими функциями)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (7.419)$$

где  $|u_1(t)| \leq 1; |u_2(t)| \leq 1. \quad (7.420)$

Воспользовавшись результатами § 7.8, найдите оптимальный по быстродействию закон управления к началу координат.

Следующее упражнение иллюстрирует линии переключения для систем с действительными собственными значениями с двумя управляющими переменными.

**Упражнение 7.57.** Рассмотрите систему второго порядка

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (7.421)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — матрицы размера  $2 \times 2$ . Считайте, что управляющие функции ограничены по величине:

$$|u_1(t)| \leq 1; |u_2(t)| \leq 1. \quad (7.422)$$

Найдите оптимальный по быстродействию закон управления с обратной связью к началу координат (0, 0) для следующих случаев:

а)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ; б)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;

в)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ; г)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

В каждом из случаев проверьте, является ли система нормальной. Если оптимальное управление не является единственным, то объясните почему.

## 7.10. УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В предыдущих параграфах настоящей главы мы изучали задачу об управлении простыми и сложными линейными системами. В этом параграфе рассмотрим задачу об оптимальном по быстродействию управлении нелинейной системой первого порядка с переменными параметрами.

Исследуем систему, которая описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\dot{x}(t) + g[x(t), t] = Ku(t), \quad (7.423)$$

где  $x(t)$  — скалярное состояние системы;  
 $g[x(t), t]$  — некоторая нелинейная функция состояния и времени;  
 $u(t)$  — скалярное управление;  
 $K$  — положительный коэффициент усиления.

Будем считать, что управление  $u(t)$  ограничено по величине:

$$|u(t)| \leq 1 \text{ для любого } t. \quad (7.424)$$

**Пример 7.7.** Рассмотрим точку массы  $m$ , движущуюся со скоростью  $v(t)$  в среде. Обозначим через  $f(t)$  силу, прикладываемую к точке. Дифференциальное уравнение относительно скорости имеет вид

$$m\dot{v}(t) + d|v(t)| = f(t), \quad (7.425)$$

где  $d|v(t)|$  — сила сопротивления движению. При отсутствии трения имеем

$$d|v(t)| = 0, \quad (7.426)$$

и поэтому

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{m} f(t) \quad (7.427)$$

Следовательно, система ведет себя подобно интегратору. Для трения, изменяющегося по линейному закону

$$d|v(t)| = av(t), \quad a > 0, \quad (7.428)$$

система ведет себя подобно аperiodическому звену. Если

$$d|v(t)| = av(t) \cdot |v(t)|, \quad a > 0, \quad (7.429)$$

то сила сопротивления имеет квадратичную зависимость.

Мы решим следующую задачу об управлении, оптимальном по быстродействию

**Задача 7.10.** Дана система, которая описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\dot{x}(t) + g[x(t), t] = Ku(t), \quad (7.430)$$

где  $|u(t)| \leq 1$ .

Найти управление, как функцию от состояния, которая переводит любое исходное состояние  $x(0) = \xi$  в 0 за минимальное время, при условии, что такое управление существует.

Гамильтониан задачи об оптимальном по быстродействию управлении системой (7.430) равен

$$H = 1 - g[x(t), t]p(t) + Ku(t)p(t), \quad (7.431)$$

где  $p(t)$  — дополнительная переменная (скалярная).

Далее,

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)} = \frac{\partial g[x(t), t]}{\partial x(t)} p(t). \quad (7.432)$$

Управление, абсолютно минимизирующее гамильтониан, определяется соотношением

$$u(t) = -\text{sign}\{p(t)\}, \quad (7.433)$$

поскольку  $K$  положительно.

Рассмотрим дифференциальное уравнение относительно  $p(t)$ . Из уравнения (7.432) имеем

$$\frac{dp(t)}{p} = h[x(t), t] dt, \quad (7.434)$$

где

$$h[x(t), t] = \frac{\partial g[x(t), t]}{\partial x(t)}. \quad (7.435)$$

Интегрируя обе части уравнения (7.435), получим

$$\log p(t) = \int_0^t h[x(\tau), \tau] d\tau + c, \quad (7.436)$$

где  $c$  — постоянная интегрирования.

Из соотношения (7.436) найдем

$$p(t) = p(0) \exp \left\{ \int_0^t h[x(\tau), \tau] d\tau \right\}. \quad (7.437)$$

Независимо от  $h[x(t), t]$

$$\exp \left\{ \int_0^t h[x(\tau), \tau] d\tau \right\} > 0 \text{ для } t < \infty, \quad (7.438)^1$$

откуда следует

$$\text{sign} \{p(t)\} = \text{sign} \{p(0)\}. \quad (7.439)$$

Поскольку  $p(0) \neq 0$ , функция  $p(t)$  не может обратиться в 0 ни на каком конечном интервале времени  $t$ . Следовательно, управление, определяемое соотношением (7.433), может быть равно

$$u(t) = +1 \text{ для всех } t \quad (7.440)$$

или

$$u(t) = -1 \text{ для всех } t \quad (7.441)$$

и переключаться не может.

Следующий шаг состоит в определении оптимального по быстродействию управления в функции от состояния системы.

**Закон управления 7.10 (решение задачи 7.10).** Оптимальное по быстродействию управление, переводящее произвольное исходное состояние системы (7.430) в ноль за минимальное время, равно

$$u^* = -\text{sign} \{x\} \quad (7.442)$$

при условии, что такое управление существует.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $x(0) > 0$ . Очевидно, что первый момент времени  $t^*$ , для которого  $x(t^*) = 0$ , есть минимальное время, требующееся для перевода  $x(t)$  в ноль и

$$x(t) > 0 \text{ для любого } t, 0 < t < t^*. \quad (7.443)$$

Поскольку  $x(t)$  положительно, из уравнения (7.442) следует, что  $u(t) = -1$ . Рассмотрим далее два дифференциальных уравнения:

$$\dot{x}(t) = -g[x(t), t] - K; \quad (7.444)$$

$$\dot{x}(t) = -g[x(t), t] + K. \quad (7.445)$$

Пусть  $x_-(t)$  — решение уравнения (7.444), а  $x_+(t)$  — решение уравнения (7.445). Покажем, что

$$x_-(t) < x_+(t) \text{ для любого } t \text{ из } 0 < t < t^*, \quad (7.446)$$

откуда и будет следовать оптимальность управления  $u = -1$ .

Очевидно, что при  $t = 0$  наклон функции  $x_-(t)$  меньше наклона  $x_+(t)$  (так как  $-K < K$ ); следовательно, существует  $\varepsilon$  такое, что

$$x_-(t) < x_+(t) \text{ для любого } t \text{ из } 0 < t < \varepsilon, \quad (7.447)$$

как это показано на рис. 7.64. Предположим теперь, что существует момент времени  $t_1$ ,  $0 < t_1 < t^*$ , для которого

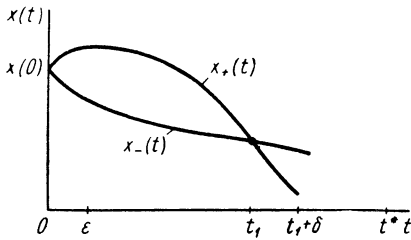
$$\left. \begin{aligned} x_-(t) < x_+(t) \text{ для любого } t \text{ из } 0 < t < t_1; \\ x_-(t_1) = x_+(t_1); \\ x_-(t) > x_+(t) \text{ для любого } t \text{ из } t_1 < t < t_1 + \delta. \end{aligned} \right\} \quad (7.448)$$

<sup>1</sup> Предполагается, что  $h[x(\tau), \tau]$  — ограниченная функция. Это всегда имеет место в физических системах, которые описываются уравнением (7.430).

Отсюда следует, что наклон  $x_+(t)$  в точке  $t_1$  [т. е.  $\dot{x}_+(t_1)$ ] меньше наклона  $x_-(t)$  в точке  $t_1$  [т. е.  $\dot{x}_-(t_1)$ ]:

$$\dot{x}_-(t_1) > \dot{x}_+(t_1). \quad (7.449)$$

Но из уравнений (7.444) и (7.445) имеем



$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_-(t_1) &= -g[x_-(t_1); t_1] - K; \\ \dot{x}_+(t_1) &= -g[x_+(t_1); t_1] + K. \end{aligned} \right\} \quad (7.450)$$

Но  $x_+(t_1) = x_-(t_1)$ , и поэтому

$$\dot{x}_+(t_1) - \dot{x}_-(t_1) = 2K > 0 \quad (7.451)$$

или

$$\dot{x}_+(t_1) > \dot{x}_-(t_1). \quad (7.452)$$

Рис. 7.64. Решения  $x_+(t)$  и  $x_-(t)$  при  $x(0) > 0$

Но уравнения (7.452) и (7.449) противоречат друг другу. Так как  $t_1$

выбрано произвольно, приходим к выводу:

$$x_-(t) < x_+(t) \text{ для любого } t. \quad (7.453)$$

Аналогичное доказательство для  $x(0) < 0$  окончательно устанавливает справедливость закона управления 7.10.

**Упражнение 7.58.** Покажите, что для системы  $\dot{x}(t) = u(t)$ ,  $|u(t)| \leq 1$  минимальное время, требующееся для перевода любого исходного состояния  $x(0) = \xi$  в ноль, равно

$$t^* = |\xi|. \quad (7.454)$$

**Упражнение 7.59.** Дана система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ax(t) + u(t); \\ |u(t)| &\leq 1; \quad a > 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.455)$$

Покажите, что минимальное время, требующееся для перевода любого исходного состояния  $x(0) = \xi$  в ноль, равно

$$t^* = \frac{1}{a} \log(a|\xi| + 1). \quad (7.456)$$

Покажите, что  $t^*$  есть решение уравнения в частных производных Гамильтона—Якоби.

**Упражнение 7.60.** Дана система

$$\dot{x}(t) = bx(t) + Ku(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad b > 0. \quad (7.457)$$

Покажите, что оптимальное по быстродействию управление существует только для начальных состояний  $x(0) = \xi$ , удовлетворяющих неравенству

$$|\xi| < \frac{K}{b}. \quad (7.458)$$

Иначе говоря, если  $|\xi| \geq \frac{K}{b}$ , то управления  $u(t)$ ,  $|u(t)| \leq 1$ , переводящего состояние системы в ноль, не существует. Следовательно, не существует и управления, оптимального по быстродействию.

**Упражнение 7.61.** Дана система

$$\dot{x}(t) = -ax(t)|x(t)| + u(t), \quad a > 0, \quad |u(t)| \leq 1. \quad (7.459)$$

Покажите, что минимальное время, требующееся для перевода в ноль начального состояния  $x(0) = \xi$ , равно

$$t^* = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg}(\sqrt{a}|\xi|). \quad (7.460)$$

### 7.11. УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА<sup>1</sup>

В этом параграфе мы рассмотрим задачу об оптимальном управлении для класса нелинейных систем второго порядка, описываемых дифференциальным уравнением

$$\ddot{y}(t) + f[\dot{y}(t)] = Ku(t), \quad (7.461)$$

где  $y(t)$  — выход;

$u(t)$  — управление, ограниченное соотношением

$$|u(t)| \leq 1 \text{ для всего } t \quad (7.462)$$

$K$  — положительный коэффициент усиления;

$f[\dot{y}(t)]$  — нелинейная функция от производной выхода по времени  $\dot{y}(t)$ .

Если

$$\begin{aligned} \text{sign}\{f[\dot{y}(t)]\} &= \text{sign}\{\dot{y}(t)\} \\ &\text{для всех } \dot{y}(t) \neq 0, \end{aligned} \quad (7.463a)$$

то система устойчива;

если

$$\begin{aligned} \text{sign}\{f[\dot{y}(t)]\} &= -\text{sign}\{\dot{y}(t)\} \\ &\text{для всех } \dot{y}(t) \neq 0, \end{aligned} \quad (7.463b)$$

то система неустойчива.

Уравнение (7.461) описывает движение тела под воздействием нелинейной силы сопротивления. Если  $y(t)$  — положение и  $\dot{y}(t)$  — скорость тела, то  $f[\dot{y}(t)]$  представляет собой силу сопротивления, которая зависит только от скорости. Очевидно, что такая функция  $f[\dot{y}(t)]$  соответствует уравнению (7.463a), поскольку энергия рассеивается, и движение является устойчивым. В дальнейшем, для определенности будем считать, что имеет место соотношение (7.463a).

Примем, что

$$x_1(t) = y(t); \quad x_2(t) = \dot{y}(t). \quad (7.464)$$

В этих координатах уравнения системы запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -f[x_2(t)] + u(t). \end{aligned} \quad (7.465)$$

Рассмотрим следующую задачу.

**Задача 7.11.** Для системы (7.465) найти управление  $u(t)$ , удовлетворяющее ограничению  $|u(t)| \leq 1$  и переводящее любое исходное состояние в начало координат  $(0, 0)$  плоскости  $(x_1, x_2)$  за минимальное время.

Здесь мы впервые сталкиваемся с оптимальным управлением нелинейной системой второго порядка. Цель данного параграфа — показать как можно графически спроектировать оптимальную по быстродействию систему с обратной связью. При этом, как и ранее, воспользуемся необходимыми условиями для установления того, что экстремальные управления могут переключаться не более одного раза. Сделав этот вывод относительно числа переключений, выделим четыре управляющих последовательности  $\{+1\}$ ,  $\{-1\}$ ,  $\{+1, -1\}$ ,  $\{-1, +1\}$ , которые могут оказаться оптимальными управлениями. При отыскании оптимального управления будем поступать так же, как и в § 7.2 и 7.3.

Мы составим список операций, которому надо следовать при расчете оптимальной системы с обратной связью, опираясь исключительно на

<sup>1</sup> Материал этого параграфа основан на работах [145] и [146].

экспериментальные данные, и проиллюстрируем понятия, связанные с расчетом, на примере конкретной нелинейной системы.

Приступим к решению поставленной задачи. Гамильтониан задачи имеет вид

$$H = 1 + x_2(t) p_1(t) - f[x_2(t)] p_2(t) + u(t) p_2(t). \quad (7.466)$$

Управление, абсолютно минимизирующее гамильтониан, определяется соотношением

$$u(t) = -\text{sign} \{p_2(t)\}. \quad (7.467)$$

Дополнительные переменные  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  являются решениями дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = 0; \\ \dot{p}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -p_1(t) + \frac{\partial f[x_2(t)]}{\partial x_2(t)} p_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.468)$$

Необходимо предположить, что

$$\frac{\partial f[x_2(t)]}{\partial x_2(t)} \text{ существует при любых } x_2(t). \quad (7.469)$$

Пусть  $\pi_1 = p_1(0)$ ;  $\pi_2 = p_2(0)$ .

Из уравнений (7.468) находим

$$p_1(t) = \pi_1 = \text{const}. \quad (7.470)$$

Теперь мы должны решить уравнение (7.468). Рассмотрим функцию  $\frac{\partial f[x_2(t)]}{\partial x_2(t)}$ , которая является функцией от  $x_2(t)$  и, следовательно, функцией от времени  $t$ . Определим функцию  $h(t)$ , положив

$$h(t) = \frac{\partial f[x_2(t)]}{\partial x_2(t)}. \quad (7.471)$$

Очевидно, что  $h(t)$  является вполне определенной, хотя и неизвестной функцией времени. Подставив уравнения (7.471) и (7.470) в (7.468), получим дифференциальное уравнение

$$\dot{p}_2(t) = -\pi_1 + h(t) p_2(t), \quad (7.472)$$

решение которого имеет следующий вид:

$$p_2(t) = \exp \left[ \int_0^t h(\tau) d\tau \right] \left\{ \pi_2 - \pi_1 \int_0^t \exp \left[ -\int_0^\tau h(\sigma) d\sigma \right] d\tau \right\}, \quad (7.473)$$

где  $\tau$  и  $\sigma$  — некоторые переменные интегрирования. Докажем, что функция  $p_2(t)$  может обращаться в 0 не более одного раза. Для любой функции  $h(t)$  непосредственно получим

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= \exp \left[ \int_0^t h(\tau) d\tau \right] > 0; \quad 0 \leq t < \infty; \\ b(\tau) &= \exp \left[ -\int_0^\tau h(\sigma) d\sigma \right] > 0; \quad 0 \leq \tau < \infty; \\ c(t) &= \int_0^t \exp \left[ -\int_0^\tau h(\sigma) d\sigma \right] d\tau > 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.474)$$

причем  $c(t)$  монотонно возрастает с ростом  $t$ . Если

$$\pi_2 > 0 \text{ и } \pi_1 \leq 0, \quad (7.475a)$$

то  $\pi_2 - \pi_1 c(t) > 0$  для любого  $t$ , и, следовательно,

$$p_2(t) > 0 \text{ для любого } t \geq 0. \quad (7.475b)$$

При

$$\pi_2 = 0 \text{ и } \pi_1 < 0 \quad (7.476a)$$

имеем

$$p_2(0) = 0 \text{ и } p_2(t) > 0 \text{ для } t > 0. \quad (7.476b)$$

Если

$$\pi_2 < 0 \text{ и } \pi_1 \geq 0, \quad (7.477a)$$

то  $\pi_2 - \pi_1 c(t) < 0$  для любого  $t$ , следовательно,

$$p_2(t) < 0 \text{ для любого } t \geq 0. \quad (7.477b)$$

При

$$\pi_2 = 0 \text{ и } \pi_1 > 0 \quad (7.478a)$$

имеем

$$p_2(0) = 0 \text{ и } p_2(t) < 0 \text{ для любого } t > 0 \quad (7.478b)$$

Если

$$\pi_2 > 0 \text{ и } \pi_1 > 0, \quad (7.479a)$$

то функция  $\pi_2 - \pi_1 c(t)$  монотонно убывает с ростом  $t$ , и, поскольку  $p_2(0) = \pi_2 > 0$ , то существует единственный момент времени  $t_1 > 0$  такой, когда

$$p_2(t_1) = 0. \quad (7.479b)$$

Если

$$\pi_2 < 0 \text{ и } \pi_1 < 0, \quad (7.480a)$$

то функция  $\pi_2 - \pi_1 c(t)$  монотонно возрастает с ростом  $t$ , и поскольку  $p_2(0) = \pi_2 < 0$ , то, в свою очередь, существует единственный момент времени  $t_2 > 0$ , когда

$$p_2(t_2) = 0. \quad (7.480b)$$

Итак, мы показали, что для всех возможных значений  $\pi_1$  и  $\pi_2$  функция  $p_2(t)$  может обращаться в нуль не более одного раза<sup>1</sup>, и поэтому на основании уравнения (7.467) только четыре управляющих последовательности

$$\{+1\}, \{-1\}, \{+1, -1\}, \{-1, +1\} \quad (7.481)$$

можно рассматривать в качестве возможных оптимальных управлений.

Нетрудно заметить, что для этой нелинейной системы мы пришли к тем же выводам относительно управляющих последовательностей, как и для линейных систем второго порядка, рассмотренных в § 7.2 и 7.3. Поэтому способ отыскания оптимального по быстродействию закона управления и его доказательства аналогичны описанным в § 7.2 и 7.3.

Первый шаг состоит в том, чтобы «решить» дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -f[x_2(t)] + \Delta, \end{aligned} \right\} \quad (7.482)$$

где  $\Delta = \pm 1$

при  $x_1(0) = \xi_1$ ;  $x_2(0) = \xi_2$ .

$$(7.483)$$

Из выражения (7.482) видно, что решение  $x_2(t)$  будет

$$\int \frac{dx_2(t)}{-f[x_2(t)] + \Delta} = t + c, \quad (7.484)$$

<sup>1</sup> Случай  $\pi_1 = \pi_2 = 0$  исключается (почему?).



где  $c$  — постоянная интегрирования. В общем случае вычислить интеграл невозможно. Решение уравнения (7.484) можно получить графо-аналитическим способом или при помощи численного интегрирования на цифровой вычислительной машине. Во всяком случае решения уравнений (7.482) при  $\Delta = +1$  можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} x_2^+(t) &= x_2^+(\xi_2, t); \\ x_1^+(t) &= x_1^+(\xi_1, \xi_2, t), \end{aligned} \right\} \quad (7.485)$$

а при  $\Delta = -1$  в виде

$$\left. \begin{aligned} x_2^-(t) &= x_2^-(\xi_2, t); \\ x_1^-(t) &= x_1^-(\xi_1, \xi_2, t). \end{aligned} \right\} \quad (7.486)$$

Из уравнений (7.485) и (7.486) время  $t$  можно исключить и получить уравнения траекторий на фазовой плоскости:

$$\left. \begin{aligned} x_2^+ &= q^+(x_1^+, \xi_1, \xi_2); \\ x_2^- &= q^-(x_1^-, \xi_1, \xi_2). \end{aligned} \right\} \quad (7.487)$$

Траектории можно получить графически (с помощью метода изоклин) на цифровой вычислительной машине или моделируя систему на аналоговой вычислительной машине и наблюдая траектории на экране осциллографа.

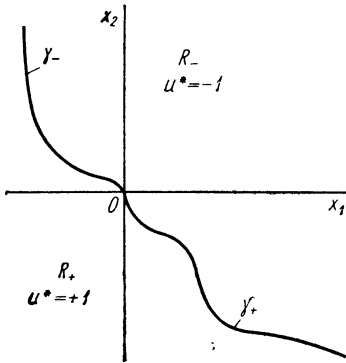


Рис. 7.65. Возможный вид линий переключения  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  для нелинейной системы второго порядка

Через начало координат  $(0, 0)$  проходит единственная траектория, производимая управлением  $u = +1$ . Обозначим через  $\gamma_+$  множество исходных состояний, которые могут быть переведены в  $(0, 0)$  управлением  $u = +1$ , а через  $\gamma_-$  множество состояний, переводимых в  $(0, 0)$  управлением  $u = -1$ . Как и ранее, определим линию переключения  $\gamma$  как объединение кривых  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ , ( $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$ ). Линия переключения  $\gamma$  делит фазовую плоскость на две области:  $R_-$  и  $R_+$ . Обозначим через  $R_-$  множество состояний справа от линии переключения  $\gamma$  ( $R_- = \{(x_1, x_2): \text{если } (x_1, x_2) \in \gamma, \text{ то } x_1 > x_1'\}$ ). Аналогично обозначим через  $R_+$  множество состояний слева от линии переключения  $\gamma$  ( $R_+ = \{(x_1, x_2): \text{если } (x_1, x_2) \in \gamma, \text{ то } x_1 < x_1'\}$ ). Пользуясь методом исключения § 7.2 и 7.3, установим следующий закон управления.

**Закон управления 7.11 (решение задачи 7.11).** Оптимальное по быстродействию управление  $u^*$  как функция от состояния  $(x_1, x_2)$  определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R_+ \cup \gamma_+ \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R_- \cup \gamma_- \end{aligned} \right\} \quad (7.488)$$

Следовательно, оптимальное управление  $u^*$  единственно (если оно существует).

Линия переключения  $\gamma$  может быть похожа на кривую, показанную на рис. 7.65. Так же, как и ранее, можно реализовать оптимальный по быстродействию закон управления в виде блок-схемы, показанной на рис. 7.66. Связь между выходом и входом нелинейности  $N$  идентична линии переключения  $\gamma$ .

В настоящем параграфе мы хотели показать, насколько просто определить закон управления после того, как установлено, что оптимальными могут быть только четыре управляющих последовательности (7.481),

И поэтому управление может переключаться не более одного раза. Действительно, можно не использовать уравнения системы, если целью инженера является проектирование системы по блок-схеме, показанной на рис. 7.66. Шаги, которым надо следовать при проектировании оптимальных по быстродействию систем, приведены ниже.

Если удалось показать, что оптимальное по быстродействию управление может переключаться не более одного раза, то следует:

1. Промоделировать систему на аналоговой машине.

2. Подать сигнал  $x_1(t)$  на вход  $X$ , а сигнал  $x_2(t)$  — на вход  $Y$  двухкоординатного осциллографа или самописца.

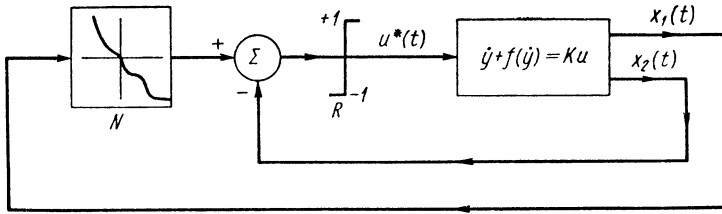


Рис. 7.66. Блок-схема оптимальной по быстродействию системы с обратной связью. Характеристика нелинейности  $N$  повторяет линию переключения, показанную на рис. 7.65

3. Подать на вход системы управление  $u = +1$  и настроить начальные условия таким образом, чтобы траектория проходила через начало координат<sup>1</sup>. Эта траектория и будет кривой  $\gamma_+$ .

4. Повторить шаг 3, прикладывая  $u = -1$ . В результате получится кривая  $\gamma_-$ .

5. Прделаав эти операции, вы располагаете графиком линии переключения  $\gamma$ .

6. закажите инженеру по оборудованию нелинейный элемент с характеристикой, соответствующей графику линии переключения из достаточного числа диодных ячеек.

7. Включите нелинейность в систему так, как показано на рис. 7.66, и оптимальная по быстродействию система готова.

В заключение параграфа мы приведем кривые для некоторых конкретных систем. Рассмотрим единичную массу, подверженную нелинейному трению. Если  $y(t)$  — положение и  $\dot{y}(t)$  — скорость и если сила трения зависит от квадрата скорости, то дифференциальное уравнение системы таково:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) |\dot{y}(t)| = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad (7.489)$$

где  $u(t)$  представляет собой силу, прикладываемую к массе. Мы записали силу сопротивления в виде  $\dot{y}(t) |\dot{y}(t)|$  для того, чтобы показать ее направление, которое противоположно движению. Полагая

$$y = x_1; \quad \dot{y} = x_2,$$

<sup>1</sup> Часто более удобно задачу об отыскании линии переключения решать в «обратном» времени, см. [300] (прим. ред.).

находим, что переменные состояния (фазовые координаты) системы удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t)|x_2(t)| + u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.490)$$

На рис. 7.67 показаны траектории этой системы при  $u = +1$  (сплошные линии) и при  $u = -1$  (штриховые). Как видно из рис. 7.67, все траектории, соответствующие  $u = +1$ , стремятся к прямой  $x_2 = +1$ , а все траектории при  $u = -1$  к прямой  $x_2 = -1$ . Траектории, проходящие через начало координат, обозначены  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ . Они показаны на рис. 7.68

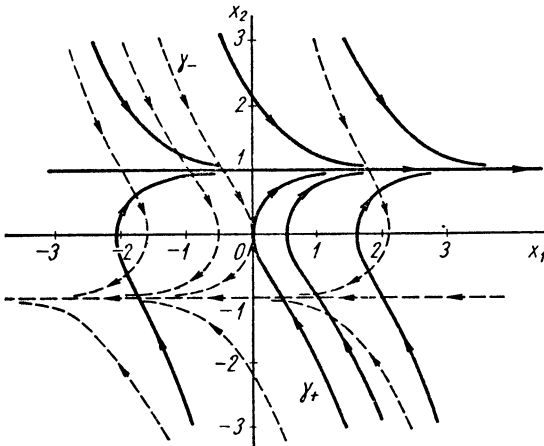


Рис. 7.67. Траектории на фазовой плоскости для системы  $\ddot{y} + \dot{y}|\dot{y}| = u$ . Сплошными линиями показаны траектории, соответствующие  $u = +1$ , штриховыми  $u = -1$ . Стрелками показано направление движения состояния

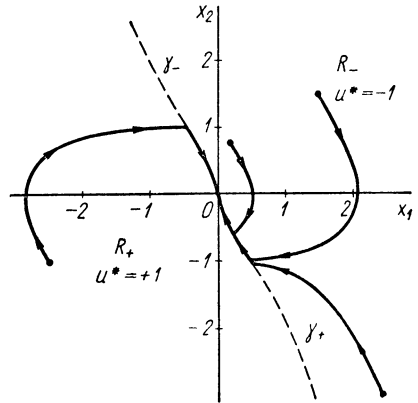


Рис. 7.68. Кривые  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  для системы  $\ddot{y} + \dot{y}|\dot{y}| = u$ . Сплошные кривые — если оптимальные по быстродействию траектории к началу координат фазовой плоскости

вместе с областями  $R_+$  и  $R_-$ . Оптимально управление  $u = +1$ , если точка  $(x_1, x_2)$  находится в области  $R_+$ , и  $u = -1$  в области  $R_-$ .

На рис. 7.68 показаны также некоторые оптимальные траектории.

**Упражнение 7.62.** Постройте графически оптимальную линию переключения для нелинейной системы второго порядка

$$\ddot{y}(t) + [\dot{y}(t)]^3 = u(t) \quad (7.491)$$

в случае, если конечным является состояние  $\dot{y} = y = 0$ .

**Упражнение 7.63.** Дана система

$$\ddot{y}(t) + f[\dot{y}(t), y(t)] = u(t), \quad |u(t)| \leq 1. \quad (7.492)$$

Найдите число переключений оптимального управления. Считайте, что функция  $f$  дифференцируема как по  $\dot{y}(t)$ , так и по  $y(t)$ .

**Упражнение 7.64.** Дана система

$$\ddot{y}(t) + Ky(t) + ay^3(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad (7.493)$$

которая описывает движение колебательной системы, состоящей из массы и «нелинейной» пружины. Найдите оптимальный по быстродействию закон управления к состоянию  $\dot{y} = y = 0$  для  $K = a = 1$ . У к а з а н и е: свободный переходной процесс в системе (7.493) — колебательный. Поэтому верхней границы числа переключений оптимального управления не существует. Так как система (7.493) представляет собой нелинейный осциллятор, следует воспользоваться способами, описанными в § 7.7—7.9.

**Упражнение 7.65.** Предложите способы реализации субоптимальных управлений для системы из упражнения 7.64. У к а з а н и е: используйте способы, подобные рассмотренным в § 7.7, примеры 7.5 и 7.6.

## 7.12. УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ С ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ ДВА ИНТЕГРИРУЮЩИХ ЗВЕНА И ОДИН НУЛЬ<sup>1</sup>

В предыдущих параграфах настоящей главы мы находили оптимальные по быстродействию законы управления для объектов, передаточные функции которых содержали только полюса. Иначе говоря, мы изучали объекты, правая часть дифференциальных уравнений которых являлась функцией только от управления  $u(t)$ . В этом и двух последующих параграфах мы рассмотрим задачу об оптимальном по быстродействию управлении объектами, передаточные функции которых содержат нули.

Вначале рассмотрим два простых примера, а затем в § 7.14 обобщим полученные результаты. Как мы увидим, задача оптимального управления объектами с нулями в передаточной функции отличается от задачи оптимального управления объектами, передаточные функции которых нулей не содержат. При отыскании оптимального управления для объектов, передаточная функция которых содержит нуль, в этом и двух последующих параграфах мы будем поступать следующим образом:

1. Сформулируем задачу об оптимальном управлении выходом системы и его производными и потребуем, чтобы выход и его производные переводились в нуль за минимальное время и после этого удерживались в нуле.

2. Найдем соответствующие переменные состояния (фазовые координаты) системы, пользуясь методами гл. 4.

3. Сформулируем задачу об оптимальном управлении для новых фазовых координат. Покажем, что в пространстве состояний существует область  $G$  (которая может состоять из единственного состояния) такая, что состояния, не принадлежащие к  $G$ , можно перевести в  $G$  за минимальное время и после этого удерживать в области  $G$ , прикладывая соответствующее управление.

4. После отыскания  $G$  получим оптимальный закон управления к области  $G$ . Этот шаг будет связан с расчетом линий переключения и т. д.

Предупредим читателя, что решение задачи об оптимальном по быстродействию управлении объектом с нулями в передаточной функции намного сложнее, чем решение задачи для объектов, передаточные функции которых содержат только полюса.

Рассмотрим объект с выходом  $y(t)$  и управлением  $u(t)$ , который описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\ddot{y}(t) = \dot{u}(t) + \beta u(t). \quad (7.494)$$

Будем считать, что управление ограничено по величине:

$$|u(t)| \leq 1 \text{ для любого } t. \quad (7.495)$$

В теории регулирования о системе, которая описывается уравнением (7.494), говорят, что она имеет передаточную функцию вида

$$\frac{y(s)}{u(s)} = H(s) = \frac{s + \beta}{s^2}. \quad (7.496)$$

Эта передаточная функция содержит один нуль при  $s = -\beta$  и два полюса при  $s = 0$ . Выделим следующие случаи:

1.  $\beta > 0$ . (7.497)

---

<sup>1</sup> См. работы [4], [63], [68], [92], [93], [98], [147] и [201].

Из уравнения (7.497) следует, что нуль расположен в левой полуплоскости  $s$ , как показано на рис. 7.69, а. Такой нуль называют минимально-фазовым.

$$2. \beta < 0. \quad (7.498)$$

Из уравнения (7.498) следует, что нуль расположен в правой полуплоскости  $s$ , как показано на рис. 7.69, б. Такой нуль называют неминимально-фазовым.

$$3. \beta = 0. \quad (7.499)$$

Из уравнения (7.499) следует, что нуль расположен в начале координат, как показано на рис. 7.69, в. Передаточная функция  $H(s)$  для уравнения (7.499) имеет вид

$$H(s) = \frac{s}{s^2}. \quad (7.500)$$

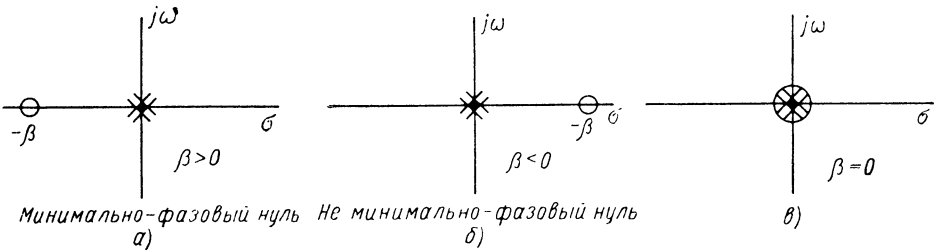


Рис. 7.69. Расположение полюсов и нуля на плоскости  $s$  для передаточной функции  $G(s) = \frac{s + \beta}{s^2}$ .

Иногда пытаются заменить  $H(s)$  передаточной функцией

$$H_1(s) = \frac{1}{s} \quad (7.501)$$

и в этом смысле свести уравнение (7.494) к уравнению

$$\dot{y}(t) = u(t), \quad (7.502)$$

а затем решать задачу, пользуясь уравнением (7.502). Мы покажем несправедливость такого сокращения нуля с полюсом.

Итак, в данном параграфе рассмотрим следующую задачу:

**Задача 7.12а.** Дана система, которая описывается уравнением (7.494). Найти управление  $u(t)$ , удовлетворяющее ограничению  $|u(t)| \leq 1$ , которое переводит  $y$  и  $\dot{y}$  в ноль за минимальное время и удерживает их в нуле после этого при отсутствии последующих возмущений.

Для корректного решения задачи необходимо выбрать соответствующие переменные состояния (фазовые координаты). Используя методику § 4.10, определим переменные состояния  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , положив

$$x_1(t) = y(t) - h_0 u(t); \quad (7.503)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t) - h_0 \dot{u}(t) - h_1 u(t). \quad (7.504)$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы найти дифференциальные уравнения относительно новых переменных состояния (фазовых координат). Из соотношения (7.503) получим

$$\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) + h_0 \dot{u}(t). \quad (7.505)$$

Подставляя уравнение (7.505) в соотношение (7.504), находим

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + h_1 u(t). \quad (7.506)$$

Дифференцируя соотношение (7.504), имеем

$$\ddot{y}(t) = \dot{x}_2(t) + h_0 \ddot{u}(t) + h_1 \dot{u}(t). \quad (7.507)$$

Из уравнений (7.507) и (7.494) получим

$$\dot{x}_2(t) = -h_0 \ddot{u}(t) - h_1 \dot{u}(t) + \dot{u}(t) + \beta u(t). \quad (7.508)$$

Заметим, что уравнение (7.506) не содержит производных от  $u(t)$ , тогда как в уравнение (7.508) они входят. Цель преобразований — выбрать  $h_1$  и  $h_0$  такими, чтобы уравнения относительно  $x_1(t)$  и  $\dot{x}_2(t)$  не содержали производных от  $u(t)$ . Если в уравнении (7.508) положить

$$h_0 = 0 \text{ и } h_1 = 1, \quad (7.509)$$

то уравнения (7.506) и (7.508) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= \beta u(t), \end{aligned} \right\} \quad (7.510)$$

а уравнения (7.503) и (7.504) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= y(t); \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) - u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.511)$$

Заметим, что переменная состояния (фазовая координата)  $x_1(t)$  есть просто выход  $y(t)$ , тогда как  $x_2(t)$  равна разности между скоростью выходной координаты  $\dot{y}(t)$  и управлением  $u(t)$ .

Задача состоит в том, чтобы за минимальное время перевести в нуль  $y$  и  $\dot{y}$  и удерживать их после этого равными нулю.

Предположим, что выход  $y$  и его скорость  $\dot{y}$  переведены в нуль. Пусть  $t^*$  — первый момент времени такой, когда

$$y(t^*) = \dot{y}(t^*) = 0. \quad (7.512)$$

Следовательно, если

$$y(t) = \dot{y}(t) = 0 \text{ для всего } t > t^*, \quad (7.513)$$

то из уравнения (7.511) вытекает, что переменные состояния должны удовлетворять соотношениям

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= 0; \\ x_2(t) &= -u(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.514)$$

для любого  $t > t^*$ .

Подставляя соотношения (7.514) в уравнения (7.510), находим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 0; \\ \dot{x}_2(t) &= -\beta x_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.515)$$

для любого  $t > t^*$ .

Отсюда следует

$$x_1(t) = x_1(t^*) = 0; \quad (7.516)$$

$$x_2(t) = x_2(t^*) e^{-\beta(t-t^*)} \quad (7.517)$$

для любого  $t > t^*$ .

Но поскольку  $x_2(t) = -u(t)$  и  $|u(t)| \leq 1$ , должно быть

$$|x_2(t^*)| = |u(t^*)| \leq 1, \quad (7.518)$$

откуда на основании уравнения (7.517) имеем

$$u(t) = -x_2(t^*)e^{-\beta(t-t^*)} \quad (7.519)$$

для любого  $t > t^*$ .

Эти соображения приводят нас к следующим выводам. Для того чтобы перевести в нуль выход и выходную скорость за минимальное время, достаточно перевести за минимальное время фазовую координату  $x_1$  в нуль, а фазовую координату  $x_2$  — в замкнутый сегмент  $-1 \leq x_2 \leq +1$ . Далее, если  $t^*$  — минимальное время, то для того, чтобы удержать  $y(t) = \dot{y}(t) = 0$  при  $t > t^*$ , необходимо приложить управление

$$u(t) = -x_2(t^*)e^{-\beta(t-t^*)}, \quad t > t^*. \quad (7.520)$$

Если  $u(t)$ , определяемое уравнением (7.520), удовлетворяет ограничению  $|u(t)| \leq 1$  для  $t > t^*$ , то  $y(t) = \dot{y}(t) = 0$  для любого  $t > t^*$ . Мы, однако, еще не решили задачу до конца. Чтобы сделать это, сформулируем задачу об оптимальном управлении более точно, пользуясь переменными состояния (фазовыми координатами), а не выходными переменными.

**Определение 7.35.** Область  $G$  определяется соотношением

$$G = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, |x_2| \leq 1\}. \quad (7.521)$$

Область  $G$  показана на рис. 7.70. Поскольку она представляет собой замкнутый отрезок прямой, то эта область замкнута и выпукла.

По отношению к области  $G$  задача 7.12а эквивалентна следующей задаче.

**Задача 7.12.** Дана система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= \beta u(t), \end{aligned} \right\} \quad (7.522)$$

где

$$|u(t)| \leq 1. \quad (7.523)$$

Найти управление  $u(t)$ , которое:

а) переводит состояние системы в область  $G$ , определяемую соотношением (7.521) за минимальное время;

б) удерживает состояние в  $G$  после этого.

Очевидно, что эта задача эквивалентна задаче

об оптимальном управлении, сформулированной относительно  $y$  и  $\dot{y}$ . Рассмотрим теперь отдельно каждый из трех случаев:  $\beta > 0$ ,  $\beta < 0$  и  $\beta = 0$ .

**Случай 1.** Передаточная функция объекта имеет минимально-фазовый нуль:  $\beta > 0$ .

Мы должны оптимально управлять системой, переводя ее в область  $G$ . Для отыскания управляющих последовательностей, которые могут оказаться оптимальными управлениями, будем двигаться по пути, который указывает принцип минимума. Заметим, что при  $\beta > 0$  система (7.522) нормальна<sup>1</sup>.

Гамильтониан  $H$  для задачи об оптимальном по быстрдействию управлении системой (7.522) равен

$$H = 1 + x_2(t)p_1(t) + u(t)[p_1(t) + \beta p_2(t)], \quad (7.524)$$

<sup>1</sup> См. § 6.5, теорема 6.6, а также § 4.21.

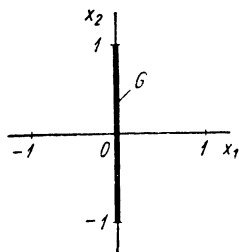


Рис. 7.70. Область цели  $G$  на плоскости  $x_1, x_2$ . Область  $G$  представляет собой замкнутый интервал  $-1 \leq x_2 \leq +1$

где

$$\dot{p}_1(t) = 0; \dot{p}_2(t) = -p_1(t), \quad (7.525)$$

или

$$p_1(t) = \pi_1; p_2(t) = \pi_2 - \pi_1 t, \quad (7.526)$$

причем

$$\pi_1 = p_1(0); \pi_2 = p_2(0). \quad (7.527)$$

Управление, абсолютно минимизирующее гамильтониан, равно

$$u(t) = -\text{sign} \{p_1(t) + \beta p_2(t)\} = -\text{sign} \{\pi_1 + \beta \pi_2 - \beta \pi_1 t\}. \quad (7.528)$$

Итак, в качестве возможных оптимальных управлений следует рассматривать только четыре управляющих последовательности:

$$\{+1\}, \{-1\}, \{+1, -1\}, \{-1, +1\}. \quad (7.529)$$

Определение линий переключений и оптимального по быстродействию управления к области  $G$  обосновывается точно так же, как и в § 7. 2. Сначала решим уравнение (7.522) при постоянном управлении

$$u = \Delta = \pm 1, \quad (7.530)$$

тогда получим

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \xi_1 + \xi_2 t + \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \beta t^2; \\ x_2(t) &= \xi_2 + \beta \Delta t, \end{aligned} \right\} \quad (7.531)$$

где

$$\xi_1 = x_1(0); \xi_2 = x_2(0). \quad (7.532)$$

Исключив время  $t$  из уравнений (7.531), получим уравнение траекторий на плоскости  $x_1 x_2$ :

$$x_1 = \xi_1 + \frac{x_2}{\beta} - \frac{\xi_2}{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\beta} x_2^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\beta} \xi_2^2. \quad (7.533)$$

Траектории, показанные на рис. 7.71 при  $\beta = 1$ , представляют собой параболы, вершины которых расположены на прямой

$$x_2 = -\Delta \quad (7.534)$$

независимо от величины  $\beta$ <sup>1)</sup>.

Следуя доказательству § 7.2, можно определить линии переключения следующим образом.

**Определение 7.36.** Обозначим через  $\gamma_+$  множество состояний, которые можно перевести в состояние  $(0, -1)$  управлением  $u = +1$ , а через  $\gamma_-$  — множество состояний, переводимых в  $(0, +1)$  управлением  $u = -1$ . Уравнения кривых  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  можно найти из соотношения (7.533):

$$\gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = + \frac{1}{2\beta} (x_2 + 1)^2; \quad x_2 \leq -1; \beta > 0 \right\}. \quad (7.535)$$

$$\gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = - \frac{1}{2\beta} (x_2 - 1)^2; \quad x_2 \geq 1; \beta > 0 \right\}. \quad (7.536)$$

Кривые  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  показаны на рис. 7.72 для  $\beta = 1$ .

Можно определить линию переключения  $\gamma$  как объединение кривой  $\gamma_+$ , области  $G$ , определяемой уравнением (7.521), и кривой  $\gamma_-$ :

$$\gamma = \gamma_+ \cup G \cup \gamma_-. \quad (7.537)$$

<sup>1)</sup> Это нетрудно установить, вычислив

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\beta}{\Delta x_2 + 1}; \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2 = -\Delta} = 0.$$



Линия переключения  $\gamma$  делит фазовую плоскость на две области  $R_+$  и  $R_-$ , определенные ниже.

**Определение 7.37.** Обозначим через  $R_-$  множество состояний справа, через  $R_+$  — слева от линии переключения  $\gamma$ :

$$R_+ = \{(x_1, x_2) : \text{если } (x'_1, x_2) \in \gamma, \text{ то } x_1 < x'_1\}; \quad (7.538)$$

$$R_- = \{(x_1, x_2) : \text{если } (x'_1, x_2) \in \gamma, \text{ то } x_1 > x'_1\}. \quad (7.539)$$

Теперь мы можем сформулировать закон оптимального управления для любого состояния на фазовой плоскости.

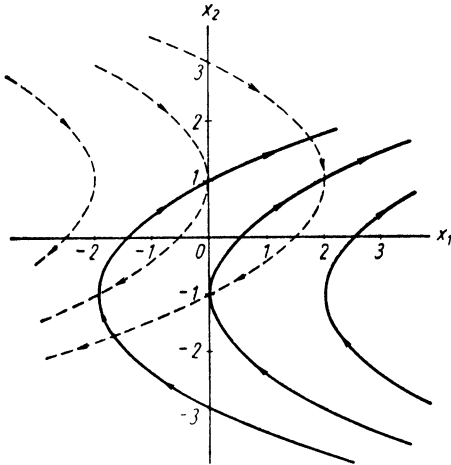


Рис. 7.71. Траектории на плоскости  $x_1, x_2$  при  $\beta = 1$ . Сплошные траектории соответствуют  $u = \Delta = +1$ , пунктирные  $u = \Delta = -1$ ; стрелками показано направление движения состояния для положительного времени

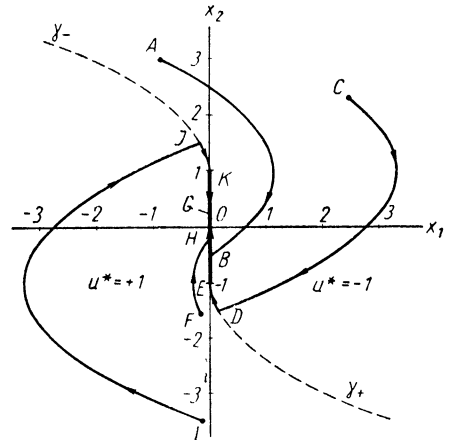


Рис. 7.72. Линия переключения для объекта с передаточной функцией  $H(s) = \frac{s + \beta}{s^2}$ ;  $\beta = 1$ . Сплошные кривые — оптимальные по быстродействию траектории к области цели  $G$

**Закон управления 7.12а (решение задачи 7.12, часть а,  $\beta > 0$ ).** Оптимальное управление  $u^*$  как функция от состояния  $(x_1, x_2)$  определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R_+ \cup \gamma_+; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R_- \cup \gamma_-. \end{aligned} \right\} \quad (7.540)$$

Управление  $u^*$  единственно.

**Упражнение 7.66.** Докажите закон управления 7.12а. *У к а з а н и е:* см. задачу 7.3.

Закон управления 7.12а определяет управление, которое переводит состояние в область  $G$  за минимальное время или, что то же самое, переводит в нуль выход  $y$  и скорость выхода  $\dot{y}$  за минимальное время. Он, однако, не дает решения всей задачи об удерживании состояния системы в области  $G$  после ее достижения (или, что то же самое, об удерживании  $y$  и  $\dot{y}$  равными нулю).

Мы установили, что если  $t^*$  — минимальное время, то  $(x_1(t^*), x_2(t^*)) \in G$  и управление  $u(t)$ , определяемое уравнением (7.520), а именно:

$$u(t) = -x_2(t^*)e^{-\beta(t-t^*)}, \quad t > t^*, \quad (7.541)$$

удержит состояние в  $G$ , если  $|u(t)| \leq 1$ . Но так как  $|x_2(t^*)| \leq 1$  и  $\beta > 0$ , то

$$|u(t)| = |x_2(t^*)|e^{-\beta(t-t^*)} \leq |x_2(t^*)| \leq 1, \quad (7.542)$$

и поэтому

$$|u(t)| \leq 1 \text{ для любого } t > t^*. \quad (7.543)$$

Поскольку управление (7.541) удержит состояние в  $G$  при  $t > t^*$ , то при  $t > t^*$  мы получим  $y(t) = \dot{y}(t) = 0$ . Эти положения дают полное решение поставленной задачи.

**Закон управления 7.12 (решение задачи 7.12 при  $\beta > 0$ ).** Оптимальное управление как функция от состояния системы определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R_+ \cup \gamma_+; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R_- \cup \gamma_-; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = -x_2 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in G. \end{aligned} \right\} \quad (7.544)$$

Различные оптимальные по быстродействию траектории показаны на рис. 7.72. Заметим, что существуют исходные состояния, которые могут быть переведены в область  $G$  без переключения управления (например, траектории  $ABO$  и  $FHO$ ). Существуют исходные состояния, которые могут быть переведены в  $G$  одним переключением управления (например, траектории  $GDEO$  и  $IJKO$ ).

Полезно нарисовать графики оптимальных управлений, переводящих исходное состояние в  $G$  и затем удерживающих его в этой области. Рассмотрим исходное состояние  $A$  (рис. 7.72). Оптимальным путем из  $A$  в  $G$  является траектория  $AB$ , производимая управлением  $u = -1$ . Точка  $B$  принадлежит множеству  $G$ . Для исходного состояния  $A$  точка  $B = (0, -0, 5)$ . На рис. 7.73 показано управление  $u(t)$ , равное 1 на интервале  $0 \leq t \leq t_B$ , где  $t_B$  — момент достижения точки  $B = (0, -0, 5)$ . Согласно уравнению (7.541) управление  $u(t)$  должно быть равно:

$$u(t) = 0,5e^{-(t-t_B)}; \quad t > t_B, \quad (7.545)$$

так как построения проводились для  $\beta = 1$ . Поскольку  $u(t) = -x_2(t)$ , при  $t > t_B$  получим

$$x_2(t) = -0,5e^{-(t-t_B)}; \quad t > t_B. \quad (7.546)$$

В результате получится траектория  $BO$ , которая достигнет начала координат при  $t = \infty$ .

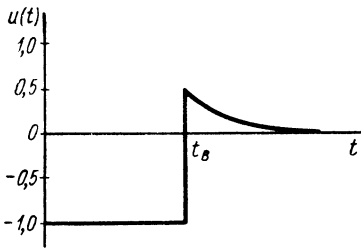


Рис. 7.73. График оптимального по быстродействию управления, с помощью которого получена траектория  $ABO$  (см. рис. 7.72). При любом  $t \geq t_B$  выход  $y(t)$  и его производная  $\dot{y}(t)$  тождественно равны нулю

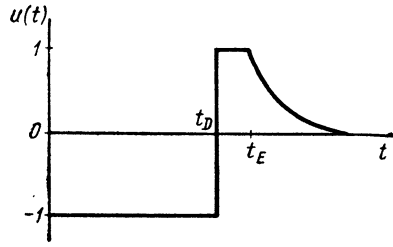


Рис. 7.74. График оптимального по быстродействию управления, с помощью которого получена траектория  $CDEO$  (см. рис. 7.42). При любом  $t \geq t_E$  выход  $y(t)$  и его производная  $\dot{y}(t)$  тождественно равны нулю

Рассмотрим теперь на рис. 7.72 исходное состояние  $C$ . Оптимальной является траектория  $CDE$ , где  $E = (0, -1)$ ; управление  $u = -1$  вдоль траектории  $CD$  и  $u = +1$  вдоль траектории  $DE$ . При  $t = t_E$  система находится в состоянии  $E = (0, -1)$ . При  $t > t_E$  управление равно:

$$u(t) = e^{-(t-t_E)}; \quad t > t_E, \quad (7.547)$$

и, следовательно,

$$x_2(t) = -e^{-(t-t_E)}; t > t_E, \quad (7.548)$$

Управление  $u(t)$  при  $t > t_E$  представляет собой затухающую экспоненту, как показано на рис. 7.74. При  $t > t_E$  получается траектория, которая принадлежит к области  $G$ .

**Упражнение 7.67.** Спроектируйте практическую реализацию закона управления 7.12.

**Случай 2.** Передаточная функция объекта имеет неминимально-фазовый нуль:  $\beta < 0$ .

Если  $\beta < 0$ , то уравнения (7.524)—(7.533) имеют место, поскольку при их выводе относительно  $\beta$  не делалось никаких специальных предположений, кроме  $\beta \neq 0$ . Следовательно, задача остается нормальной. На рис. 7.75 показаны траектории системы при  $\beta = -1$ . Для того чтобы обнаружить изменения траекторий при замене положительного  $\beta$  отрицательным, рис. 7.75 следует сравнить с рис. 7.71. Так как область  $G$ , соответствующая определению 7.35, не зависит от  $\beta$ , то можно отыскивать управление, которое переводит любое исходное состояние в область  $G$  за минимальное время. Этот шаг связан с определением линий переключения.

**Определение 7.38.** Обозначим через  $\gamma_+$  множество состояний, которые можно перевести в  $(0, -1)$  управлением  $u = +1$ , а через  $\gamma_-$  — множество состояний, которые можно перевести в  $(0, +1)$  управлением  $u = -1$ . Кривые  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  определяются соотношениями

$$\gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{2\beta} (x_1 + 1)^2; x_2 \geq -1; \beta < 0 \right\}; \quad (7.549)$$

$$\gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2\beta} (x_1 - 1)^2; x_2 \leq 1, \beta < 0 \right\}. \quad (7.550)$$

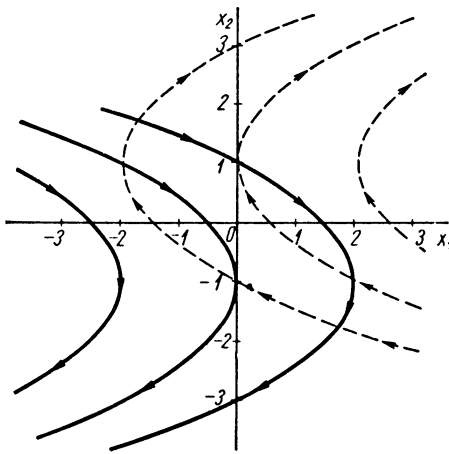


Рис. 7.75. Траектории на плоскости  $x_1, x_2$  при  $\beta = -1$ . Сплошные траектории соответствуют  $u = \Delta = +1$ , пунктирные  $u = \Delta = -1$ . Стрелками показано направление движения при положительном времени

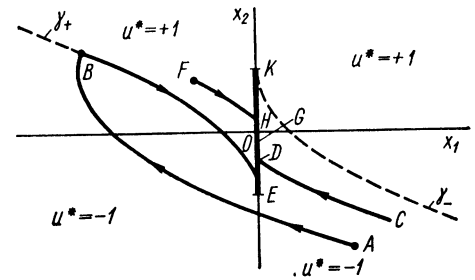


Рис. 7.76. Линии переключения  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  для объекта  $G(s) = \frac{s-1}{s^2}$ . Изображенный на этом рисунке закон управления переводит в нуль любые исходные  $y$  и  $\dot{y}$  за минимальное время. Оптимальные по быстродействию траектории к области цели показаны сплошными линиями

что вид траекторий при  $\beta > 0$  и  $\beta < 0$  различен, уравнения (7.549) и (7.550) отличаются от уравнений (7.535) и (7.536). Кривые  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ , определяемые уравнениями (7.549) и (7.550), показаны на рис. 7.76. Они построены для  $\beta = -1$ .

Кривую  $\gamma$  можно определить как

$$\gamma = \gamma_+ \cup G \cup \gamma_-; \quad (7.551)$$

эта кривая опять разделяет фазовую плоскость на две области.

**Определение 7.39.** Обозначим через  $R_+$  состояния, расположенные выше, а через  $R_-$  — ниже кривой  $\gamma$ :

$$R_+ = \{(x_1, x_2) : \text{если } (x_1, x_2') \in \gamma, \text{ то } x_2 > x_2'\}; \quad (7.552)$$

$$R_- = \{(x_1, x_2) : \text{если } (x_1, x_2') \in \gamma, \text{ то } x_2 < x_2'\}. \quad (7.553)$$

**Закон управления 7.126.** Если  $\beta < 0$ , то управление, переводящее любое исходное состояние  $(x_1, x_2) \notin G$  в  $G$  за минимальное время, определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u^* = u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R_+ \cup \gamma_+; \\ u^* = u^*(x_1, x_2) = -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R_- \cup \gamma_- \end{aligned} \right\} \quad (7.554)$$

Это управление единственно.

**Упражнение 7.68.** Докажите закон управления 7.126.

На рис. 7.76 показаны различные оптимальные траектории области  $G$ .

До сих пор различия между объектами, передаточные функции которых минимально-фазовая ( $\beta > 0$ ) и неминимально-фазовая ( $\beta < 0$ ) не было. Различие состоит в том, что если  $\beta < 0$ , то не существует управления, удерживающего состояние в  $G$  при любом  $t > t^*$ . Покажем это.

Предположим, что при  $t = t^*$  состояние  $(x_1(t^*), x_2(t^*)) \in G$ , т. е.  $x_1(t^*) = 0$ ,  $|x_2(t^*)| \leq 1$ . Чтобы удержать состояние в области  $G$ , мы должны приложить управление

$$u(t) = -x_2(t^*)e^{-\beta(t-t^*)} \text{ при } t > t^*. \quad (7.555)$$

Но так как  $\beta < 0$ , член  $e^{-\beta(t-t^*)}$  является возрастающей функцией времени, и поэтому существует момент времени  $t_1 \geq t^*$  такой, что

$$|u(t_1)| = 1. \quad (7.556)$$

Величина  $t_1$  определяется соотношением

$$t_1 = t^* + \frac{1}{\beta} \log |x_2(t^*)|. \quad (7.557)^1$$

На временном интервале  $t^* \leq t \leq t_1$  фазовые координаты удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= 0; \\ x_2(t) &= x_2(t^*)e^{-\beta(t-t^*)}; \end{aligned} \right\} t^* \leq t \leq t_1, \quad (7.558)$$

и поэтому при  $t = t_1$  имеем

$$x_1(t_1) = 0; \quad |x_2(t_1)| = 1. \quad (7.559)$$

Следовательно, если  $|x_2(t^*)| \neq 0$ , то состояние можно удержать в  $G$  лишь в течение конечного интервала времени  $t^* \leq t \leq t_1$ . Это означает, что закон управления 7.126 позволяет перевести  $y$  и  $\dot{y}$  в 0 за минимальное время и удержать их в этом состоянии лишь в течение конечного интервала времени  $t^* \leq t \leq t_1$ .

Возникает естественный вопрос. Что происходит при  $t > t_1$ ? Очевидно, что не существует управления, удовлетворяющего ограничению  $|u(t)| \leq 1$  и удерживающего состояние в области  $G$ . Следовательно, при

<sup>1</sup> На первый взгляд может показаться, что поскольку  $\beta < 0$ , то  $t_1 < t^*$ . Напомним, однако, что  $|x_2(t^*)| \leq 1$ , и поэтому  $\frac{1}{\beta} \log |x_2(t^*)| \geq 0$ . Если  $|x_2(t^*)| = 1$ , то  $t_1 = t^*$ .

$t > t_1$  состояние «убежит» из  $G$ . Закон управления 7.126 опять вступит в силу и обеспечит возврат состояния в область  $G$ . В результате получится предельный цикл, который означает, что  $y \neq \dot{y} \neq 0$ , как показано на рис. 7.77 (для  $\beta = -1$ ). Из этого рисунка видно, что если состояние переведено в  $G$  при  $t = t^*$ , причем в этот момент времени

$$x_1(t^*) = 0; x_2(t^*) > 0, \quad (7.560)$$

то для  $t > t_1$  предельным циклом будет замкнутая петля  $KPKP$ .

Если

$$x_1(t^*) = 0; x_2(t^*) < 0, \quad (7.561)$$

то предельным циклом будет замкнутая петля  $EQEQ$ . . . Если точки  $E$  и  $K$  заданы как

$$E = (0, -1); K = (0, +1), \quad (7.562)$$

то можно показать, что при  $\beta = -1$  точки  $P$  и  $Q$  определяются как

$$P = (2, -1); Q = (-2, +1). \quad (7.563)$$

На рис. 7.78 показано управление, вызывающее предельный цикл.

Рис. 7.77. Предельные циклы, получающиеся при использовании для объекта с передаточной функцией  $\frac{s-1}{s^2}$  закона управления, показанного на рис. 7.76

Заметим, что при  $0 < t \leq t^*$  управление переводит состояние в  $G$ ; на интервале  $t^* < t \leq t_1$  управление представляет собой возрастающую экспоненту, которая удерживает состояние в  $G$ . При  $t > t_1$  управление переключается между значениями  $+1$  и  $-1$  каждые  $T$  сек, результатом чего является предельный цикл. При  $\beta = -1$  период переключения управления  $T$  равен 2 сек.

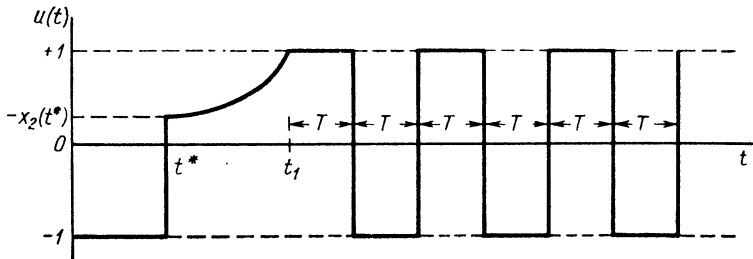


Рис. 7.78. Вид управления  $u(t)$ , переводящего координаты  $y$  и  $\dot{y}$  объекта с передаточной функцией  $G(s) = \frac{s+\beta}{s^2}$  при  $\beta < 0$  в нуль за минимальное время  $t^*$ . Управление  $u(t)$  на интервале  $[t^*, t_1]$  представляет собой возрастающую экспоненту; при  $t > t_1$  управление кусочно-постоянно. Оно соответствует предельному циклу, показанному на рис. 7.77.

Мы показали, что если  $|x_2(t^*)| \neq 0$ , то предельный цикл неизбежен. Предположим, что при  $t = t^*$  имеем

$$x_1(t^*) = x_2(t^*) = 0. \quad (7.564)$$

Если в этом случае принять

$$u(t) = 0 \text{ для любого } t > t^*, \quad (7.565)$$

то получим

$$x_1(t) = x_2(t) = 0 \text{ для любого } t > t^*, \quad (7.566)$$

откуда следует

$$y(t) = \dot{y}(t) = 0 \text{ также для любого } t > t^*, \quad (7.567)$$

что и требуется по условиям задачи.

Мы оказались перед задачей перевода  $y$  и  $\dot{y}$  в нуль за минимальное время и удержания их в этом состоянии в дальнейшем. Закон управления 7.12б переводит  $y$  и  $\dot{y}$  в нуль за минимальное время, но приводит к предельным циклам, и поэтому  $y$  и  $\dot{y}$  не могут быть все время равны нулю. Однако, если мы достигли начала координат фазовой плоскости, то управление  $u = 0$  удержит  $y = \dot{y} = 0$ . Следовательно, начало координат является единственным элементом  $G$ , который одновременно удовлетворяет обоим условиям задачи управления. Таким образом, закон управления 7.12б в общем случае не оптимален, и поэтому мы должны найти новый закон управления, который переводит любое исходное состояние за минимальное время в начало координат  $(0, 0)$ .

Далее следуют знакомые определения линий переключения, областей на фазовой плоскости и оптимального закона управления.

**Определение 7.40.** Обозначим через  $\Gamma_+$  множество состояний, которые можно перевести в начало координат  $(0, 0)$  управлением  $u = +1$ . Обозначим через  $\Gamma_-$  множество состояний, которые можно перевести в  $(0, 0)$  управлением  $u = -1$ . Из уравнения (7.533) имеем

$$\Gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{\beta} \left( x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 \right); x_2 \geq 0; \beta < 0 \right\}; \quad (7.568)$$

$$\Gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{\beta} \left( x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 \right); x_2 \leq 0; \beta < 0 \right\}. \quad (7.569)$$

Кривые  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  показаны на рис. 7.79 для  $\beta = -1$ . Кривая  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$

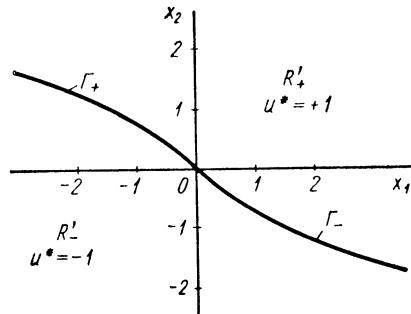


Рис. 7.79. Линии переключения  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$

есть новая линия переключения.

**Определение 7.41.** Обозначим через  $R_+$  множество состояний, расположенных выше линии переключения  $\Gamma$ , а через  $R_-$  — ниже линии переключения  $\Gamma$ :

$$R'_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 > \frac{1}{\beta} \left( x_2 + \frac{1}{2} x_2 |x_2| \right), \beta < 0 \right\}; \quad (7.571)$$

$$R'_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 < \frac{1}{\beta} \left( x_2 + \frac{1}{2} x_2 |x_2| \right), \beta < 0 \right\}. \quad (7.572)$$

Сформулируем теперь решение задачи 7.12 при  $\beta < 0$ .

**Закон управления 7.12в (решение задачи 7.12 при  $\beta < 0$ ).** Управление как функция состояния  $(x_1, x_2)$ , переводящее  $y$  и  $\dot{y}$  в 0 за минимальное время и удерживающее его в этом состоянии, определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R'_+ \cup \Gamma_+; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R'_- \cup \Gamma_- \end{aligned} \right\} \quad (7.573)$$

Это управление единственно.

**Упражнение 7.69.** Докажите закон управления 7.12в.

**Упражнение 7.70.** Нарисуйте реализацию закона управления 7.12в.

Итак, мы установили, что в случае неминимально-фазового нуля область  $G$  состоит из единственной точки — начала координат фазовой плоскости, а затем нашли закон управления, переводящий состояние системы в начало координат.

**Случай 3.** В передаточной функции объекта имеем  $\beta = 0$ . Если  $\beta = 0$ , то передаточная функция принимает вид

$$H(s) = \frac{s}{s^2}. \quad (7.574)$$

Выход  $y(t)$  есть решение дифференциального уравнения

$$\ddot{y}(t) = \dot{u}(t); \quad |u(t)| \leq 1. \quad (7.575)$$

Переменные состояния (фазовые координаты) системы определяются уравнениями (7.511):

$$x_1(t) = y(t); \quad x_2(t) = \dot{y}(t) - u(t). \quad (7.576)$$

Для этих переменных справедливы дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.577)$$

Эти уравнения получены из уравнений (7.510) при  $\beta = 0$ . Область  $G$  та же, что и раньше:

$$G = \{(x_1, x_2); \quad x_1 = 0; \quad |x_2| \leq 1\}. \quad (7.578)$$

Из уравнений (7.577) находим

$$x_1(0) = \xi_1, \quad x_2(0) = \xi_2, \quad u(t) = \Delta = \pm 1; \quad (7.579)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \xi_1 + \xi_2 t + \Delta t \\ x_2(t) &= \xi_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.580)$$

Так как координата  $x_2(t)$  постоянна, а целью управления является достижение области  $G$ , для которой  $|x_2| \leq 1$ , то, очевидно, что при

$$|x_2(0)| = |\xi_2| > 1, \quad (7.581)$$

задача решения не имеет. Иначе говоря, если справедливо неравенство (7.581), то не существует управления, переводящего  $y$  и  $\dot{y}$  в нуль. Если

$$|x_2(0)| = |\xi_2| < 1, \quad (7.582)$$

то легко показать, что управление

$$u = -\text{sign}\{x_1\} \quad (7.583)$$

переводит  $x_1$  и  $x_2$  в  $G$  за минимальное время, а если  $(x_1, x_2) \in G$ , то постоянное управление

$$u = -x_2 \quad (7.584)$$

удержит состояние в  $G$ . При

$$|x_2(t)| = |\xi_2| = 1 \quad (7.585)$$

решение существует, когда

$$x_1(0) = \xi_1 < 0, \quad \text{а} \quad x_2(0) = \xi_2 = +1 \quad (7.586)$$

или

$$x_1(0) = \xi_1 > 0, \quad \text{а} \quad x_2(0) = \xi_2 = -1. \quad (7.587)$$

При этих условиях уравнение (7.583) дает оптимальное по быстродействию управление к области  $G$ , а уравнение (7.584) — управление, удерживающее состояние в области цели  $G$ . Обозначим через  $C_+$ ,  $C_-$  и  $C$  следующие множества состояний:

$$C_+ = \{(x_1, x_2): -1 < x_2 \leq +1; x_1 < 0\} \quad (7.588)$$

$$C_- = \{(x_1, x_2): -1 \leq x_2 < +1; x_1 > 0\}; \quad (7.589)$$

$$C = C_+ \cup C_- \cup G. \quad (7.590)$$

Множество  $C$  называют областью управляемых состояний.

**Закон управления 7.12г (решение задачи 7.12 при  $\beta = 0$ ).** Управление как функция от состояния  $(x_1, x_2)$ , переводящее  $y$  и  $\dot{y}$  в нуль и удерживающее их в этом состоянии, единственно и определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in C_+; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in C_-; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = -x_2 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in G. \end{aligned} \right\} \quad (7.591)$$

Если  $(x_1, x_2) \notin C$  [см. уравнение (7.590)], то управления (оптимального или какого-либо другого), переводящего  $y$  и  $\dot{y}$  в нуль и удерживающего их в этом состоянии, не существует. Область управляемых состояний и некоторые из оптимальных траекторий показаны на рис. 7.80.

Рассмотрим несправедливость замены системы

$$\ddot{y}(t) = \dot{u}(t); \quad |u(t)| \leq 1 \quad (7.592)$$

системой

$$\dot{y}(t) = u(t); \quad |u(t)| \leq 1, \quad (7.593)$$

которая эквивалентна замене передаточной функции  $\frac{s}{s^2}$  передаточной функцией  $\frac{1}{s}$ . Легко показать (см. § 7.10), что для системы (7.593) управление

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= -\text{sign} \{y(t)\}, \quad y(t) \neq 0 \\ u(t) &= 0, \quad y(t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.594)$$

переводит  $y$  в нуль за минимальное время и после этого удерживает его в том же состоянии независимо от величины  $\dot{y}(t)$ , поскольку  $\dot{y}(t)$  не входит в состояние системы (7.593). Мы, однако, установили, что в системе (7.592) в общем случае невозможно уменьшить  $y(t)$  до нуля в случае, когда переменная  $x_2(t) = \dot{y}(t) - u(t)$  по абсолютной величине превосходит 1 ( $|x_2(t)| > 1$ ), или, эквивалентно, когда  $|\dot{y}(t)| > 2$ . Итак, заменив систему (7.592) системой (7.593), считают, что рассматривают управляемую систему. Последнее неверно, если  $|\dot{y}(t)| > 2$ . Таким образом, неожиданно возникают проблемы устойчивости системы.

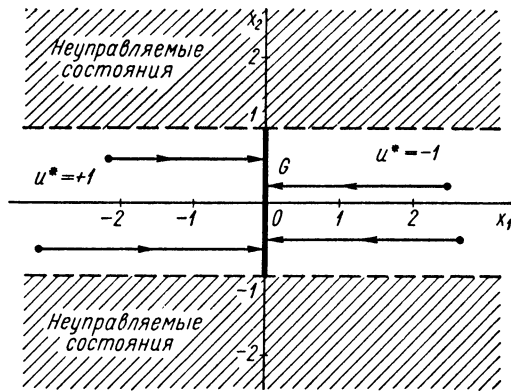


Рис. 7.80. Оптимальные по быстродействию траектории к области  $G$  для объекта с передаточной функцией  $G(s) = \frac{s}{s^2}$ . Управляемыми являются не все состояния



Кратко перечислим результаты, полученные в данном параграфе. Мы установили, что при наличии в передаточной функции системы минимально-фазового нуля  $\beta > 0$  на фазовой плоскости существует конечная область  $G$ , и задача состоит в следующем:

1. Перевести состояние системы в  $G$  за минимальное время при помощи кусочно-постоянного (релейного) управления.

2. Заставить систему оставаться в области  $G$  при помощи управления, представляющего собой затухающую экспоненту. Если передаточная функция содержит неминимально-фазовый нуль, то задача состоит в переводе исходного состояния в начало координат фазовой плоскости при помощи постоянного (релейного) управления. Если  $\beta = 0$ , то существуют неуправляемые состояния.

### 7.13. УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ, ИМЕЮЩИМ ПЕРЕДАТОЧНУЮ ФУНКЦИЮ С ДВУМЯ ИНТЕГРИРУЮЩИМИ ЗВЕНЬЯМИ И ДВУМЯ НУЛЯМИ

В этом параграфе мы рассмотрим задачу об оптимальном управлении объектом, передаточная функция которого содержит два нуля и два полюса.

Основная цель изучения этой системы — дать конкретный пример применения более общей теории, развитой в § 7.14. Мы сконцентрируем внимание в основном на определении области  $G$  и на показе трудностей, которые при этом возникают. Рассмотрим области конечных состояний на конкретных примерах. Прежде чем приступить к ним, заметим, что более общие понятия в § 7.14 являются прямым продолжением материала настоящего параграфа.

Рассмотрим объект, выход которого  $y(t)$  связан с управлением  $u(t)$  дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{y}(t) = \ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t). \quad (7.595)$$

Будем считать, что управление  $u(t)$  ограничено по величине:

$$|u(t)| \leq 1 \text{ для любого } t. \quad (7.596)$$

Объект (7.595) описывается передаточной функцией

$$\frac{y(s)}{u(s)} = H(s) = \frac{s^2 + b_1s + b_0}{s^2} = \frac{(s + \beta_1)(s + \beta_2)}{s^2}. \quad (7.597)$$

Таким образом, нули расположены в точках  $s = -\beta_1$  и  $s = -\beta_2$ ; при этом

$$b_0 = \beta_1 \cdot \beta_2; \quad b_1 = \beta_1 + \beta_2. \quad (7.598)$$

Будем считать, что постоянные  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — действительные числа. Рассмотрим следующую задачу. Для системы (7.595) найти управление  $u(t)$ , удовлетворяющее ограничению  $|u(t)| \leq 1$  и переводящее выход системы  $y$  и скорость выхода  $\dot{y}$  в нуль за минимальное время и затем удерживающее их в этом состоянии.

Определим переменные состояния (фазовые координаты) уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= y(t) - h_0u(t); \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) - h_0\dot{u}(t) - h_1u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.599)$$

Из уравнений (7.595) и (7.599) находим, что фазовые координаты удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + h_1u(t); \quad (7.600)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t) - h_0\ddot{u}(t) - h_1\dot{u}(t). \quad (7.601)$$

Замечаем, что  $\dot{x}_1(t)$  не зависит от  $\dot{u}(t)$  и  $\ddot{u}(t)$ . Чтобы  $\dot{x}_2(t)$  также не зависела от  $\dot{u}(t)$  и  $\ddot{u}(t)$ , следует выбрать

$$h_0 = 1, \quad h_1 = b_1. \quad (7.602)$$

Уравнения (7.599) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= y(t) - u(t); \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) - \dot{u}(t) - b_1 u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.603)$$

Дифференциальные уравнения (7.600) и (7.601) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + b_1 u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= b_0 u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.604)$$

Предположим, что при  $t = t^*$  имеем

$$y(t^*) = \dot{y}(t^*) = 0 \quad (7.605)$$

и хотим найти управление  $u(t)$ ,  $t > t^*$ , для которого

$$y(t) = \dot{y}(t) = 0 \text{ при любом } t > t^*. \quad (7.606)$$

Подставляя уравнения (7.605) и (7.606) в уравнение (7.603), находим, что фазовые координаты должны удовлетворять соотношениям

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= -u(t); \\ x_2(t) &= -\dot{u}(t) - b_1 u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.607)$$

Поскольку

$$x_1(t) = -u(t), \quad t \geq t^*, \quad (7.608)$$

то, подставляя уравнение (7.608) в систему (7.604), получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -b_1 x_1(t) + x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -b_0 x_1(t); \end{aligned} \right\} t \geq t^*. \quad (7.609)$$

Уравнения (7.609) можно записать в векторном виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & 1 \\ -b_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq t^*. \quad (7.610)$$

Обозначим через  $\mathbf{Q}$  матрицу

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -b_1 & 1 \\ -b_0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.611)$$

Нетрудно показать, что собственными значениями матрицы  $\mathbf{Q}$  являются  $-\beta_1$  и  $-\beta_2$ , т. е. нули передаточной функции  $H(s)$  совпадают с собственными значениями матрицы  $\mathbf{Q}$ .

Уравнение (7.610) представляет собой однородное векторное дифференциальное уравнение при  $t \geq t^*$ . Его можно решить, выразив  $x_1(t)$  через «начальные условия»  $x_1(t^*)$  и  $x_2(t^*)$  и получить

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} [x_1(t^*) (-\beta_1 e^{-\beta_1(t-t^*)} + \beta_2 e^{-\beta_2(t-t^*)}) + \\ &+ x_2(t^*) (e^{-\beta_1(t-t^*)} - e^{-\beta_2(t-t^*)})], \end{aligned} \quad (7.612)$$

$$t \geq t^*.$$

Но так как  $x_1(t) = -u(t)$  при  $t \geq t^*$  и  $|u(t)| \leq 1$  при любых  $t$ , ввиду уравнений (7.608) и (7.596) при  $t \geq t^*$  должно быть

$$\left| \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} [x_1(t^*) (-\beta_1 e^{-\beta_1(t-t^*)} + \beta_2 e^{-\beta_2(t-t^*)}) + x_2(t^*) (e^{-\beta_1(t-t^*)} - e^{-\beta_2(t-t^*)})] \right| \leq 1. \quad (7.613)$$

Итак, для того, чтобы наверняка выполнялось соотношение

$$y(t) = \dot{y}(t) = 0 \quad \text{для любого } t \geq t^*, \quad (7.614)$$

необходимо, чтобы при любом  $t \geq t^*$  обеспечивались условия (7.608), (7.610) и (7.613).

**Определение 7.42.** Обозначим через  $G$  множество всех состояний  $x_1(t^*)$ ,  $x_2(t^*)$ , удовлетворяющих соотношению (7.613) при любом  $t \geq t^*$ . Множество  $G$  будем называть областью цели. Это множество замкнуто и выпукло, начало координат является элементом из этого множества<sup>1</sup>.

Так как уравнение (7.613) определяет  $G$  параметрически, необходимо получить выражение [алгебраическое соотношение между  $x_1(t^*)$  и  $x_2(t^*)$ ] для границы<sup>2</sup>  $G$ , обозначенной  $\partial G$ . Это необходимо для того, чтобы можно было сформулировать оптимальный закон управления по отношению к области  $G$ . Опишем методику вывода этого уравнения.

Введем функции  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$ , положив

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} (-\beta_1 e^{-\beta_1(t-t^*)} + \beta_2 e^{-\beta_2(t-t^*)}); \\ q_2(t) &= \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} (e^{-\beta_1(t-t^*)} - e^{-\beta_2(t-t^*)}) \end{aligned} \right\} \quad (7.615)$$

для  $t \geq t^*$ . Заметим, что

$$q_1(t^*) = 1; \quad q_2(t^*) = 0. \quad (7.616)$$

Используя  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$ , можно определить область  $G$  как

$$G = \{(x_1, x_2) : |x_1 q_1(t) + x_2 q_2(t)| \leq 1 \text{ для любых } t \geq t^*\}. \quad (7.617)$$

Предположим, что нули передаточной функции расположены в левой полуплоскости  $s$ , т. е.

$$\beta_2 > \beta_1 > 0. \quad (7.618)$$

Легко показать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_2(t) = 0. \quad (7.619)$$

Так как каждая из функций  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  является непрерывной функцией времени, то функция

$$q(t) = x_1 q_1(t) + x_2 q_2(t) \quad (7.620)$$

такова, что функция  $|q(t)|$  должна принимать максимальное значение в некоторый конечный момент времени  $\hat{t}$ ,  $\hat{t} \geq t^*$ , поэтому для любого  $t \neq \hat{t}$  справедливо

$$|q(t)| < |q(\hat{t})|. \quad (7.621)$$

<sup>1</sup> В общем виде мы докажем это положение в § 7.14.

<sup>2</sup> См. определение 3.10.

Поскольку область  $G$  замкнута, состояние  $(x_1, x_2)$ , принадлежащее границе  $\partial G$  области  $G$ , можно найти из соотношения  $|q(\hat{t})| = 1$ , или, эквивалентного ему,

$$|x_1 q_1(\hat{t}) + x_2 q_2(\hat{t})| = 1. \quad (7.622)$$

Найдем множество точек  $(x_1, x_2)$ , удовлетворяющих уравнению (7.622). Так как  $|q(t)|$  имеет максимум при  $t = \hat{t}$ , то

$$\left. \frac{\partial |q(t)|}{\partial t} \right|_{t=\hat{t}} = 0. \quad (7.623)$$

Поскольку при  $t = \hat{t}$  функция  $q(t)$  имеет либо максимум, либо минимум, то

$$\left. \frac{\partial q(t)}{\partial t} \right|_{t=\hat{t}} = x_1 \left. \frac{\partial q_1(t)}{\partial t} \right|_{t=\hat{t}} + x_2 \left. \frac{\partial q_2(t)}{\partial t} \right|_{t=\hat{t}} = 0. \quad (7.624)$$

Можно найти  $\frac{\partial q_1(t)}{\partial t}$  и  $\frac{\partial q_2(t)}{\partial t}$  из соотношения (7.615), подставить их в (6.624) и получить

$$\hat{t} - t^* = \log \left( \frac{x_1 \beta_2^2 - x_2 \beta_2}{x_1 \beta_1^2 - x_2 \beta_1} \right)^{\frac{1}{\beta_2 - \beta_1}}. \quad (7.625)$$

Подставив последнее соотношение в уравнение (7.622) после алгебраических преобразований, получим

$$\left| \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \left( \frac{x_1 \beta_2^2 - x_2 \beta_2}{x_1 \beta_1^2 - x_2 \beta_1} \right)^{-\frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1}} (-\beta_1 x_1 + x_2) + \left( \frac{x_1 \beta_2^2 - x_2 \beta_2}{x_1 \beta_1^2 - x_2 \beta_1} \right)^{-\frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}} (\beta_2 x_1 - x_2) \right] \right| = 1. \quad (7.626)$$

Следовательно, если  $\beta_2 > \beta_1 > 0$ , то состояние  $(x_1, x_2)$ , удовлетворяющее уравнению (7.626), принадлежит к границе области  $G$ .

Предположим теперь, что один, или оба нуля расположены в правой полуплоскости  $s$  (т. е. являются неминимально-фазовыми). Для определенности примем, что

$$\beta_1 < 0. \quad (7.627)$$

Из уравнения (7.615) имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q_1(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |q_2(t)| = \infty. \quad (7.628)$$

Следовательно, для функции  $q(t) = x_1 q_1(t) + x_2 q_2(t)$  справедливо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q(t)| = \infty \text{ при любых } x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0. \quad (7.629)$$

Но мы хотим найти такое множество  $(x_1, x_2)$ , что  $|q(t)| \leq 1$ . На основании уравнения (7.629) получим:

$$\text{если } x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad (7.630)$$

$$\text{то } |q(t)| = 0 \text{ для любого } t \geq t^*. \quad (7.631)$$

Итак, если хотя бы один из нулей не является минимально-фазовым ( $\beta_1 < 0$ ,  $\beta_2 < 0$  или  $\beta_1 < 0$  и  $\beta_2 < 0$ ), то область  $G$  состоит из единственной точки<sup>1</sup>, а именно, начала координаты фазовой плоскости.

<sup>1</sup> Заметим, что множество, состоящее из одной точки является замкнутым и выпуклым.

Наконец, рассмотрим случай

$$\beta_1 = 0 \text{ и } \beta_2 > 0, \quad (7.632)$$

т. е. когда один нуль расположен в начале координат, а второй — в левой полуплоскости. Подставив значения (7.632) в уравнение (7.615), находим

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= e^{-\beta_2(t-t^*)}; \\ q_2(t) &= \frac{1}{\beta_2}(1 - e^{-\beta_2(t-t^*)}). \end{aligned} \right\} \quad (7.633)$$

Следовательно, функция  $q(t) = x_1 q_1(t) + x_2 q_2(t)$  обладает свойством:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q(t)| = \frac{1}{\beta_2} |x_2|. \quad (7.634)$$

Но так как множество  $G$  есть множество точек  $(x_1, x_2)$ , для которых  $|q(t)| \leq 1$ , из уравнения (7.634) следует

$$|x_2| \leq \beta_2. \quad (7.635)$$

Если справедливо неравенство (7.635), то условие  $|q(t)| \leq 1$  дает соотношение

$$|x_1| \leq 1. \quad (7.636)$$

Поэтому, если  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 > 0$ , то областью цели является

$$G = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq 1; |x_2| \leq \beta_2\}. \quad (7.637)$$

На основании вышеизложенного сделаем следующее заключение. Если оба нуля минимально-фазовые, то граница области  $\partial G$  определяется уравнением (7.626). Если любой из нулей неминимально-фазовый, то область  $G$  и ее граница  $\partial G$  состоят из единственной точки  $(0, 0)$ . Наконец, когда один из нулей сокращается с полюсом, а другой является минимально-фазовым, то область  $G$  определяется соотношением (7.637).

Поскольку сначала мы должны за минимальное время перевести состояние в область  $G$ , то для отыскания экстремальных управлений необходимо пользоваться условиями трансверсальности. Однако в общем случае области имеют углы, и поэтому условиями трансверсальности надо пользоваться очень осторожно.

Следующие три примера посвящены решению задачи об оптимальном по быстродействию управлении для конкретных значений  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Мы будем излагать результаты очень конспективно, предоставив читателю самому разобраться в деталях. Основная цель — показать вид линий переключения и областей конечных состояний.

**Пример 7.8.** Рассмотрим систему с передаточной функцией

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s^2}. \quad (7.638)$$

При этом в уравнении (7.597) мы приняли

$$\beta_1 = 1; \quad \beta_2 = 2; \quad b_0 = 2; \quad b_1 = 3. \quad (7.639)$$

Фазовыми координатами [уравнение (7.603)] являются

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= y(t) - u(t); \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) - \dot{u}(t) - 3u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.640)$$

Эти координаты удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + 3u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= 2u(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.641)$$

[см. уравнение (7.604)]. Граница области  $G$  получается подстановкой  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 2$  в уравнение (7.626). После алгебраических преобразований имеем

$$\left| -\frac{(x_1 - x_2)^2}{4(2x_1 - x_2)} \right| = 1. \quad (7.642)$$

Последнее уравнение распадается на два уравнения

$$x_2 = x_1 + 2 + 2\sqrt{1 - x_1}, \quad |x_1| \leq 1; \quad (7.643)$$

$$x_2 = x_1 - 2 - 2\sqrt{1 + x_1}, \quad |x_1| \leq 1. \quad (7.644)$$

Итак, точка  $(x_1, x_2)$  принадлежит границе  $\partial G$ , если она удовлетворяет одному из уравнений (7.643) или (7.644). Область  $G$  показана на рис. 7.81. Для отыскания оптимального управления к области  $G$  решим уравнение (7.641) при  $u = \Delta = \pm 1$  и получим уравнения траекторий. При  $x_1(0) = \xi_1$  и  $x_2(0) = \xi_2$  находим

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \xi_1 + \xi_2 t + \Delta t^2 + 3\Delta t; \\ x_2(t) &= \xi_2 + 2\Delta t. \end{aligned} \right\} \quad (7.645)$$

Исключая время  $t$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 - \frac{1}{4} \Delta \xi_2^2 + \frac{1}{4} \Delta x_2^2 + \\ &+ \frac{3}{2} x_2 - \frac{3}{2} \xi_2. \end{aligned} \quad (7.646)$$

Итак, траектории представляют собой параболы с вершинами, расположенными на прямой

$$x_2 = -\Delta. \quad (7.647)$$

На рис. 7.81 показаны кривые  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ . Кривая  $\gamma_+$  есть множество точек, которые можно перевести в точку  $B \in G$  управлением  $u = +1$ , а кривая  $\gamma_-$  множество точек, переводимых в точку  $A \in G$  управлением  $u = -1$ . Из уравнений (7.643) и (7.644) нетрудно найти координаты точек  $A$  и  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} A &= (-1, 1 + 2\sqrt{2}); \\ B &= (1, -1 - 2\sqrt{2}). \end{aligned} \right\} \quad (7.648)$$

Итак, из соотношений (7.646) и (7.648) находим уравнения кривых  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ :

$$\gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{4} x_2^2 + \frac{3}{2} x_2 - 6,74; \quad x_1 \geq 1; \quad x_2 \leq -1 - 2\sqrt{2} \right\}; \quad (7.649)$$

$$\gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{4} x_2^2 + \frac{3}{2} x_2 + 6,74; \quad x_1 \leq -1; \quad x_2 \geq 1 + 2\sqrt{2} \right\}. \quad (7.650)$$

Кривые  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  и область  $G$  делят плоскость  $x_1 x_2$  на две области  $R_+$  и  $R_-$ , как показано на рис. 7.81. Если состояние принадлежит к области  $R_+$ , то оптимальным является управление  $u^* = +1$ , а если к  $R_-$ , то оптимально управление  $u^* = -1$ . В том случае, когда состояние принадлежит к области  $G$ , оптимальным является управление

$$u^*(t) = -x_1(t). \quad (7.651)$$

Штриховыми кривыми на рис. 7.81 показаны оптимальные траектории к области  $G$ . Мы предоставляем читателю доказать, что этот закон управления действительно оптимален по быстродействию.

**Пример 7.9.** Рассмотрим систему с передаточной функцией

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{s^2}, \quad (7.652)$$

что соответствует следующим значениям параметров уравнения (7.597):

$$\beta_1 = 1; \quad \beta_2 = -1; \quad b_0 = -1; \quad b_1 = 0. \quad (7.653)$$

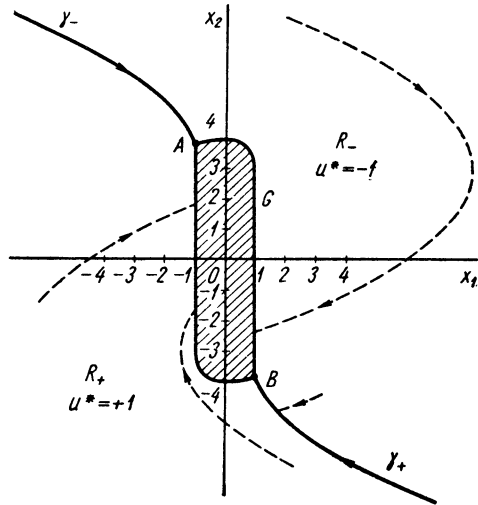


Рис. 7.81. Область  $G$  для объекта с передаточной функцией  $\frac{(s+1)(s+2)}{s^2}$ . Линии переключения обозначены через  $\gamma_-$  и  $\gamma_+$ . Пунктиром показаны оптимальные по быстродействию траектории

Система имеет неминимально-фазовый нуль при  $s = \beta_1 = 1$ . Фазовые координаты [см. уравнение (7.603)] определим как

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= y(t) - u(t); \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) - \dot{u}(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.654)$$

Дифференциальные уравнения относительно этих координат [см. уравнение (7.604)] имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.655)$$

Так как один из нулей неминимально-фазовый, область  $G$  состоит только из начала координат. Поскольку система (7.655) очень похожа на систему, рассмотренную в § 7.2 [сравните уравнения (7.655) и (7.5)], легко показать, что закон управления, изображенный на рис. 7.82, является оптимальным по быстродействию. Уравнениями кривых  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ , показанных на рис. 7.82, являются

$$\gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2; x_2 \geq 0 \right\}; \quad (7.656)$$

$$\gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{2} x_2^2; x_2 \leq 0 \right\}. \quad (7.657)$$

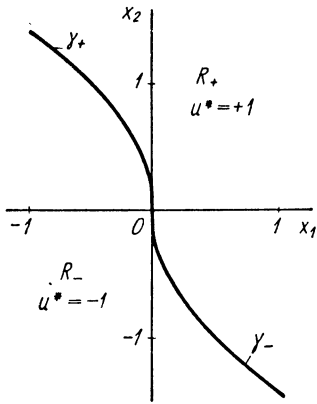


Рис. 7.82. Областью  $G$  для объекта с передаточной функцией  $H(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{s^2}$  является начало координат. Линия переключения представляет собой параболу

Оптимально управление  $u^* = +1$  для состояний из  $R_+$  и  $u^* = -1$  — для состояний из  $R_-$ . При  $x_1 = x_2 = 0$   $u^* = 0$ .

**Пример 7.10.** Рассмотрим систему с передаточной функцией

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{s(s+1)}{s^2}, \quad (7.658)$$

что соответствует следующим значениям параметров уравнения (7.597):

$$\beta_1 = 0; \quad \beta_2 = 1; \quad b_0 = 0; \quad b_1 = 1. \quad (7.659)$$

Система имеет нуль в начале координат плоскости  $s$ . Фазовые координаты системы равны [см. уравнение (7.603)]:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= y(t) - u(t); \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) - \dot{u}(t) - u(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.660)$$

Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) - u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.661)$$

Так как  $\dot{x}_2(t) = 0$ ,

$$x_2(t) = x_2(0) = \xi_2 \text{ для любого } t. \quad (7.662)$$

Это означает, что мы не в состоянии управлять величиной  $x_2(t)$ .

Область  $G$  для этой задачи определяется в виде

$$G = \{ (x_1, x_2) : |x_1| \leq 1, \quad |x_2| \leq 1 \}, \quad (7.663)$$

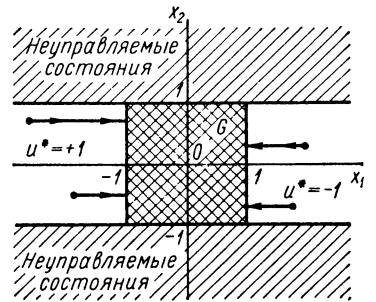


Рис. 7.83. Областью  $G$  для объекта с передаточной функцией  $H(s) = \frac{s(s+1)}{s^2}$  является единичный квадрат

т. е. представляет собой квадрат, показанный на рис. 7.83. Из уравнения (7.662) непосредственно следует, что если  $|\xi_2| > 1$ , то управления, способного перевести систему в область  $G$ , не существует. Это означает, что выход системы  $y(t)$  и его скорость  $\dot{y}(t)$  невозможно сделать равными нулю и затем удерживать их в этом состоянии.

Если  $|\xi_2| < 1$ , то состояние можно перевести в область  $G$  управлением

$$u^*(t) = -\text{sign} \{x_1(t)\}; \quad |x_1(t_1)| > 1. \quad (7.664)$$

Если  $\xi_2 = 1$  и  $x_1(t) > 1$  или  $\xi_2 = -1$  и  $x_1(t) < -1$ , то система опять оказывается «неуправляемой». Если  $\xi_2 = 1$  и  $x_1(t) < -1$  или  $\xi_2 = -1$  и  $x_1(t) > 1$ , то система «управляема», причем оптимально управление  $u^*(t) = -\text{sign} \{|x_1(t)|\}$ . В том случае, когда состояние принадлежит  $G$ , управление должно быть равно  $u^*(t) = -x_1(t)$ . Область «управляемых» состояний и некоторые оптимальные траектории к области  $G$  показаны на рис. 7.83.

#### 7.14. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ, ИМЕЮЩИМИ В ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЯХ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ ЗВЕНЬЯ

В предыдущих двух параграфах мы рассмотрели задачу об оптимальном управлении системами второго порядка, передаточные функции которых содержат нули и установили, что наиболее важным шагом анализа таких систем является определение области  $G$ . После того, как область конечных состояний определена, можно сформулировать закон управления по отношению к этой области и найти управление, которое удерживает состояние в этой области.

Нашей задачей является обобщить результаты, полученные в § 7.12 и 7.13 на системы с произвольным числом полюсов и нулей в их передаточных функциях. Мы обратим внимание на особенности постановки и решения задач оптимального управления, связанные с наличием нулей в передаточных функциях.

Рассмотрим систему, выход  $y(t)$  и управление  $u(t)$  которой связаны линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0) y(t) = \\ = (b_nD^n + b_{n-1}D^{n-1} + \dots + b_1D + b_0) u(t). \end{aligned} \quad (7.665)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^n b_j u^{(j)}(t), \quad (7.666)$$

где

$$\left. \begin{aligned} y^{(i)}(t) &= \frac{d^i y(t)}{dt^i}, \quad i = 0, 1, \dots, n; \\ u^{(j)}(t) &= \frac{d^j u(t)}{dt^j}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (7.667)$$

Известно, что  $y^{(0)}(t) = y(t)$  и  $u^{(0)}(t) = u(t)$ .

Система, описываемая уравнением (7.665), имеет передаточную функцию

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (7.668)$$

Предположим, что нули  $H(s)$  различны и расположены в точках:

$$s = -\beta_1, s = -\beta_2, \dots, s = -\beta_n, \quad (7.669)$$

а полюса  $H(s)$  находятся в точках

$$s = -s_1, s = -s_2, \dots, s = -s_n. \quad (7.670)$$

Таким образом, передаточную функцию можно записать в виде

$$H(s) = \frac{b_n (s + \beta_1) (s + \beta_2) \dots (s + \beta_n)}{(s + s_1) (s + s_2) \dots (s + s_n)}. \quad (7.671)$$

Корни полинома

$$\lambda^n + \frac{b_{n-1}}{b_n} \lambda^{n-1} + \dots + \frac{b_1}{b_n} \lambda + \frac{b_0}{b_n} \quad (7.672)$$



равны

$$\lambda = -\beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.673)$$

а корнями полинома

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (7.674)$$

являются числа

$$\lambda = -s_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.675)$$

До того, как ставить задачу об оптимальном по быстродействию управлении системой (7.665), полезно сравнить ее с системой, которая описывается дифференциальным уравнением

$$\{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0\} y(t) = b_0 u(t) \quad (7.676)$$

и имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (7.677)$$

Вектором состояния системы (7.676) является вектор

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}. \quad (7.678)$$

Пусть при  $t = t^*$

$$\mathbf{y}(t^*) = \mathbf{0} \quad (7.679)$$

и мы хотим найти управление  $u(t)$  такое, чтобы

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \quad \text{для любого } t > t^*. \quad (7.680)$$

Из уравнений (7.679) и (7.680) следует

$$y^{(n)}(t) = 0 \quad \text{для любого } t >$$

а также

$$\{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0\} y(t) = 0, \quad t > t^*. \quad (7.681)$$

Это означает, что управление должно быть равно

$$u(t) = 0 \quad \text{для любого } t > t^*. \quad (7.682)$$

Обратимся теперь к системе (7.665) и предположим, что при  $t = t^*$

$$\mathbf{y}(t^*) = \mathbf{0}. \quad (7.683)$$

Попробуем опять найти управление  $u(t)$  такое, чтобы

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \quad \text{для любого } t > t^*. \quad (7.684)$$

Рассуждая аналогичным образом, установим, что такое управление должно быть решением дифференциального уравнения

$$\{b_n D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \dots + b_1 D + b_0\} u(t) = 0; \quad t > t^*. \quad (7.685)$$

Следовательно, управление  $u(t)$  имеет вид

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t^*) e^{-\beta_i(t-t^*)}, \quad t > t^*, \quad (7.686)$$

где коэффициенты  $\alpha_i(t^*)$  зависят от  $u(t^*)$ ,  $\dot{u}(t^*)$ ,  $\dots$ ,  $u^{(n-1)}(t^*)$ .

Эти рассуждения приводят к следующему выводу.





$q_2(t), \dots, q_n(t)$  — его компоненты. Таким образом,  $q_i(t)$  — элемент первой строки и  $i$ -го столбца матрицы  $e^{\mathbf{Q}(t-t^*)}$ . При  $t > t^*$  имеем

$$x_1(t) = \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x}(t^*) \rangle = \sum_{i=1}^n q_i(t) x_i(t^*) \quad (7.702)$$

и из уравнения (7.698) находим

$$u(t) = -\frac{1}{h_0} \sum_{i=1}^n q_i(t) x_i(t^*), \quad t > t^*. \quad (7.703)$$

**Замечание 7.2.** Дана система (7.665) или ее эквивалентное представление в пространстве состояний (фазовом пространстве) в виде уравнений (7.692); при  $t = t^*$

$$\mathbf{y}(t^*) = \mathbf{0}. \quad (7.704)$$

Если при  $t > t^*$  прикладывать управление

$$u(t) = -\frac{1}{h_0} \sum_{i=1}^n q_i(t) x_i(t^*), \quad (7.705)$$

то

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \quad \text{при любом } t > t^*. \quad (7.706)$$

Рассмотрим далее одно очень важное свойство матрицы  $\mathbf{Q}$ .

**Лемма 7.1.** Матрица  $\mathbf{Q}$  (7.700) обладает свойством

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \left( \lambda^n + \frac{b_{n-1}}{b_n} \lambda^{n-1} + \dots + \frac{b_1}{b_n} \lambda + \frac{b_0}{b_n} \right) (-1)^n, \quad (7.707)$$

откуда следует [см. уравнения (7.672) и (7.673)], что собственные значения  $\mathbf{Q}$  равны:

$$\lambda = -\beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.708)$$

**Элементы доказательства.** Тот факт, что собственные значения матрицы  $\mathbf{Q}$  являются нулями передаточной функции  $H(s)$  [уравнение (7.691)], можно проверить прямым вычислением  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q})$  при помощи уравнения (7.693). Существует также другой путь доказательства того, что собственные значения  $\mathbf{Q}$  равны  $-\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_n$ . Предположим, что собственные значения равны  $-\gamma_1, -\gamma_2, \dots, -\gamma_n$ . Тогда в уравнении (7.702)  $x_1(t)$  можно записать в виде следующей суммы экспонент:

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^n \delta_i(t^*) e^{-\gamma_i(t-t^*)}, \quad t > t^*, \quad (7.709)$$

где постоянные  $\delta_i(t^*)$  являются функциями от  $x_i(t^*)$  и известных констант. По уравнению (7.698) можно написать

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t^*) e^{-\gamma_i(t-t^*)}, \quad t > t^*. \quad (7.710)$$

Мы знаем, однако (см. замечание 7.1), что из  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$  при  $t > t^*$  следует [см. уравнение (7.687)]

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t^*) e^{-\beta_i(t-t^*)}, \quad t > t^*. \quad (7.711)$$

Из уравнений (7.710) и (7.711) заключаем, что

$$\gamma_i = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.712)$$

Сформулируем теперь следующую задачу об оптимальном управлении.

Дана система (7.665) и ограничение на управление

$$|u(t)| \leq 1 \quad \text{при любом } t. \quad (7.713)$$

Найти управление  $u(t)$ :

а) переводящее  $\mathbf{y}(t)$  в  $\mathbf{0}$  за минимальное время  $t^*$ ;

б) удерживающее выход в нуле после перевода его в это состояние.

Предположим, что мы нашли управление, при котором  $\mathbf{y}(t^*) = \mathbf{0}$ , где  $t^*$  — минимальное время. Из замечания 7.2 известно, что для  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$  при любом  $t > t^*$  требуется

$$u(t) = -\frac{1}{h_0} \sum_{i=1}^n q_i(t) x_i(t^*) = -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x}(t^*) \rangle, \quad t > t^*. \quad (7.714)$$

Но так как  $|u(t)| \leq 1$  при любом  $t$ , то должно выполняться условие

$$\left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x}(t^*) \rangle \right| \leq 1 \quad \text{при любом } t > t^*. \quad (7.715)$$

**Определение 7.43.** Обозначим через  $G$  следующую область состояний  $\mathbf{x}$ :

$$G = \left\{ \mathbf{x} : \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x} \rangle \right| \leq 1, \quad t \geq t^* \right\}. \quad (7.716)$$

Эту область будем называть областью цели.

**Лемма 7.2.** Область  $G$ , определяемая уравнением (7.716), замкнута, выпукла и содержит своим элементом начало координат  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**Элементы доказательства.** Сначала докажем, что область  $G$  замкнута. Напомним (см. определение 3.7), что область называется замкнутой, если ее каждая предельная точка является элементом этой области. Рассмотрим последовательность  $\mathbf{x}_n$  в  $G$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , т. е.

$$\left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x}_n \rangle \right| \leq 1, \quad t \geq t^*, \quad (7.717)$$

причем  $\mathbf{x}_n$  сходится к  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}. \quad (7.718)$$

Предположим, что точка  $\mathbf{x}$  не является элементом  $G$  (т. е.  $G$  не замкнута). Тогда найдется такой момент времени  $\hat{t}$ ,  $\hat{t} \geq t^*$ , когда

$$\left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(\hat{t}), \mathbf{x} \rangle \right| > 1 + \varepsilon; \quad \varepsilon > 0, \quad (7.719)$$

но

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(\hat{t}), \mathbf{x} \rangle \right| &= \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(\hat{t}), \mathbf{x} - \mathbf{x}_n \rangle + \left( -\frac{1}{h_0} \right) \langle \mathbf{q}(\hat{t}), \mathbf{x}_n \rangle \right| \leq \\ &\leq \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(\hat{t}), \mathbf{x} - \mathbf{x}_n \rangle \right| + \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(\hat{t}), \mathbf{x}_n \rangle \right|, \end{aligned} \quad (7.720)$$

где последний шаг подтверждается неравенством треугольника (§ 2.13). Используя неравенство Шварца [см. § 2.12, уравнение (2.90)] и уравнение (7.717), получим соотношение

$$\left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(\hat{t}), \mathbf{x} \rangle \right| \leq \left| -\frac{1}{h_0} \right| \|\mathbf{q}(\hat{t})\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| + 1, \quad (7.721)$$

где знак  $\|\cdot\|$  обозначает евклидову норму. Так как  $\mathbf{x}_n$  сходится к  $\mathbf{x}$ , то можно выбрать  $n$  таким, чтобы

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| = \frac{\varepsilon}{\left| -\frac{1}{h_0} \right| \|\mathbf{q}(\hat{t})\|}, \quad (7.722)$$

и поэтому из соотношения (7.721) получим неравенство

$$\left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(\hat{t}), \mathbf{x} \rangle \right| \leq \varepsilon + 1. \quad (7.723)$$

Соотношения (7.719) и (7.723) противоречат друг другу. Следовательно, точка  $\mathbf{x}$  принадлежит  $G$ , и поэтому область  $G$  замкнута. Докажем теперь, что область  $G$  выпукла. Напомним (см. определение 3.18), что область  $G$  выпукла, если для любых  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  из  $G$  и  $r + s = 1$ ,  $r \geq 0$ ,  $s \geq 0$ , точка  $r\mathbf{x} + s\mathbf{y}$  принадлежит  $G$ . Рассмотрим две точки  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  из  $G$ :

$$\left. \begin{aligned} \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x}_1 \rangle \right| &\leq 1, \quad t \geq t^*; \\ \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x}_2 \rangle \right| &\leq 1, \quad t \geq t^* \end{aligned} \right\} \quad (7.724)$$

и два действительных числа  $r$  и  $s$ :

$$r + s = 1, \quad r \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (7.725)$$

Мы должны показать, что

$$\left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), r\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2 \rangle \right| \leq 1, \quad \text{при любом } t > t^*. \quad (7.726)$$

Последнее соотношение справедливо, поскольку

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), r\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2 \rangle \right| &= \left| -\frac{1}{h_0} r \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x}_1 \rangle + \left( -\frac{1}{h_0} \right) s \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x}_2 \rangle \right| \leq \\ &\leq r \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x}_1 \rangle \right| + s \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x}_2 \rangle \right| \leq r + s = 1, \quad t \geq t^*. \end{aligned} \quad (7.727)$$

Доказать, что  $\mathbf{0}$  является элементом  $G$ , очень просто:

$$\left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{0} \rangle \right| = 0 < 1 \quad \text{при любом } t \geq t^*. \quad (7.728)$$

**Замечание 7.3.** Задачу об оптимальном управлении системой (7.665) можно теперь сформулировать относительно фазовых координат следующим образом. Дана система (7.692). Управление  $u(t)$  ограничено неравенством  $|u(t)| \leq 1$ . Найти управление  $u(t)$ , которое переводит любое состояние, не принадлежащее области  $G$ , в эту область за минимальное время (что эквивалентно переводу вектора  $\mathbf{y}(t)$  в  $\mathbf{0}$  за минимальное время), а также удерживает любое состояние из области  $G$  в этой области в течение какого угодно времени (что эквивалентно удержанию  $\mathbf{y}(t)$  в  $\mathbf{0}$ ).

Чтобы полностью решить задачу, необходимо найти область  $G$ . Рассмотрим поэтому некоторые свойства этой области.

**Лемма 7.3.** Если хотя бы одно из  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  является отрицательным числом или имеет отрицательную вещественную часть, то область  $G$  состоит из единственной точки, являющейся началом координат пространства состояний. Иначе говоря, если

$$\beta_i < 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{Re} \beta_i < 0 \quad \text{для любого из } i, \quad (7.729)$$

то

$$G = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{0}\}. \quad (7.730)$$

Таким образом, если передаточная функция  $H(s)$  содержит хотя бы один неминимально-фазовый нуль, то областью цели является начало координат.

**Элементы доказательства.** Для определенности предположим, что

$$\beta_1 < 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \beta_3 > 0, \quad \dots, \quad \beta_n > 0. \quad (7.731)$$

Это означает, что одно из собственных значений матрицы  $\mathbf{Q}$  положительно; следовательно, система (7.699) неустойчива. Так как решение уравнения (7.699) включает член  $e^{-\beta_1(t-t^*)}$ , обнаруживаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}(t)\| = \infty, \quad (7.732)$$

откуда следует, что если  $\mathbf{x} \neq 0$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x} \rangle \right| = \infty. \quad (7.733)$$

Если, однако,  $\mathbf{x} = 0$ , то

$$\left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x} \rangle \right| = 0 \quad \text{при любом } t \geq t^* \quad (7.734)$$

и уравнение (7.730) следует из определения 7.73.

Предположим теперь, что все  $\beta_i$  действительны и различны. Это означает, что передаточная функция  $\hat{H}(s)$  содержит только минимально-фазовые нули. Если

$$0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n, \quad (7.735)$$

то собственные значения  $\mathbf{Q}$  отрицательны и система (7.699) устойчива. Отсюда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}(t)\| = 0, \quad (7.736)^1$$

поэтому область  $G$  содержит более одного элемента. К сожалению, определение области  $G$  в виде соотношения (7.716) не позволяет написать алгебраического выражения для его границы. Но так как область  $G$  замкнута и выпукла, можно утверждать следующее.

**Определение 7.44.** Обозначим через  $\partial G$  границу области  $G$ . Очевидно, что

$$\partial G = \left\{ \mathbf{x} : \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x} \rangle \right| = 1, \quad t \geq t^* \right\}. \quad (7.737)$$

Чтобы получить дополнительную информацию относительно границы области  $\partial G$ , поступим так же, как и в § 7.13. Функция  $\left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x} \rangle \right|$  есть непрерывная ограниченная по величине функция времени при  $t \geq t^*$ . Следовательно<sup>2</sup>, для фиксированного  $\mathbf{x}$  из  $\partial G$  функция  $\left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x} \rangle \right|$  принимает наибольшее абсолютное значение в некоторый момент времени  $\hat{t}$ ,  $\hat{t} \geq t^*$ .

Если  $\hat{t} > t^*$ , то

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t), \mathbf{x} \rangle \right|_{t=\hat{t}} = 0. \quad (7.738)$$

Максимальное значение функции равно 1, так как  $\mathbf{x}$  принадлежит  $\partial G$ , и поэтому

$$\left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(\hat{t}), \mathbf{x} \rangle \right| = 1. \quad (7.739)$$

С помощью уравнений (7.738) и (7.739) можно «исключить»  $\hat{t}$  и получить уравнение для компонент  $\mathbf{x}$ . Итак, рассмотрим следующее замечание.

**Замечание 7.4.** Если выполняется условие (7.735), то точка  $\mathbf{x}$  принадлежит  $\partial G$ , если она удовлетворяет уравнениям (7.738) и (7.739).

Предостережем читателя, что в общем случае невозможно в явном виде выразить  $\hat{t}$  через  $\mathbf{x}$  из уравнения (7.738), а затем подставить его в уравнение (7.739). Итак, отыскание области  $G$  является исключительно сложным делом, а не имея алгебраического уравнения границы  $G$ , конечно, невозможно полностью решить задачу об оптимальном по быстродействию управлении (почему?).

<sup>1</sup> См. § 3.26.

<sup>2</sup> См. § 3.10.





Таким образом, подставляя в последние  $k$  уравнений (7.744)

$$u(t) = -\frac{1}{h_{n-k}} x_{n-k+1}(t), \quad t > t^*, \quad (7.748)$$

получим

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \dot{x}_{n-k+1}(t) \\ \dot{x}_{n-k+2}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -\frac{h_{n-k+1}}{h_{n-k}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{h_{n-k+2}}{h_{n-k}} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(-\frac{h_n}{h_{n-k}} - a_{n-k}\right) & (-a_{n-k+1}) & (-a_{n-k+2}) & \dots & (-a_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-k+1}(t) \\ x_{n-k+2}(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.749)$$

при любом  $t > t^*$ .

Это уравнение является векторным дифференциальным уравнением вида  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{x}}(t)$  при  $t > t^*$ , где  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  —  $k$ -мерный вектор, компоненты которого представляют собой последние  $k$  компонент вектора  $\mathbf{x}(t)$ , и  $\tilde{\mathbf{Q}}$  — матрица размера  $k \times k$ ;

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{Q}}) = \left( \lambda^k + \frac{b_{k-1}}{b_k} \lambda^{k-1} + \dots + \frac{b_1}{b_k} \lambda + \frac{b_0}{b_k} \right) (-1)^k, \quad (7.750)$$

и поэтому  $k$  собственных значений  $\tilde{\mathbf{Q}}$  являются нулями системы (7.742). Так же, как и ранее, находим

$$x_{n-k+1}(t) = \langle \tilde{\mathbf{q}}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t^*) \rangle \quad \text{при } t > t^*, \quad (7.751)$$

где  $\tilde{\mathbf{q}}(t)$  — вектор-строка (первая) фундаментальной матрицы  $e^{\tilde{\mathbf{Q}}(t-t^*)}$ . Из уравнений (7.751) и (7.748), а также из неравенства  $|u(t)| \leq 1$  находим, что соотношение

$$\left| -\frac{1}{h_{n-k}} \langle \tilde{\mathbf{q}}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t^*) \rangle \right| \leq 1 \quad (7.752)$$

должно выполняться при всех  $t > t^*$ .

**Определение 7.45.** Областью  $G$  системы (7.745) является множество

$$G = \left\{ \mathbf{x} : \left| -\frac{1}{h_{n-k}} \langle \tilde{\mathbf{q}}(t), \tilde{\mathbf{x}} \rangle \right| \leq 1, \right. \\ \left. x_1 = x_2 = \dots = x_{n-k} = 0; \quad t \geq t^* \right\}. \quad (7.753)$$

Эта область также замкнута и выпукла. То обстоятельство, что размерность  $\tilde{\mathbf{x}}$  меньше размерности  $\mathbf{x}$ , может оказаться полезным, особенно в случае, когда  $k = 1$  или  $k = 2$ .

**Пример 7.11.** Если

$$k = 1, \quad (7.754)$$

то уравнение (7.747) сводится к уравнению

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_{n-1}(t) = 0; \quad t > t^* \quad (7.755)$$

и

$$x_n(t) = -h_{n-1}u(t). \quad (7.756)$$

Уравнение (7.743) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} h_0 = h_1 = \dots = h_{n-2} = 0; \\ h_{n-1} = b_1; \\ h_n = b_0 - a_{n-1}b_1, \end{aligned} \right\} \quad (7.757)$$

и из уравнения (7.756) получим соотношение

$$u(t) = -\frac{1}{b_1} x_n(t). \quad (7.758)$$

В заключение сформулируем основные результаты, полученные в трех последних параграфах. Мы нашли, что управлять объектами с минимально-фазовыми нулями значительно сложнее, чем объектами, передаточные функции которых не имеют нулей, и установили, что перед тем, как найти линии или гиперповерхности переключения, надо определить в пространстве состояний область  $G$  и свести задачу об оптимальном по быстродействию управлении к переводу состояния в  $G$  за минимальное время, а затем приложить управление, удерживающее состояние в  $G$ .

В случае системы высокого порядка и при наличии большого количества нулей аналитическое определение границы области конечного состояния является задачей крайне трудоемкой, если вообще разрешимой. Однако, когда имеется единственный минимально-фазовый нуль, то область  $G$ , как видно из примера 7.11, оказывается очень простой.

Если объект имеет несколько неминимально-фазовых нулей, то и в этом случае область цели  $G$  состоит из единственной точки, а именно, начала координат.

Встречаются случаи, когда область  $G$  оказывается очень сложной, и инженер, столкнувшись с проблемой проектирования оптимальной системы, не в состоянии даже найти границу области цели  $G$ , не говоря уж об оптимальном законе управления. В таких случаях хорошая субоптимальная система должна заменить область  $G$  более простой или даже просто началом координат. Получившаяся система не будет оптимальной<sup>1</sup>, но она будет намного проще оптимальной, не намного уступая ей по времени переходного процесса.

**Упражнение 7.71.** Для каждого из объектов:

$$\begin{aligned} \text{а) } H(s) &= \frac{s+1}{s(s+2)}; & \text{б) } H(s) &= \frac{s}{s(s+2)}; & \text{в) } H(s) &= \frac{s+2}{s(s+2)}; \\ \text{г) } H(s) &= \frac{s+3}{s(s+2)}; & \text{д) } H(s) &= \frac{s-1}{s(s+2)}; & \text{е) } H(s) &= \frac{s-1}{(s+2)(s+4)}; \\ \text{ж) } H(s) &= \frac{s}{(s+2)(s+4)}; & \text{з) } H(s) &= \frac{s+2}{(s+2)(s+4)}; & \text{и) } H(s) &= \frac{s+3}{(s+2)(s+4)}; \\ \text{к) } H(s) &= \frac{s+4}{(s+2)(s+4)}; & \text{л) } H(s) &= \frac{s+5}{(s+2)(s+4)}; & \text{м) } H(s) &= \frac{s}{s^2+1}; \\ \text{н) } H(s) &= \frac{s+1}{s^2+1}. \end{aligned}$$

1) напишите уравнения переменных состояний (фазовых координат) через выходные переменные и управление и его производные; 2) напишите дифференциальные уравнения в фазовых координатах; 3) найдите области  $G$  и нарисуйте их границы<sup>2</sup>; 4) обсудите, полностью ли управляема система; 5) найдите оптимальный по быстродействию закон управления.

**Упражнение 7.72.** Для каждого из объектов найдите область  $G$  и ее границу:

$$\begin{aligned} \text{а) } H(s) &= \frac{(s+1)(s+2)}{s \cdot (s+3)}; & \text{б) } H(s) &= \frac{(s+1)(s+2)}{(s+4)(s+3)}; \\ \text{в) } H(s) &= \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s+4)}; & \text{г) } H(s) &= \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+5)}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Подобного рода системы принято относить к квазиоптимальным (*Прим. ред.*).

<sup>2</sup> Очевидно, предполагается, что  $|u(t)| \leq 1$  (*Прим. ред.*).

## 7.15. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой главе мы рассмотрели способы, которые используются при проектировании оптимальных по быстродействию систем с обратной связью для различных объектов, описываемых простыми дифференциальными уравнениями. Подход, в своей основе, на протяжении всей главы был один и тот же: мы получали возможно больше информации, применяя принцип минимума, а затем использовали эту информацию совместно с видом траекторий системы в пространстве состояний (фазовом пространстве) для получения и доказательства закона управления, оптимального по быстродействию.

После определения закона управления нам становится известным, какое управление следует прикладывать в каждом из состояний, и тем самым мы «спроектировали» оптимальную по быстродействию систему управления. В технической реализации оптимального закона управления использовался элемент релейного типа, при помощи которого получалось кусочно-постоянное оптимальное управление. Мы установили, что в случае системы второго порядка с одной управляющей переменной необходимо подвергнуть нелинейному преобразованию одну из фазовых координат системы. Зависимость выхода от входа для этой нелинейности идентична линии переключения. Точное уравнение линии переключения определяется уравнениями траекторий. В § 7.11 была предложена методика экспериментального определения линии переключения. Мы обнаружили, что линии переключения для колебательных систем сложнее, чем для систем неколебательных. Были предложены субоптимальные устройства, основанные на оптимальных решениях, но существенно упрощающие реализацию систем.

За исключением задачи, решенной в § 7.9, наше внимание было сконцентрировано на нормальных системах с единственной управляющей переменной. Мы показали, что в случае систем второго порядка формулировка закона оптимального управления (аналитического или экспериментального) сводится к задаче отыскания линии переключения, разделяющей фазовую плоскость на две области. Уравнение этой линии переключения определяет вид нелинейности, требующейся для построения оптимальной по быстродействию системы с обратной связью.

Сложность управляющего устройства системы с обратной связью быстро возрастает с порядком системы. Реализация закона управления для системы третьего порядка, рассмотренная в § 7.4, иллюстрирует это обстоятельство. Для систем выше третьего порядка требуется применять итерационные методы, позволяющие решить систему трансцендентных уравнений, которые описывают гиперповерхность переключения. Это обстоятельство сильно осложняет применение теории. Однако читателю должно быть ясно, что системы высокого порядка можно достаточно точно аппроксимировать системами более низкого порядка, и поэтому для субоптимального управления системами высокого порядка можно использовать управляющее устройство, аналогичное показанному на рис. 7.6б.

Даже в случае очень сложной гиперповерхности переключения с принципиальной точки зрения работа оптимальной по быстродействию системы не представляет никаких особых трудностей. Очень часто знание оптимального решения может помочь проектировщику сконструировать превосходную субоптимальную систему<sup>1</sup>. Те же замечания относятся и к проектированию субоптимальных систем для объектов, передаточная функция кото-

---

<sup>1</sup> К числу многочисленных работ, в которых рассматриваются субоптимальные системы, относятся [72], [122], [162], [181] и [206].

рых содержит более одного нуля. Материал, представленный в § 7.13 и 7.14, показывает, что для таких задач определение оптимального закона управления является сложной проблемой. Поэтому хорошую субоптимальную систему часто можно построить, рассматривая более простую область цели. Можно поступить и еще проще, выбрав в качестве области цели начало координат. Во всяком случае инженер может допустить некоторое увеличение времени перехода, используя при этом более простое оборудование. Разумность такого решения зависит, конечно, от целей применения и наличного оборудования.

---

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО РАСХОДУ  
ТОПЛИВА****8.1. ВВЕДЕНИЕ**

В § 6.11—6.16 мы рассмотрели общую формулировку задачи об оптимальном расходовании топлива. Читателю следует вернуться к знакомому ему уже материалу гл. 6 и в особенности освежить в своей памяти: определение нормальных задач, оптимальных по расходу топлива (определение 6.11); определение вырожденных задач (определение 6.12); принцип релейного управления («включено—выключено»; теорема 6.11); достаточные условия нормальности (теорема 6.13); теоремы единственности (теоремы 6.14 и 6.15) и материал § 6.21 и 6.22, где рассматриваются вырожденные задачи.

Заметим, что теория систем с минимальным расходом топлива разработана не так полно, как теория систем, оптимальных по быстродействию. Проектирование таких систем сложнее, чем аналогичных систем, оптимальных по быстродействию.

Дополнительные сложности возникают из-за постановки самой задачи. Если мы хотим спроектировать систему, удовлетворяющую разумным требованиям в отношении расходования топлива, то мы должны иметь широкий выбор функционалов<sup>1</sup>. Иначе говоря, мы можем включить время перехода в функционал, поскольку система с очень большим временем перехода непрактична с инженерной точки зрения. Конкретный выбор функционала, учитывающего как расходуемое топливо, так и время перехода, — дело проектировщика. Неопытный инженер может перебрать много критериев, решить оптимальную задачу для каждого из них и лишь после этого сделать выводы о проектировании системы, так как трудно предсказать, насколько «хорошим» окажется решение, до тех пор, пока задача не будет решена. В этой главе мы сформулируем несколько задач управления для одного и того же объекта, но при различных критериях. После этого мы сможем сравнить различные оптимальные системы и, что, возможно, более важно, определить тип оборудования, требующегося для реализации каждой из них. Кроме этого, мы сможем сравнить структуру различных оптимальных систем, чтобы установить, является ли такая структура одной и той же для широкого класса систем. В гл. 7 мы видели, что оптимальное по быстродействию управление разнообразными системами второго порядка было одинаковым, так как оно определялось при помощи линии переключения, делящей фазовую плоскость на две области.

<sup>1</sup> См. § 6.15.

Нас интересует теперь, происходит ли то же самое и в системах, оптимальных по расходу топлива. С этой целью мы рассмотрим в настоящей главе подобные системы второго порядка с различными критериями.

Примеры систем, оптимальных по расходу топлива, которые мы рассмотрим, представляют собой поступательное движение массы при условиях:

- 1) сила трения и упругие силы отсутствуют;
- 2) сила трения пропорциональна скорости;
- 3) сила трения является нелинейной функцией скорости.

Будем считать, что управляющая сила создается реактивным двигателем, причем ее величина ограничена и пропорциональна величине расхода топлива.

Так как мы для упрощения изложения рассматриваем системы второго порядка (переменные состояния — это положение и скорость массы), то принимаем, что масса топлива, потребляемого на интервале управления, пренебрежимо мала по сравнению с массой тела. Ввиду этого предположения рассматриваем систему с постоянной массой<sup>1</sup>.

В этой главе будут проиллюстрированы следующие основные положения:

1. Решение, оптимальное по расходу топлива, для ряда систем не существует, хотя это и может показаться несколько странным (в § 8.3 и 8.5 мы увидим, что это возможно). В таких случаях часто можно найти управление, для которого требования в отношении расходования топлива сколь угодно близки к идеальному минимальному количеству топлива, т. е.  $\epsilon$ -оптимальные управления.

2. Оптимальное по расходу топлива управление для некоторых систем неединственно. Другими словами, существует много управлений, требующих одинакового количества топлива. Однако в этом случае времена перехода различны (§ 8.2 и 8.4).

3. Формулировка и решение задач с заранее заданным временем перехода. Оптимальное по расходу топлива управление в этом случае является как функцией исходного состояния, так и заданного времени перехода, и поэтому не может быть выражено в функции только одного (текущего) состояния.

4. Формулировка и решение задач, в которых время перехода задано как функция минимального времени, требующегося для перевода из любого состояния в начало координат (см. § 8.7).

5. Введение функционала стоимости, который является «взвешенной» суммой потребленного топлива и затраченного времени, с целью обойти неразумные с практической точки зрения аспекты решений с минимальным количеством топлива в случаях, когда время перехода либо не задано вообще, либо фиксировано (§ 8.8—8.11). Мы покажем, что оптимальные по быстрдействию и по расходу топлива (с незадачным временем перехода) управления получаются путем соответствующих предельных переходов.

6. Способ субоптимального управления, приводящий к упрощению оптимального управляющего устройства (§ 8.9).

7. Вырожденные управления могут быть оптимальны по расходу топлива лишь в случае, если уравнения системы нелинейны (§ 8.10 и 8.11). В линейной системе такое положение не имеет места.

Так же, как и в гл. 7, некоторые леммы мы будем доказывать очень подробно, а доказательства остальных опустим. Попытаемся вести читателя от аналитических доказательств и построений к доказательствам

<sup>1</sup> См. § 6.11 и 6.12.

и рассуждениям, основанным на графических способах. Действуя таким образом, мы покажем, что довольно часто общий вид функций, а не развернутые формулы, можно использовать для графического определения оптимального управления.

Критерий, связанный с оптимальным расходом топлива, часто возникает в задачах авиационной и космической техники. Движение ракет, спутников и других космических кораблей осуществляется за счет горения топлива или истечения газа из двигателя. Вес аппарата является одним из основных показателей, и поэтому необходимо включать топливо в функционал такого рода задач. Решения многих задач об оптимальном расходе топлива были получены без помощи принципа минимума<sup>1</sup>. Используемые при этом способы в большинстве своем представляют собой смесь полуклассических вариационных методов и физических обоснований. Читатель обнаружит, что зачастую использование принципа минимума упрощает доказательства, но, в общем случае, не уменьшает вычислительных затруднений. Применение принципа минимума к решению задач об оптимальном расходе топлива рассмотрено в работах [3], [6], [7], [8], [13], [14], [15], [16], [29], [71], [73], [76], [104], [120], [121], [139], [160], [161], [162] и [167].

## 8.2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ИНТЕГРАТОР

В этом и следующем параграфах мы рассмотрим задачу оптимального по расходу топлива управления системами первого порядка. Хотя системы первого порядка более или менее тривиальны, их изучение позволяет обнаружить некоторые важные характеристики, являющиеся общими почти для всех систем, оптимальных по расходу топлива.

Прежде чем строго математически сформулировать задачу, начнем с физического описания системы. Предположим, что нам задана масса  $m$ , совершающая поступательное движение без трения. Пусть  $y(t)$  — ее скорость в момент времени  $t$ , а  $u(t)$  — прикладываемая сила или тяга от реактивного двигателя. Разумно ожидать, что величина тяги ограничена, и поэтому примем

$$|u(t)| \leq 1 \text{ при любом } t. \quad (8.1)$$

Предположим также, что величина расхода топлива или газа пропорциональна тяге. Расход топлива пропорционален модулю управления

$$|u(t)|; \quad (8.2)$$

из этого предположения следует, что, удваивая расход топлива, мы намереемся получить вдвое большую тягу. Такое предположение часто или справедливо, или является хорошим приближением к действительности. В этом случае величина

$$F(u) = F \int_0^T |u(t)| dt \quad (8.3)$$

пропорциональна количеству топлива, потребляемому на временном интервале  $[0, T]$ . Будем считать, что масса потребляемого топлива мала по сравнению с массой движущегося тела<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Многие задачи такого рода рассматриваются в работе [151], которая содержит также обширный список литературы.

<sup>2</sup> Такое предположение часто справедливо для небольшой коррекции траектории и положения космических аппаратов. Оно, конечно, неприменимо к стартовым ступеням (бустерам), большую часть массы которых составляет топливо.

Если все сделанные предположения справедливы, то скорость тела  $y(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$m\dot{y}(t) = u(t). \quad (8.4)$$

Предположим, что при  $t = 0$  скорость равна  $y(0)$  и нам задано желаемое значение скорости  $y_d$ . Задача состоит в следующем: найти управляющую тягу  $u(t)$ , которая изменит скорость с  $y(0)$  на  $y_d$ , требуя при этом минимального количества топлива  $F$ , измеряемого соотношением (8.3). Время перехода  $T$  при этом безразлично.

Обозначим через  $x(t)$  «ошибку» в скорости:

$$x(t) = y(t) - y_d. \quad (8.5)$$

Для простоты примем

$$m = 1. \quad (8.6)$$

Из уравнений (8.5) и (8.4) найдем, что  $x(t)$  является решением уравнения

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad (8.7)$$

поскольку  $y_d = \text{const}$ . Ошибку  $x(t)$  назовем состоянием (8.7). Название «интегратор» в заголовке параграфа связано с тем, что  $x(t) = \int u(\tau) d\tau$ .

Сформулируем теперь для системы (8.7) математическую задачу.

**Задача 8.1.** Дана система (8.7), управление в которой ограничено соотношением (8.1) и заданы состояния: исходное  $x(0) = \xi \neq 0$  и конечное  $x = 0$ . Найти управление, переводящее  $\xi$  в 0 таким образом, чтобы функционал  $F$  (8.3) был минимален. Время  $T$  не задано.

Задача 8.1 не отвечает достаточным условиям нормальности задачи об оптимальном расходовании топлива (см. теорему 6.13). Дело в том, что хотя система  $\dot{x}(t) = u(t)$  нормальна, матрица системы  $A$  (скалярная величина 0) состоит из нулевого собственного значения. Далее мы увидим, что «ненормальность» задачи 8.1 имеет своим следствием неединственность оптимальных управлений.

Приступим к доказательству, используя принцип минимума. Гамильтониан  $H$  задачи

$$H = |u(t)| + u(t)p(t). \quad (8.8)$$

Дополнительная переменная  $p(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)} = 0, \quad (8.9)$$

откуда следует

$$p(t) = \pi = \text{const}. \quad (8.10)$$

Управление, абсолютно минимизирующее  $H$ , равно

$$u(t) = 0, \quad \text{если } |p(t)| \leq 1; \quad (8.11)$$

$$u(t) = -\text{sign}\{p(t)\}, \quad \text{» } |p(t)| > 1; \quad (8.12)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad \text{» } p(t) = -1; \quad (8.13)$$

$$-1 \leq u(t) \leq 0, \quad \text{» } p(t) = +1. \quad (8.14)$$

Уравнения (8.11) и (8.12) однозначно определяют управление  $u(t)$  в виде нелинейной функции от  $p(t)$ . Уравнения же (8.13) и (8.14) определяют только полярность, но не величину управления, минимизирующего  $H$ . Как мы увидим ниже, это приведет к неединственности оптимальных по расходу топлива управлений для системы (8.7)



Отступим от обычного порядка действий и займемся вычислениями, которые определяют нижнюю границу расхода топлива. Сначала проинтегрируем соотношение (8.7) и получим

$$x(t) = \xi + \int_0^t u(\tau) d\tau. \quad (8.15)$$

Так как в заданный момент времени  $T$  должно быть  $x(T) = 0$ , то получим

$$\int_0^T u(t) dt = -\xi, \quad (8.16)$$

откуда, в свою очередь, следует<sup>1</sup>

$$|\xi| = \left| \int_0^T u(t) dt \right| \leq \int_0^T |u(t)| dt = F. \quad (8.17)$$

Итак, для перевода  $\xi$  в 0 потребуется не менее чем  $|\xi|$  единиц топлива, поскольку  $F \geq |\xi|$ . Таким образом, если мы найдем управление  $u^*(t)$ , требующее  $F^*$  единиц топлива [т. е.  $F(u^*) = F^*$ ]

$$F^* = |\xi|, \quad (8.18)$$

то такое управление  $u^*(t)$  можно считать оптимальным по расходу топлива. Далее увидим, что найти такое управление возможно.

Пусть  $u^*(t)$  — такое оптимальное управление, тогда (при  $\xi \neq 0$ ) должны удовлетворяться два уравнения

$$\int_0^T u^*(t) dt = -\xi \quad (8.19)$$

и

$$\int_0^T |u^*(t)| dt = |\xi|. \quad (8.20)$$

Определим на интервале  $[0, T]$  множество  $V_T^+$  неотрицательных ограниченных функций  $v(t)$  так:

$$V_T^+ = \{v(t) : 0 \leq v(t) \leq 1 \text{ для } t \in [0, T]; v(t) \text{ не равна тождественно нулю}\}. \quad (8.21)$$

Тогда управление

$$u^*(t) = -\text{sign}\{\xi\} v(t); \quad v(t) \in V_T^+ \quad (8.22)$$

удовлетворяет уравнениям (8.19) и (8.20). Из соотношений

$$|u^*(t)| + u^*(t) = (1 - \text{sign}\{\xi\}) v(t) \text{ и } |\xi| - \xi = (1 - \text{sign}\{\xi\}) |\xi|$$

следует

$$\int_0^T v(t) dt = |\xi|.$$

<sup>1</sup> См. уравнение (3.108).

Поэтому существует бесконечное число функций  $v(t)$ , каждая из которых требует отличного от других времени перехода  $T$ , причем

$$\int_0^T v(t) dt = |\xi|.$$

Итак, мы доказали следующий закон управления.

**Закон управления 8.1 (решение задачи 8.1).** Оптимальное по расходу топлива управление как функция состояния  $x$  определяется:

$$\left. \begin{aligned} u^*(t) &= -v(t); & x > 0; \\ u^*(t) &= v(t); & x < 0; \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

где  $v(t) \in V_T^+$  [см. уравнение (8.21)]. Это оптимальное управление неединственно.

Обратимся теперь к принципу минимума и посмотрим, можно ли получить те же самые результаты. Так как система (8.7) инвариантна во времени и время перехода  $T$  не задано, то гамильтониан должен быть тождественно равен нулю. Поскольку  $p(t) = \pi$ , из этого условия следует

$$H = |u(t)| + u(t)\pi = 0 \text{ для любого } t \in [0, T]. \quad (8.24)$$

Если  $u(t) = 0$ , то уравнение (8.24) превращается в тождество при любом  $\pi$ . Если  $u(t) \neq 0$ , то из уравнения (8.24) следует

$$\pi = -\text{sign}\{u(t)\} = \pm 1, \quad (8.25)$$

так как  $|u(t)| = \text{sign}\{u(t)\} u(t)$ , но  $p(t) = \pi$  при любом  $t \in [0, T]$  [см. уравнение (8.10)]. Поэтому  $|p(t)| = 1$  при любом  $t \in [0, T]$  и, следовательно, минимизация гамильтониана дает уравнения (8.13) и (8.14), которые, как мы уже отмечали, определяют только полярность, но не величину управления. Если выбрать

$$\pi = \text{sign}\{\xi\}, \quad (8.26)$$

то на основании уравнений (8.25), (8.26), (8.13) и (8.14) можно заключить, что управление  $u^*(t)$  [см. уравнение (8.22)] переводит  $\xi$  в 0. Так как это управление  $u^*(t)$  удовлетворяет необходимым условиям принципа минимума, оно должно быть оптимальным по расходу топлива. Этот результат согласуется с выводами, сделанными нами ранее.

Проверим теперь, что минимальное количество топлива как функция состояния является решением уравнения Гамильтона—Якоби<sup>1</sup>. Иначе говоря, мы должны показать, что функция

$$F^*(x) = |x| \quad (8.27)$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial F^*}{\partial t} + |u^*(t)| + u^*(t) \frac{\partial F^*}{\partial x} = 0. \quad (8.28)$$

Если  $x = 0$ , то  $F^*(x) = 0$  и  $u^*(t) = 0$ , поэтому уравнение (8.28) удовлетворяется. Если  $x \neq 0$ , то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial t} &= 0; & \frac{\partial F^*}{\partial x} &= \text{sign}\{x\}; \\ |u^*(t)| &= v(t); & u^*(t) &= -\text{sign}\{x\} v(t); \\ & & v(t) &\in V_T^+. \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

<sup>1</sup> См. § 5.20.

Подставляя соотношения (8.29) в левую часть уравнения (8.28), получим

$$v(t) - \text{sign}\{x\} \text{sign}\{x\} v(t) = 0. \quad (8.30)$$

Итак, нами доказано, что  $F^* = |x|$  является минимальным количеством топлива и управление  $u^*(t)$  оптимально по расходу топлива.

В тех случаях, когда решение задачи оказывается неединственным, математическое описание, как правило, усложняется. Но с практической точки зрения неединственность оптимальных управлений часто полезна, так как среди множества управлений можно выбрать одно, обладающее дополнительными «полезными» свойствами. Проиллюстрируем это на двух примерах.

**Пример 8.1.** Рассмотрим управление  $u(t)$ , определенное как функция состояния  $x(t)$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u^*(t) &= -\text{sign}\{x(t)\}, & \text{если } |x(t)| \geq 1. \\ u^*(t) &= -x(t), & \text{« } |x(t)| < 1. \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

Предоставляем читателю убедиться, что управление (8.31) оптимально по расходу топлива. На рис. 8.1 показана система с обратной связью, вырабатывающая управление по формулам (8.31). Полезным свойством этой системы является то, что канал обратной связи линеен. Ограничитель (или элемент с насыщением) на рис. 8.1 дает ограничение  $|u(t)| \leq 1$ . Недостаток устройства — ошибка обращается в нуль лишь при бесконечно большом времени, хотя время, требующееся для того, чтобы сделать ошибку достаточно малой, конечно.

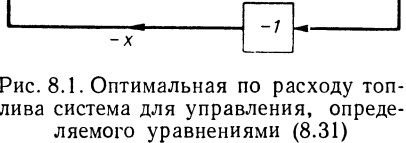


Рис. 8.1. Оптимальная по расходу топлива система для управления, определяемого уравнениями (8.31)

**Пример 8.2.** Рассмотрим управление

$$\left. \begin{aligned} u^*(t) &= -\text{sign}\{x(t)\}, & \text{если } |x(t)| \neq 0; \\ u^*(t) &= 0, & \text{« } x(t) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

Легко доказать, что управление (8.32) оптимально по расходу топлива (в уравнении (8.23) можно выбрать  $v(t) = +1$  для  $t \in [0, T]$ ). Желательным свойством такого управления является его оптимальность и по быстродействию<sup>1</sup>. Время  $T$ , требующееся для перевода состояния  $x$  в 0 управлением (8.32), равно  $T = |x|$  т. е. минимальному времени, и количество потребляемого при этом топлива  $|x|$  — наименьшее из возможных.

Очень часто надо выделить управления, являющиеся оптимальными по расходу топлива и дающие наименьшее возможное время перехода  $T$ , не отыскивая весь класс управлений, оптимальных по расходу топлива. В оставшейся части параграфа рассмотрим этот способ.

Пусть задана система

$$\dot{x}(t) = u(t); |u(t)| \leq 1 \quad (8.33)$$

с начальным состоянием  $x(0) = \xi \neq 0$  и функционалом<sup>2</sup>

$$J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt, \quad (8.34)$$

где время перехода  $T$  не задано и

$$k > 0. \quad (8.35)$$

Требуется найти управление, переводящее систему (8.33) из  $\xi$  в 0 и минимизирующее функционал  $J$ .

Гамильтониан  $H$  для системы (8.33) и функционала (8.34) равен

$$H = k + |u(t)| + u(t)p(t). \quad (8.36)$$

<sup>1</sup> См. § 7.10, уравнение (7.442) и, в частности, упражнение 7.58.

<sup>2</sup> Сравните с задачей 6.2ж.

Тогда

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)} = 0, \quad (8.37)$$

и поэтому

$$p(t) = \pi = \text{const}. \quad (8.38)$$

Управление  $u(t)$ , абсолютно минимизирующее гамильтониан (8.36), выражается уравнениями (8.11)—(8.14). Так как система (8.33) инвариантна во времени и время  $T$  в функционале (8.34) не задано, то гамильтониан должен быть равен нулю при всех  $t \in [0, T]$ . Если  $|\pi| < 1$ , то  $|p(t)| < 1$  для любого  $t \in [0, T]$  и по уравнению (8.11)  $u(t) = 0$  для всех  $t \in [0, T]$ . В этом случае

$$H = k > 0, \quad (8.39)$$

откуда следует, что управление  $u(t) = 0$  не является оптимальным<sup>1</sup>. Если  $|\pi| = 1$ , то  $|p(t)| = 1$  при любом  $t \in [0, T]$ , и по уравнениям (8.13)—(8.14) имеем  $u(t) = -\text{sign}\{\pi\} v(t)$ ,  $v(t) \in V_T^+$ .

В этом случае

$$H = k > 0, \quad (8.40)$$

и поэтому управление  $u(t) = -\text{sign}\{\pi\} v(t)$  не может быть оптимальным. Если  $|\pi| > 1$ , то  $|p(t)| > 1$  при любом  $t \in [0, T]$  и, согласно уравнению (8.12), управление  $u(t) = -\text{sign}\{\pi\}$ .

Тогда

$$H = k + 1 - |\pi| = 0, \quad (8.41)$$

откуда получается соотношение ( $k > 0$ )

$$|\pi| = k + 1 > 1. \quad (8.42)$$

Следовательно, управление не меняет знака, и поэтому

$$u(t) = -\text{sign}\{\xi\} \quad (8.43)$$

является экстремальным управлением, переводящим систему (8.33) из  $\xi$  в 0. Так как экстремальное управление единственно и существует, то уравнение (8.43) должно определять оптимальное управление. Действительно, управление (8.43) является оптимальным по быстродействию для системы (8.33). Так как  $|u(t)| = 1$  при любом  $t \in [0, T]$ , то минимальное значение  $J$ , обозначенное через  $J^*$ , равно

$$J^* = \int_0^T (k + 1) dt = (k + 1) T. \quad (8.44)$$

Но управление (8.43) оптимально по быстродействию. Поэтому время перехода  $T$  минимально, т. е.

$$T = |\xi|. \quad (8.45)$$

Следовательно,

$$J^* = (k + 1) |\xi|. \quad (8.46)$$

Заметим также, что

$$\lim_{k \rightarrow 0} J^* = |\xi| = F^*. \quad (8.47)$$

Иначе говоря, в пределе, при  $k \rightarrow 0$ , минимальная стоимость  $J^*$  превращается в минимальное количество топлива  $F^*$ . Отсюда следует, что управление (8.43) оптимально также и по расходу топлива. Управление (8.43) требует наименьшего времени. В дальнейшем с помощью пре-

<sup>1</sup> Оптимальным по отношению к функционалу (8.34).

дельного перехода покажем, что в ряде случаев можно найти оптимальное по расходу топлива управление, требующее минимального времени перехода, отыскав

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \min_{u(t)} \int_0^T [k + |u(t)|] dt \right\}. \quad (8.48)$$

В этом параграфе нами показано, что может существовать много управлений, оптимальных по расходу топлива. В частности, управление, оптимальное по быстрдействию, может быть также оптимальным и по расходу топлива.

**Упражнение 8.1.** Рассмотрите систему  $\dot{x}(t) = u(t)$ ,  $|u(t)| \leq 1$ . Минимизируйте расход топлива  $F = \int_0^T |u(t)| dt$ , считая время  $T$  заданным. Пусть  $T$  больше минимального времени и конечным является состояние  $x(T) = 0$ . Для каждого  $T$  найдите минимальное количество топлива  $F^*(T)$ . Начертите график  $F^*(T)$  в функции  $T$ , считая исходное состояние фиксированным. Исследуйте полученные результаты.

### 8.3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. АПЕРИОДИЧЕСКОЕ ЗВЕНО

Рассмотрим поступательное движение единичной массы, когда сила трения (или сопротивления среды) направлена противоположно скорости и пропорциональна ей. Обозначим через  $y(t)$  — скорость, а через  $u(t)$  — движущую силу (силу тяги), которую будем считать ограниченной:

$$|u(t)| \leq 1 \text{ при любом } t. \quad (8.49)$$

При этих предположениях скорость  $y(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + u(t), \quad a > 0, \quad (8.50)$$

где  $ay(t)$  — член, соответствующий силе трения.

Для удобства обозначим

$$x(t) = ay(t). \quad (8.51)$$

Тогда  $x(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + au(t). \quad (8.52)$$

Очевидно,  $x(t)$  можно рассматривать как состояние системы (8.52). Передаточная функция объекта (8.50) равна  $\frac{1}{s+a}$ , и поэтому он назван аperiodическим звеном.

В этом параграфе решим следующую задачу. Пусть даны система (8.52), управление в которой ограничено соотношением (8.49); исходное состояние  $x(0) = \xi$  и достижимое конечное состояние  $x(T) = \theta \neq \xi$ .

Требуется найти управление, переводящее систему (8.52) из  $\xi$  в  $\theta$  и минимизирующее при этом функционал

$$F(u) = F = \int_0^T |u(t)| dt, \quad (8.53)$$

где время перехода  $T$  может быть заданным или нет.

Изложение основных идей будет достаточно беглым и нестрогим, многие результаты будут даны без доказательств. Математический аппарат достаточно прост, и поэтому читатель без труда сможет проверить любое из утверждений. Мы хотим показать следующее:

1) часто решения, оптимального по расходу топлива, не существует; можно, однако, найти решение, почти оптимальное с практической точки зрения;

2) часто управление, оптимальное по расходу топлива, идентично управлению, оптимальному по быстродействию.

Гамильтониан для системы (8.52) и функционала (8.53) равен

$$H = |u(t)| - ax(t)p(t) + au(t)p(t). \quad (8.54)$$

Дополнительная переменная  $p(t)$  является решением дифференциального уравнения

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)} = ap(t), \quad (8.55)$$

и поэтому при  $p = p(0)$

$$p(t) = pe^{at}. \quad (8.56)$$

Управление, абсолютно минимизирующее гамильтониан, равно

$$u(t) = 0, \quad \text{если } |ap(t)| < 1; \quad (8.57)$$

$$u(t) = -\text{sign}\{ap(t)\} \quad \text{если } |ap(t)| > 1; \quad (8.58)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad \text{если } ap(t) = -1; \quad (8.59)$$

$$-1 \leq u(t) \leq 0, \quad \text{если } ap(t) = +1. \quad (8.60)$$

Случай

$$|ap(t)| = 1 \quad \text{при любом } t \in [t_1, t_2] \quad (8.61)$$

невозможен. На основании этого из уравнения (8.56) делаем вывод, что в качестве возможных оптимальных управляющих последовательностей следует рассматривать только

$$\{0\}, \{+1\}, \{-1\}, \{0, +1\}, \{0, -1\}. \quad (8.62)$$

Нетрудно показать, что для перевода системы (8.52) из любого исходного состояния  $\xi$  в  $\theta$  в течение конечного времени необходимо выполнение неравенства

$$-1 < \theta < +1. \quad (8.63)$$

Это условие связано с «недостатком» интегрирования в системе (8.52) и ограничениями величины управления (8.49). Далее всегда будем предполагать, что условие (8.63) удовлетворяется.

Рассмотрим теперь три случая:

**Случай 1.**

Пусть  $\xi$  и  $\theta$  таковы, что

$$\text{sign}\{\xi\} = \text{sign}\{\theta\}, \quad |\xi| > |\theta|, \quad \xi \neq \theta \neq 0. \quad (8.64)$$

Управление

$$u(t) = 0 \quad (8.65)$$

переводит систему (8.52) из  $\xi$  в  $\theta$  за время  $\hat{T}$ , равное

$$\hat{T} = \frac{1}{a} \log \frac{\xi}{\theta}. \quad (8.66)$$

Последнее соотношение получается в результате подстановки управления (8.65) в уравнение (8.52). Очевидно, количество топлива (8.53) равно нулю (что является наименьшей из возможных величин). Заметим, что

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \hat{T} = \infty. \quad (8.67)$$

Итак, если время перехода  $T$  не задано и  $\theta \neq 0$ , то оптимальным по расходу топлива является управление  $u(t) = 0$ . Время перехода при этом равно  $\hat{T}$ . Если, однако,  $\theta = 0$ , то (строго говоря) оптимального по расходу топлива решения не существует, так как для всех конечных  $t$   $x(t) \neq 0$  при  $u(t) = 0$ . Тем не менее должно быть ясно, что при  $u(t) = 0$  к нулю можно приблизиться на любую наперед заданную малую величину в течение конечного времени, если  $T$  может быть достаточно большим. Поэтому существует так называемое  $\varepsilon$ -оптимальное управление.

**Случай 2.**

Пусть

$$\text{sign}\{\xi\} = \text{sign}\{\theta\}, \quad |\xi| < |\theta| < 1; \quad (8.68)$$

управление

$$u(t) = \text{sign}\{\theta\} \quad (8.69)$$

является единственным оптимальным по расходу топлива. Время  $T^*$ , требующееся для перевода  $\xi$  в  $\theta$ , равно

$$T^* = \frac{1}{a} \log \frac{\xi - \text{sign}\{\theta\}}{\theta - \text{sign}\{\theta\}}. \quad (8.70)$$

Минимальное количество топлива  $F^*$  составляет

$$F^* = \int_0^{T^*} 1 dt = T^*, \quad (8.71)$$

причем  $T^*$  — минимально возможное время<sup>1</sup>, которое требуется для перевода системы из  $\xi$  в  $\theta$ .

В этом случае управление, оптимальное по расходу топлива, идентично управлению, оптимальному по быстродействию. Если решить задачу для  $T$  фиксированного, причем  $T > T^*$ , то потребуется топлива больше, чем  $F^*$ .

**Случай 3.**

Пусть

$$\text{sign}\{\xi\} = -\text{sign}\{\theta\}. \quad (8.72)$$

Если время  $T$  не задано, то оптимальная стратегия управления состоит в следующем: управление  $u(t) = 0$  подается на вход системы до тех пор, пока не будет достигнуто состояние  $x(t) = 0$ , а затем на вход системы подается  $u(t) = \text{sign}\{\theta\}$  — пока не будет достигнуто состояние  $\theta$ .

Как и в случае 1, можно возразить, что с математической точки зрения решения, оптимального по расходу топлива при заданном времени  $T$ , не существует. Однако при  $T$  достаточно большом можно найти  $\varepsilon$ -оптимальное решение.

**Упражнение 8.2.** Рассмотрите систему

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad (8.73)$$

где  $\theta = 0,5$  является желаемым конечным состоянием. Функционал имеет вид

$$F = \int_0^T |u(t)| dt.$$

а) Примите, что исходное состояние  $\xi = 1$  и время перехода  $T$  задано. Начертите график минимального значения  $F$  в функции от  $T$ .

б) Повторите это же для  $\xi = -1$ .

**Упражнение 8.3.** Рассмотрите систему (8.73) с функционалом

$$J = \int_0^T (k + |u(t)|) dt, \quad k > 0, \quad (8.74)$$

<sup>1</sup> См. § 7.10, упражнение 7.59.

где  $T$  не задано. Желаемое конечное состояние  $\theta = 0$ . Покажите, что оптимальное управление, переводящее систему (8.73) из исходного состояния  $\xi$  в конечное состояние  $\theta = 0$  и минимизирующее  $J$ , выражается в функции от состояния следующим образом:

$$u^* = \left. \begin{aligned} & - \operatorname{sign} \{x(t)\}, \text{ если } |x(t)| < k; \\ & 0, \text{ если } |x(t)| \geq k. \end{aligned} \right\} \quad (8.75)$$

У к а з а н и е: так как  $T$  не фиксировано, воспользуйтесь равенством гамильтона нулю вдоль оптимальной траектории. Покажите, что если исходное состояние  $\xi$ ,  $|\xi| < k$ , то управление (8.75) идентично управлению, оптимальному по быстрдействию. Покажите, что минимальная величина  $J$  как функции от состояния  $x$ , обозначенная через  $J^*(x)$ , определяется соотношениями

$$J^*(x) = \left. \begin{aligned} & \log \left[ |x|^k \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \right], \text{ если } |x| \geq k; \\ & \log (|x| + 1)^{k+1}, \text{ если } |x| < k. \end{aligned} \right\} \quad (8.76)$$

Покажите, что уравнение Гамильтона—Якоби для этой задачи имеет вид

$$\left. \begin{aligned} & k - x \frac{\partial J^*(x)}{\partial x} = 0, \text{ если } |x| \geq k; \\ & k + 1 - x \frac{\partial J^*(x)}{\partial x} - \left| \frac{\partial J^*(x)}{\partial x} \right| = 0, \text{ если } |x| < k. \end{aligned} \right\} \quad (8.77)$$

Докажите, что  $J^*(x)$  действительно является решением уравнения Гамильтона—Якоби. Покажите также, что  $\lim_{k \rightarrow 0} J^*(x) = 0$ .

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПО РАСХОДУ ТОПЛИВА УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ С ДВОЙНЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ

### 8.4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ <sup>1</sup>

Рассмотрим движущуюся поступательно единичную массу при отсутствии трения. Обозначим через  $y(t)$  ее положение, а через  $u(t)$  — силу тяги. Будем считать, что управление ограничено по величине

$$|u(t)| \leq 1 \text{ при любом } t. \quad (8.78)$$

Положение системы  $y(t)$  является решением дифференциального уравнения

$$\ddot{y}(t) = u(t). \quad (8.79)$$

Напомним, что оптимальное по быстрдействию управление системой (8.79) рассмотрено в § 7.2.

Предположим, что нам задано желаемое положение  $y_d = \text{const}$ ; наша цель — обеспечить управление системой (8.79) таким образом, чтобы при некотором  $T$  получить  $y(T) = y_d$ . Если определить фазовые координаты  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , приняв

$$x_1(t) = y(t) - y_d, \quad x_2(t) = \dot{y}(t), \quad (8.80)$$

то эти  $x_i(t)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} & \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ & \dot{x}_2(t) = u(t). \end{aligned} \right\} \quad (8.81)$$

Фазовая координата  $x_1(t)$  представляет собой ошибку по положению, а  $x_2(t)$  — скорость массы.

Займемся минимизацией функционала

$$F(u) = F = \int_0^T |u(t)| dt, \quad (8.82)$$

<sup>1</sup> Этот вопрос рассматривается в работах [3], [7], [15], [71], [73], [121], [139] и [161].



который характеризует расход топлива. Время  $T$  есть время перехода. Примем, что масса потребляемого топлива мала по сравнению с массой летательного аппарата, и поэтому уравнения (8.81) являются хорошей аппроксимацией движения летательного аппарата.

В § 8.5 рассмотрим минимизацию функционала (8.82) для системы (8.81), когда  $T$  не задано. В § 8.6 рассмотрим минимизацию этого же функционала для системы (8.81) в случае, когда время перехода или фиксировано ( $T = T_f$ ), или ограничено заданной величиной  $T \leq \hat{T}_f$ . В § 8.7 рассмотрим ту же задачу, но потребуем, чтобы время  $T$  было ограничено произведением постоянной на минимальное время, соответствующее каждому состоянию. В § 8.8 рассмотрим минимизацию функционала

$$J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt$$

с незадаанным  $T$ . В этом случае функционал является линейной комбинацией времени перехода и израсходованного топлива.

Мы будем часто использовать результаты и формулы, полученные в § 7.2, с целью сократить изложение. Для облегчения ссылок многие выводы будут сформулированы в виде лемм.

#### 8.5. ЗАДАЧА С НЕЗАДАНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПЕРЕХОДА

В этом параграфе мы рассмотрим задачу оптимального по расходу топлива управления объектом с двойным интегрированием в случае, когда время перехода не задано (т. е. задачу 8.2). Изучение этой системы представляет интерес по следующим причинам:

- 1) имеются области исходных состояний, для которых решения, оптимального по расходу топлива, не существует;
- 2) имеются области исходных состояний, для которых существует много оптимальных решений;
- 3) имеются области исходных состояний, для которых оптимальное по расходу топлива решение является единственным.

Методика подобна изложенной в § 8.2. Сначала мы определим задачу, а затем найдем управляющие последовательности, которые могут оказаться оптимальными управлениями. Далее вернемся назад и найдем выражение для минимального расхода топлива в функции от состояния и, наконец, установим закон управления, оптимальный по расходу топлива (если оптимальное управление существует).

В этом параграфе решим следующую задачу.

**Задача 8.2.** Дана система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \quad |u(t)| \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (8.83)$$

Найти управление, переводящее систему (8.83) из любого исходного состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  в начало координат  $(0, 0)$  и минимизирующее при этом функционал

$$F(u) = F = \int_0^T |u(t)| dt, \quad (8.84)$$

где время перехода  $T$  не задано.

Гамильтониан  $H$  для данной задачи имеет вид

$$H = |u(t)| + x_2(t)p_1(t) + u(t)p_2(t). \quad (8.85)$$

Управление, абсолютно минимизирующее гамильтониан, равно:

$$u(t) = 0, \quad \text{если } |p_2(t)| < 1; \quad (8.86)$$

$$u(t) = -\text{sign } \{p_2(t)\}, \quad \text{если } |p_2(t)| > 1; \quad (8.87)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad \text{если } p_2(t) = -1; \quad (8.88)$$

$$-1 \leq u(t) \leq 0, \quad \text{если } p_2(t) = +1. \quad (8.89)$$

Дополнительные переменные  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  являются решениями канонических уравнений

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = 0; \quad (8.90)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -p_1(t), \quad (8.91)$$

из которых получим

$$p_1(t) = \pi_1 = \text{const}; \quad (8.92)$$

$$p_2(t) = \pi_2 - \pi_1 t, \quad (8.93)$$

где

$$\pi_1 = p_1(0); \quad \pi_2 = p_2(0). \quad (8.94)$$

Заметим, что если  $|p_2(t)| = 1$  для  $t \in [t_1, t_2]$ , то уравнения (8.88) и (8.89) определяют только полярность, но не величину управления  $u(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ . Это условие вырожденности возможно, так как задача 8.2 не является нормальной<sup>1</sup>.

Таким образом, получаем лемму.

**Лемма 8.1.** Если

$$\pi_1 = 0; \quad |\pi_2| = 1, \quad (8.95)$$

$$\text{то } |p_2(t)| = 1 \text{ при любом } t \in [0, T]. \quad (8.96)$$

Следовательно, если  $v(t) \in V_T^+$ , где

$$V_T^+ = \{v(t): 0 \leq v(t) \leq 1 \text{ при любом } t \in [0, T] \\ \text{и } v(t) \neq 0 \text{ тождественно}\} \quad (8.97)$$

[см. соотношение (8.21)], то управление

$$u(t) = -\text{sign } \{\pi_2\} v(t), \quad v(t) \in V_T^+ \quad (8.98)$$

может быть управлением, оптимальным по расходу топлива.

**Доказательство.** Подставив уравнения (8.92), (8.93), (8.95) и (8.98) в уравнение (8.85), получим

$$H = v(t) + x_2(t) \cdot 0 - v(t) = 0 \text{ при любом } t \in [0, T], \quad (8.99)$$

и поэтому управление [по формуле (8.98)] может быть экстремальным.

**Лемма 8.2.** Если

$$\pi_1 \neq 0, \quad (8.100)$$

то оптимальными могут быть девять управляющих последовательностей

$$\{0\}, \{+1\}, \{-1\}, \{+1; 0\}, \{-1; 0\}, \{0; +1\}, \\ \{0; -1\}, \{+1; 0; -1\}, \{-1; 0; +1\}. \quad (8.101)$$

<sup>1</sup> См. определение 6.11 и теорему 6.13.

**Доказательство.** Если  $\pi_1 \neq 0$ , то  $|\rho_2(t)| = 1$  не более, чем при двух изолированных моментах времени. Так как  $\rho_2(t)$  — линейная функция времени (см. рис. 7.1), то из уравнений (8.86) и (8.87) получаются управляющие последовательности (8.101).

Мы уже рассчитали траектории на фазовой плоскости для системы (8.83) при  $u = \Delta = \pm 1$ . Уравнения этих траекторий выражаются соотношениями (7.14)—(7.19), а вид траекторий показан на рис. 7.2. Если  $u(t) = 0$ , то решение уравнения (8.83) выражается соотношениями

$$\begin{cases} x_1(t) = \xi_1 + \xi_2 t; \\ x_2(t) = \xi_2. \end{cases} \quad (8.102)$$

Траектории при  $u(t) = 0$  представляют собой прямые, показанные на рис. 8.2.

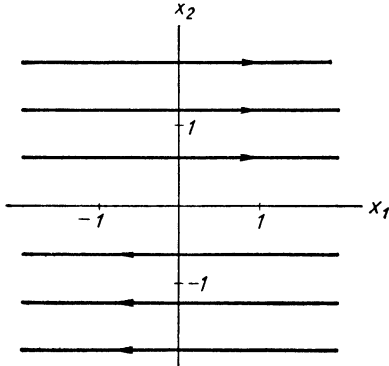


Рис. 8.2. Траектории системы (8.83) при  $u(t) = 0$

Заметим теперь, что мы можем найти нижнюю границу расхода топлива как функцию исходного состояния, воспользовавшись особенностями уравнений (8.83)<sup>1)</sup>.

**Лемма 8.3.** Обозначим через  $(\xi_1, \xi_2)$  исходное состояние, а через  $F^*(\xi_1, \xi_2)$  — минимальное количество топлива (если такое существует), требующееся для перевода  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  за некоторое (нефиксированное) время  $T$ . Минимальное количество топлива удовлетворяет соотношению

$$F^*(\xi_1, \xi_2) \geq |\xi_2|. \quad (8.103)$$

Следовательно, если существует управление  $u^*(t)$ , переводящее  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и требующее количество топлива  $|\xi_2|$ , то  $u^*(t)$  оптимально и  $F^*(\xi_1, \xi_2) = |\xi_2|$ .

**Доказательство.** Для любого  $u(t)$  справедливо  $\dot{x}_2(t) = u(t)$ , откуда

$$x_2(t) = \xi_2 + \int_0^t u(\tau) d\tau. \quad (8.104)$$

Так как при  $t = T$  мы должны достичь начала координат, то  $x_2(T) = 0$ , и, следовательно,

$$|\xi_2| = \left| \int_0^T u(t) dt \right|.$$

Можно записать неравенство

$$|\xi_2| = \left| \int_0^T u(t) dt \right| \leq \int_0^T |u(t)| dt = F. \quad (8.105)$$

Если  $F \geq |\xi_2|$ , то должно выполняться соотношение

$$F^*(\xi_1, \xi_2) \geq |\xi_2|. \quad (8.106)$$

Здесь уместно сделать несколько замечаний. Во-первых, подчеркнем, что соотношение  $F \geq |\xi_2|$  дает нижнюю границу  $|\xi_2|$  для расхода топлива. Если есть управление, переводящее  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$ , и при этом расходуется количество топлива, равное  $|\xi_2|$ , то можно быть уверенным в том,

<sup>1)</sup> Аналогичным образом мы поступали в § 8.2.

что это управление является оптимальным (по расходу топлива). Во-вторых, хотя доказательство леммы и не гарантирует, что наибольшей нижней границей является именно  $|\xi_2|$ , мы покажем далее, что это именно так, и будем называть  $|\xi_2|$  (идеальным) минимальным количеством топлива. В-третьих, отметим, что уравнение (8.103) совершенно такое же, как и уравнение (8.18) в § 8.2, где требовалось уменьшить до нуля ошибку по скорости при минимальном расходе топлива, причем никаких требований относительно положения при  $t = T$  не предъявлялось. Однако в данном случае мы должны уменьшить до нуля ошибку по положению, так и величину скорости, если это возможно, израсходовав  $|\xi_2|$  единиц топлива. Можно сразу почувствовать, что при этом возникают некоторые проблемы. Например, если начальным состоянием системы (8.83) является  $(\xi_1, 0)$ , то мы должны перевести систему из  $(\xi_1, 0)$  в  $(0, 0)$  с нулевыми затратами топлива. Отсюда следует, что  $u(t) = 0$  при любом  $t \in [0, T]$ . Решив уравнения (8.83) для  $u(t) = 0$  и исходного состояния  $(\xi_1, 0)$ , мы получим, что  $x_1(t) = \xi_1 \neq 0$  при любом  $t$ . Следовательно, для начального состояния  $(\xi_1, 0)$  оптимального по расходу топлива решения не существует. Как мы увидим, имеются и другие исходные состояния, для которых, строго говоря, оптимального решения не существует<sup>1</sup>. Тем не менее можно найти управления, для которых затраты топлива сколь угодно близки к (идеальному) минимальному количеству  $F^* = |\xi_2|$  (см. лемму 8.6).

Для отыскания оптимальных по расходу топлива решений и областей исходных состояний, для которых оптимальных решений не существует, разделим фазовую плоскость  $x_1x_2$  на четыре области при помощи кривых  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  (см. определения 7.2 и 7.3) и оси  $x_1$ . Напомним, что кривые  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  определялись уравнениями (7.19) и (7.20) как

$$\gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{2} x_2^2; x_2 \leq 0 \right\}; \quad (8.107)$$

$$\gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2; x_2 \geq 0 \right\}. \quad (8.108)$$

**Определение 8.1.**  $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$  — множества (области), показанные на рис. 8.3, определенные как

$$R_1 = \{ (x_1, x_2) : x_2 \geq 0; x_1 > x'_1, \text{ где } (x'_1, x_2) \in \gamma_- \}; \quad (8.109)$$

$$R_2 = \{ (x_1, x_2) : x_2 > 0; x_1 < x'_1, \text{ где } (x'_1, x_2) \in \gamma_- \}; \quad (8.110)$$

$$R_3 = \{ (x_1, x_2) : x_2 \leq 0; x_1 < x'_1, \text{ где } (x'_1, x_2) \in \gamma_+ \}; \quad (8.111)$$

$$R_4 = \{ (x_1, x_2) : x_2 < 0; x_1 > x'_1, \text{ где } (x'_1, x_2) \in \gamma_+ \}. \quad (8.112)$$

Заметим, что

$$R_1 \cup R_4 = R_-; \quad R_2 \cup R_3 = R_+, \quad (8.113)$$

где  $R_+$  и  $R_-$  соответствуют определению 7.5 (см. также рис. 7.3).

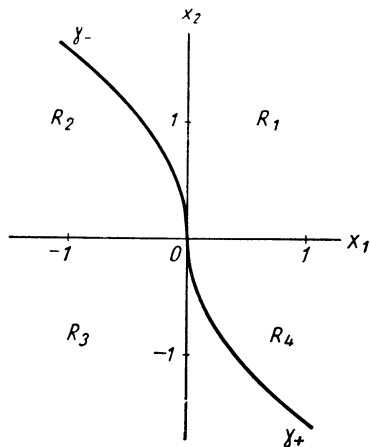


Рис. 8.3. Кривые  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$  и ось  $x_1$  делят фазовую плоскость на четыре области  $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$

<sup>1</sup> Напомним, что в § 8.3 имел место аналогичный случай.

**Лемма 8.4.** Если  $(\xi_1, \xi_2) \in \gamma_+$ , то управление  $u(t) = +1$  оптимально по расходу топлива, причем это управление есть единственное оптимальное управление.

**Доказательство.** Допустим, что  $\pi_1 \neq 0$  и поэтому выполняется лемма 8.2. Тогда из всех управляющих последовательностей (8.101) лишь последовательность  $\{+1\}$  переводит  $(\xi_1, \xi_2) \in \gamma_+$  в начало координат. Если выполняется лемма 8.1, то управление  $u(t)$  должно определяться уравнением (8.98). Пусть  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — решения уравнений (8.83) с исходным состоянием  $(\xi_1, \xi_2) \in \gamma_+$  и с управлением (8.98). Очевидно,  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  определяются соотношениями

$$x_2'(t) = \xi_2 + \int_0^t [-\text{sign}\{\pi_2\} v(\tau)] d\tau; \quad (8.114)$$

$$x_1'(t) = \xi_1 + \xi_2 t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau [-\text{sign}\{\pi_2\} v(\sigma)] d\sigma. \quad (8.115)$$

Пусть  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — решения уравнений (8.83) при  $u(t) = +1$ , т. е.

$$x_2(t) = \xi_2 + \int_0^t 1 d\tau; \quad (8.116)$$

$$x_1(t) = \xi_1 + \xi_2 t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau 1 d\sigma. \quad (8.117)$$

Из уравнений (8.115) и (8.117) получим

$$x_1(t) - x_1'(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau [1 + \text{sign}\{\pi_2\} v(\sigma)] d\sigma \geq 0. \quad (8.118)$$

Это означает, что траектория, производимая управлением (8.98), всегда расположена слева от кривой  $\gamma_+$  и поэтому она не попадает в начало координат. Таким образом, методом исключения приходим к выводу, что если  $(\xi_1, \xi_2) \in \gamma_+$ , то только управляющая последовательность  $\{+1\}$  (т. е. управление  $u(t) = +1$ ) переводит  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$ . Из уравнения (8.116) находим, что управление  $u(t) = +1$  требует  $|\xi_2|$  единиц топлива для перевода  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и, следовательно, по лемме 8.3 оно должно быть оптимально.

**Лемма 8.5.** Если  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$ , то существует множество оптимальных по расходу топлива управлений к началу координат. В частности, управляющая последовательность  $\{0, +1\}$ :

- а) оптимальна по топливу;
- б) имеет время перехода  $T(\xi_1, \xi_2)$

$$T(\xi_1, \xi_2) = -\left(\frac{1}{2} \xi_2 + \frac{\xi_1}{\xi_2}\right); \quad (8.119)$$

в) требует наименьшего времени перехода среди всех оптимальных по расходу топлива управлений.

**Доказательство.** Можно найти множество функций  $v(t) \in V_T^+$  (8.97), для которых управление  $u(t) = v(t)$  переводит  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$  в  $(0, 0)$ , поскольку можно найти много неотрицательных функций  $v(t)$ , удовлетворяющих соотношениям

$$\int_0^T v(\sigma) d\sigma = -\xi_2; \quad \int_0^T d\tau \int_0^\tau v(\sigma) d\sigma = -\xi_1 - \xi_2 T, \quad (8.120)$$

где  $T$  не задано. Время  $T$ , вообще говоря, различно для различных  $v(t)$ . Так как из  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$  следует, что  $\xi_2 < 0$ , то нетрудно видеть, что

$$\int_0^T v(\sigma) d\sigma = |\xi_2|,$$

и поэтому каждая функция  $v(t)$ , удовлетворяющая уравнениям (8.120), оптимальна по расходу топлива (согласно лемме 8.3).

Рассмотрим теперь управляющие последовательности (8.101). С помощью рис. 7.2 и 8.2 приходим к выводу, что только последовательности  $\{0, +1\}$  и  $\{-1, 0, +1\}$  могут перевести  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$  в  $(0, 0)$ . На рис. 8.4 показаны траектория  $ABO$ , полученная при помощи последовательности  $\{0, +1\}$ , и траектория  $ACDO$  для последовательности  $\{-1, 0, +1\}$ .

Рассмотрим сначала траекторию  $ABO$ . Так как  $u = 0$  на участке  $AB$ , то на этом интервале топливо не расходуется. Так как ордината точки  $B$  на кривой  $\gamma_+$  равна  $\xi_2$ , количество топлива, потребляемого на траектории  $BO$ , равно  $|\xi_2|$ , и по лемме 8.3 управляющая последовательность  $\{0, +1\}$  оптимальна по расходу топлива. Эта управляющая последовательность дает неотрицательное управление, удовлетворяющее уравнениям (8.120) и принадлежащее к  $V_+^T$ .

Управляющая последовательности  $\{-1, 0, +1\}$  и траектория  $ACDO$  не могут быть оптимальны. Такой вывод следует из рассмотрения рис. 8.4 или из вычисления требуемого количества топлива. Можно также

показать, что управляющая последовательность не является оптимальной по расходу топлива, используя необходимое условие, согласно которому гамильтониан равен нулю вдоль оптимальной траектории. Для этого предположим, что  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$  и управляющая последовательность  $\{-1, 0, +1\}$  оптимальна по расходу топлива. В этом случае, поскольку  $u(0) = -1$ , мы имели бы [см. уравнения (8.87), (8.92) и (8.93)]

$$p_2(0) = \pi_2 > 1; \quad p_1(0) = \pi_1. \quad (8.121)$$

Подставив последние два соотношения в уравнение (8.85), найдем, что при  $t = 0$  гамильтониан равен

$$H|_{t=0} = |-1| + \xi_2 \pi_1 - \pi_2. \quad (8.122)$$

Гамильтониан должен быть тождественно равен нулю, так как в этой задаче время перехода не задано, а система (8.83) инвариантна во времени. Но из соотношения  $1 - \pi_2 < 0$  следует, что  $\xi_2 \pi_1 > 0$  [так как  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$ , то  $\xi_2 < 0$ ]. Поэтому должно быть

$$\pi_1 < 0; \quad \pi_2 > 1. \quad (8.123)$$

Но если  $\pi_1 < 0$  и  $\pi_2 > 1$ , то

$$p_2(t) = \pi_2 - \pi_1 t > \pi_2 > 1 \text{ при любом } t > 0. \quad (8.124)$$

Если  $p_2(t) > 1$  при  $t > 0$ , то такое  $p_2(t)$  может дать лишь управляющую последовательность  $\{-1\}$  и не может давать последовательности  $\{-1, 0, +1\}$ . Итак, мы пришли к противоречию, на основании которого делаем вывод о том, что последовательность  $\{-1, 0, +1\}$  не может быть оптимальной.

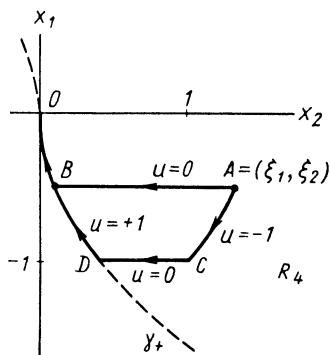


Рис. 8.4. Траектория  $ABO$  получается как результат управляющей последовательности  $\{0; +1\}$ , а траектория  $ACDO$  — последовательности  $\{-1; 0; +1\}$

В качестве упражнения предлагаем вывести уравнение (8.119) и показать, что время перехода (8.119) наименьшее. У к а з а н и е:  $T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{dx_1}{dx_1} dt = \int_{\xi_1}^0 \frac{dx_1}{x_2}$ . Нами показано, что любое управление  $u(t) = v(t) \in V_T^+$ , удовлетворяющее уравнениям (8.120), является оптимальным по расходу топлива и, следовательно, управление, соответствующее последовательности  $\{0, +1\}$ , также является оптимальным по расходу топлива.

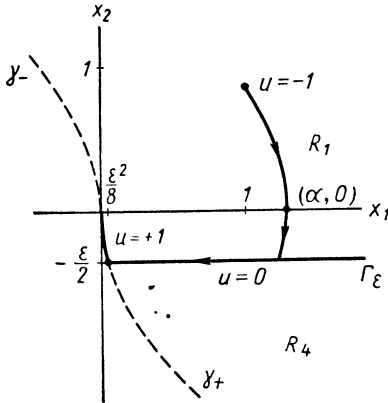


Рис. 8.5. Определение множества (геометрического места точек)  $\Gamma_\varepsilon$

**Лемма 8.6.** Если  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$ , то решения задачи об оптимальном по расходу топлива управлении не существует. Однако для любого наперед заданного  $\varepsilon > 0$  существует управляющая последовательность, а именно  $\{-1, 0, +1\}$ , которая переводит  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$  в  $(0, 0)$ , расходуя  $\hat{F}$  единиц топлива:

$$\hat{F} = F^* + \varepsilon = |\xi_2| + \varepsilon. \quad (8.125)$$

Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{F} = F^* = |\xi_2| \quad (8.126)$$

Таким образом, решение может быть сколь угодно близким к оптимальному, хотя оптимального решения и не существует. Такое решение будем называть  $\varepsilon$ -оптимальным.

**Доказательство.** Рассмотрим диаграмму на фазовой плоскости, показанную на рис. 8.5. На этом рисунке множество  $\Gamma_\varepsilon$  из  $R_4$  определено как прямая, параллельная оси  $x_1$  и расположенная от нее на расстоянии  $\varepsilon/2$ :

$$\Gamma_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = -\frac{\varepsilon}{2}, x_1 \geq \frac{\varepsilon^2}{8} \right\}. \quad (8.127)$$

Рассмотрим теперь состояние  $(\xi_1, \xi_2)$  из  $R_1$ . В зависимости от положения точки  $(\xi_1, \xi_2)$  ее можно перевести в начало координат либо при помощи управляющей последовательности  $\{-1, 0, +1\}$ , либо последовательности  $\{-1, +1\}$ . Если  $(\xi_1, \xi_2)$  переводится в начало координат последовательностью  $\{-1, 0, +1\}$ , то затраты топлива составляют  $|\xi_2| + \frac{\varepsilon}{2}$  на участке от  $(\xi_1, \xi_2)$  до линии  $\Gamma_\varepsilon$ , равны нулю при движении вдоль нее до точки пересечения с кривой  $\gamma_+$  [в точке  $(\frac{\varepsilon^2}{8}, -\frac{\varepsilon}{2})$ ] и равны  $\frac{\varepsilon}{2}$  при движении вдоль кривой  $\gamma_+$  к началу координат. Таким образом, общее количество израсходованного топлива  $\hat{F}$  равно  $|\xi_2| + \varepsilon$ . Если исходное состояние  $(\xi_1, \xi_2)$  таково, что траектория, получающаяся при  $u = -1$ , пересекает кривую  $\gamma_+$  между точками  $(\frac{\varepsilon^2}{8}, -\frac{\varepsilon}{2})$  и  $(0, 0)$ , то потребуется топлива меньше, чем  $|\xi_2| + \varepsilon$ .

Для доказательства отсутствия оптимального по расходу топлива решения при  $\varepsilon = 0$  заметим, что состояние  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$  переводится в  $(\alpha, 0)$  (см. рис. 8.5) управлением  $u = -1$  при помощи минимально возможного количества топлива, а именно  $|\xi_2|$ . Любое другое управление,

требуемое того же количества топлива, переведет  $(\xi_1, \xi_2)$  в некоторое состояние  $(\beta, 0)$ , причем  $\beta > \alpha$ , и поэтому оптимального по расходу топлива решения не существует.

Мы сделали определенные выводы относительно состояний из  $\gamma_+ \cup R_4 \cup R_1$ . Аналогичные рассуждения можно провести и для состояний из  $\gamma_- \cup R_2 \cup R_3$ . Полученные результаты можно сформулировать в виде следующего закона управления:

**Закон управления 8.2 (решение задачи 8.2).** Оптимальное по расходу топлива управление (или управления) как функция от состояния  $(x_1, x_2)$  для задачи 8.2 определяется соотношениями

$$u^* = u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in \gamma_+;$$

$$u^* = u^*(x_1, x_2) = -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in \gamma_-;$$

$$u^* = u^*(x_1, x_2) = 0 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in R_2 \cup R_4.$$

Если  $(x_1, x_2) \in R_1 \cup R_3$ , то оптимальных по расходу топлива управлений не существует.

Оптимальные по расходу топлива управления требуют наименьшего времени перехода. Заметим, что закон управления 8.2 представляет собой лишь иную формулировку лемм 8.4 и 8.5.

Мы видели, что в зависимости от исходного состояния оптимальное решение существует или не существует. Кроме того, существуют области, для которых оптимальное по расходу топлива управление неединственно. В следующем параграфе мы рассмотрим задачу об оптимальном по расходу топлива управлении в случае, когда время перехода или задано, или ограничено сверху.

**Упражнение 8.4.** Покажите, что если  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$ , то время перехода, которое необходимо при оптимальной управляющей последовательности  $\{0, +1\}$ , равно

$$T = -\frac{1}{2} \xi_2 - \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad (8.128)$$

а если  $(\xi_1, \xi_2) \in R_2$ , то время перехода, соответствующее оптимальной последовательности  $\{0, -1\}$ , равно

$$T = \frac{1}{2} \xi_2 - \frac{\xi_1}{\xi_2}. \quad (8.129)$$

**Упражнение 8.5.** Рассмотрите состояние  $(1, -1) \in R_4$ . Найдите три различных оптимальных по расходу топлива управления к началу координат и начертите траектории, соответствующие каждому из них.

**Упражнение 8.6.** Покажите, что минимальное количество топлива  $F^*(x_1, x_2) = |x_2|$ , требуемое для перевода  $(x_1, x_2) \in \gamma_+ \cup \gamma_- \cup R_2 \cup R_4$  в  $(0, 0)$ , есть решение уравнения Гамильтона—Якоби.

**Упражнение 8.7. Упрощенная задача о мягкой посадке.** Рассмотрите летательный аппарат постоянной массы  $M$ , находящийся на высоте  $x_1(t)$  над поверхностью планеты (лишенной атмосферы) и движущийся с вертикальной скоростью  $x_2(t)$ . Пусть  $g$  — (постоянное) ускорение планеты, а  $f(t)$  — тяга двигателя,  $-F_m \leq f(t) \leq F_m$  и  $F =$

$= \int_0^T |f(t)| dt$  — количество потребляемого топлива. Полагая, что  $F_m > Mg$ , найдите

оптимальную по расходу топлива тягу ( $T$  не задано) в функции от высоты и вертикальной скорости, обращаящую в нуль высоту и скорость. Уравнения системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ M\dot{x}_2(t) &= f(t) - Mg. \end{aligned} \right\} \quad (8.130)$$

Существуют ли начальные значения высоты и скорости, которые приводят к аварии? Сколько существует оптимальных по расходу топлива решений?



**Упражнение 8.8.** Рассмотрите систему (8.83) и функционал (8.84) с заданным  $T$ . Найдите оптимальное решение (если таковое существует) для областей цели

$$S_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2, |x_1| \leq 1\};$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 = -x_2, |x_1| \leq 1\};$$

$$S_3 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\};$$

$$S_4 = \{(x_1, x_2) : x_1 = +1, x_2 = 0 \text{ или } x_1 = -1, x_2 = 0\}.$$

**Упражнение 8.9.** Рассмотрите систему (8.83) и функционал (8.84) с заданным  $T$ . Пусть  $(1, 1)$  является желаемым конечным состоянием. Найдите оптимальный по расходу топлива закон управления и выразите минимальное количество топлива в функции от состояния. Обсудите существование и единственность решения.

### 8.6. ВРЕМЯ ПЕРЕХОДА ФИКСИРОВАНО ИЛИ ОГРАНИЧЕНО СВЕРХУ

Результаты, полученные в предыдущем параграфе, часто оказывались неудовлетворительными с практической точки зрения из-за большого времени перехода при оптимальном по расходу топлива управлении для состояний, расположенных вблизи от оси  $x_1$ , и из-за «почти бесконечного» времени перехода в случае  $\varepsilon$ -оптимальных управлений для состояний, принадлежащих к областям  $R_1$  и  $R_3$ . Поэтому рассмотрим задачу об оптимальном по расходу топлива управлении при следующих предположениях:

1. Время перехода фиксировано.
2. Время перехода ограничено сверху.

Порядок, которого будем придерживаться в настоящем параграфе, состоит в следующем. После формулировки задачи приводится лемма 8.7, которая устанавливает, что задача с фиксированным временем перехода имеет решение только в том случае, когда заданное время перехода не меньше соответствующего минимального времени. Строгого доказательства существования оптимального управления в данном параграфе не приводится. Решение действительно существует, однако доказательство связано с математическими понятиями (такими, как измеряемые функции), которые мы ранее не рассматривали (см., например, работу [43], которая дает представление об этом). Поэтому примем, что оптимальное решение существует. После ряда выкладок выразим оптимальное по расходу топлива управление в функции от исходного состояния и заданного времени перехода. Теперь сформулируем задачу.

**Задача 8.3.** Дана система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t); \quad |u(t)| \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (8.131)$$

Найти управление, переводящее систему (8.131) из любого исходного состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и минимизирующее количество топлива

$$F = \int_0^{T_f} |u(t)| dt, \quad (8.132)$$

где время перехода  $T_f$ :

- а) фиксировано (задано наперед);
- б) ограничено сверху временем  $\hat{T}_f$ :

$$T_f \leq \hat{T}_f. \quad (8.133)$$

На протяжении всего параграфа будем пользоваться терминологией и результатами § 8.5 и 7.2. В частности, будем рассматривать множества  $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$  [см. определение 8.1, уравнения (8.109)—(8.112) и рис. 8.3].

Так как в этой задаче задаются три числа  $\xi_1, \xi_2$  и  $T_f$  (или  $\hat{T}_f$ ), может оказаться, что при некоторой комбинации этих чисел задача не имеет решения. Чтобы избежать осложнений, докажем следующую лемму.

**Лемма 8.7.** Задача 8.3 имеет решение лишь в том случае, если заданное время  $T_f$  (или  $\hat{T}_f$ ) не меньше минимального времени  $t^*$ , соответствующего заданному состоянию  $(\xi_1, \xi_2)$ . Для того чтобы задача 8.3 имела решение, должны выполняться соотношения

$$T_f \text{ (или } \hat{T}_f) \geq \xi_2 + \sqrt{4\xi_1 + 2\xi_2^2} \text{ для } (\xi_1, \xi_2) \in R_1 \cup R_4; \quad (8.134)$$

$$T_f \text{ (или } \hat{T}_f) \geq -\xi_2 + \sqrt{-4\xi_1 + 2\xi_2^2} \text{ для } (\xi_1, \xi_2) \in R_2 \cup R_3; \quad (8.135)$$

$$T_f \text{ (или } \hat{T}_f) \geq |\xi_2| \text{ для } (\xi_1, \xi_2) \in \gamma_+ \cup \gamma_-. \quad (8.136)$$

Далее будем полагать, что эти соотношения выполняются.

Предположим, что нам задано исходное состояние  $(\xi_1, \xi_2)$  из  $R_1$  и требуется, чтобы время перехода было в точности равно заданному  $T_f$ . Мы видели (см. лемму 8.6), что для перевода  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$  в  $(0, 0)$  требуется топлива более, чем  $|\xi_2|$  единиц. Докажем теперь следующую лемму.

**Лемма 8.8.** Заданы  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$  и  $T_f$ . Оптимальной по расходу топлива является управляющая последовательность  $\{-1, 0, +1\}$ .

**Доказательство.** Для доказательства можно воспользоваться принципом минимума, и поэтому будут справедливы уравнения (8.85)—(8.101). Предположим, что уравнения (8.95) справедливы и оптимально управление (8.98). Но это управление не может перевести  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и, следовательно, справедлива лемма 8.2. Если рассмотреть девять управляющих последовательностей (8.101), то можно установить (воспользовавшись рис. 7.2 и 8.2), что только управляющая последовательность  $\{-1, 0, +1\}$  позволяет перевести  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$ , и следовательно, она должна быть оптимальной по расходу топлива. Причина заключена в том, что эта последовательность — единственная экстремальная управляющая последовательность, а существование оптимального управления мы предполагаем.

Раньше было показано, что управляющая последовательность  $\{-1, 0, +1\}$  оптимальна по расходу топлива для  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$  при заданном  $T_f$ . Это означает, что оптимальное по расходу топлива управление равно

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= -1 \text{ для } 0 \leq t < t_1; \\ u(t) &= 0 \text{ для } t_1 \leq t < t_2; \\ u(t) &= +1 \text{ для } t_2 \leq t \leq T_f. \end{aligned} \right\} \quad (8.137)$$

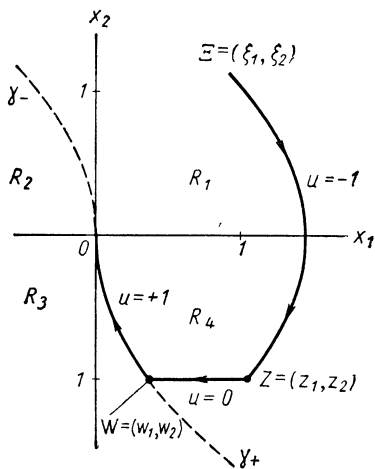
Очевидно, если мы сможем выразить моменты переключения  $t_1$  и  $t_2$  через заданные величины  $\xi_1, \xi_2$  и  $T_f$ , то найдем оптимальное по расходу топлива управление. Пусть  $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$  — исходное состояние. Определим точки  $Z = (z_1, z_2)$  и  $W = (w_1, w_2)$  следующим образом. Обозначим через  $[x_1(t), x_2(t)]$  фазовые координаты, получающиеся в результате управления (8.137) и соответствующие начальному состоянию  $(\xi_1, \xi_2)$

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= (\xi_1, \xi_2) = (x_1(0), x_2(0)); \\ Z &= (z_1, z_2) = (x_1(t_1), x_2(t_1)); \\ W &= (w_1, w_2) = (x_1(t_2), x_2(t_2)); \\ 0 &= (0, 0) = (x_1(T_f), x_2(T_f)). \end{aligned} \right\} \quad (8.138)$$

Непосредственно видно, что управление (8.137) переводит  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$ , если

$$\left. \begin{aligned} Z &= (z_1, z_2) \in R_4; \\ W &= (w_1, w_2) \in \gamma_+. \end{aligned} \right\} \quad (8.139)$$

Такая траектория показана на рис. 8.6. Если она оптимальна по расходу топлива, то она должна удовлетворять всем необходимым условиям принципа минимума. Решение уравнений (8.131) при  $u(t) = \Delta = \pm 1$  и  $u(t) = 0$  известно [см. уравнения (7.14)–(7.18) и (8.102)]. Таким образом, пользуясь обозначениями (8.138), имеем



$$\left. \begin{aligned} z_2 &= \xi_2 - t_1; \\ z_1 &= \xi_1 + \xi_2 t_1 - \frac{1}{2} t_1^2; \end{aligned} \right\} \quad (8.140)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= z_2; \\ w_1 &= z_1 + z_2(t_2 - t_1); \end{aligned} \right\} \quad (8.141)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= w_2 + (T_f - t_2); \\ 0 &= w_1 + w_2(T_f - t_2) + \frac{1}{2} (T_f - t_2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.142)$$

Рис. 8.6. Траектория  $\Xi Z W O$  — результат приложения управляющей последовательности  $\{-1; 0; +1\}$

Эти шесть независимых уравнений содержат шесть неизвестных  $t_1, t_2, z_1, z_2, w_1$  и  $w_2$  при трех известных величинах  $\xi_1, \xi_2$  и  $T_f$ . Чтобы определить управление (8.137), нужно найти  $t_1$  и  $t_2$ . Из уравнений (8.142) и (8.141) получим

$$w_1 = \frac{1}{2} w_2^2 = \frac{1}{2} z_2^2; \quad (8.143)$$

$$t_2 = w_2 + T_f = z_2 + T_f. \quad (8.144)$$

Из уравнений (8.140), в свою очередь, найдем соотношения

$$t_1 = \xi_2 - z_2. \quad (8.145)$$

$$z_1 = \xi_1 + \frac{1}{2} \xi_2^2 - \frac{1}{2} z_2^2, \quad (8.146)$$

а из уравнений (8.144) и (8.145)

$$t_2 - t_1 = 2z_2 + T_f - \xi_2. \quad (8.147)$$

Подставляя соотношения (8.147), (8.143) и (8.146) в уравнение (8.141), получим

$$z_2^2 + (T_f - \xi_2) z_2 + \xi_1 + \frac{1}{2} \xi_2^2 = 0, \quad (8.148)$$

откуда следует

$$z_2 = -\frac{T_f - \xi_2}{2} \pm \frac{1}{2} [(T_f - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (8.149)$$

Нужно уточнить два вопроса: во-первых,  $z_2$  должно быть действительным числом и, во-вторых, надо выбрать правильный знак в выражении (8.149). Действительность  $z_2$  непосредственно следует из леммы 8.7, потому что из уравнения (8.134) следует  $(T_f - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2 \geq 0$ .

Иначе говоря, если мы ошибочно потребуем, чтобы время  $T_f$  было меньше минимального, то  $z_2$  не будет действительным числом. Чтобы выбрать правильный знак в выражении (8.149), поступим следующим образом. Времена  $t_1$ ,  $t_2$  и  $T_f$  должны удовлетворять неравенствам

$$0 < t_1 < t_2 < T_f, \quad (6.150)$$

откуда следует, что  $t_2 - t_1 > 0$ , и поэтому [по уравнению (8.147)]

$$z_2 > -\frac{1}{2}(T_f - \xi_2). \quad (8.151)$$

На основании уравнений (8.151) и (8.149) приходим к выводу, что в выражении (8.149) надо выбрать знак  $+$ , и, следовательно,

$$z_2 = -\frac{1}{2} \left\{ T_f - \xi_2 - [(T_f - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (8.152)$$

Подставив это соотношение в уравнения (8.145) и (8.144), найдем

$$t_1 = \frac{1}{2} \left\{ T_f + \xi_2 - [(T_f - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2]^{\frac{1}{2}} \right\}; \quad (8.153)$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \left\{ T_f + \xi_2 + [(T_f - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2]^{\frac{1}{2}} \right\}; \quad (8.154)$$

это — искомые уравнения для моментов переключения. Итак, мы доказали следующую лемму.

**Лемма 8.9.** Если заданы  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$  и  $T_f$ , то управление (8.137) является единственным оптимальным по расходу топлива управлением, причем моменты переключения  $t_1$  и  $t_2$  определяются уравнениями (8.153) и (8.154).

Нетрудно подсчитать количество топлива  $\hat{F}(\xi_1, \xi_2, T_f)$ , требующееся для перевода  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$  в  $(0, 0)$  при заданном времени перехода  $T_f$ . Мы предлагаем читателю проверить, что

$$\hat{F}(\xi_1, \xi_2, T_f) = T_f - [(T_f - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (8.155)$$

Воспользуемся уравнением (8.155) для доказательства следующей леммы.

**Лемма 8.10.** Если  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$  и требуется найти оптимальное по расходу топлива управление, переводящее  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  при условии, что время перехода  $T_f$  ограничено сверху  $T_f \leq \hat{T}_f$ , то оптимальное по расходу топлива управление потребует времени  $T_f = \hat{T}_f$ .

**Доказательство.** Легко показать, что

$$\frac{\partial \hat{F}(\xi_1, \xi_2, T_f)}{\partial T_f} < 0; \quad (8.156)$$

это означает, что количество расходуемого топлива возрастает с уменьшением  $T_f$ . Оптимальное по расходу топлива управление «найдет» наибольшее возможное время  $T_f$ ,  $T_f = \hat{T}_f$ .

Мы решили задачу 8.3 для исходных состояний из  $R_1$ . Аналогичные рассуждения можно провести и для исходных состояний из  $R_3$ . Обратимся теперь к исходным состояниям из  $R_4$ .

Пусть  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$ . Напомним (см. лемму 8.5), что если  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$ , то управляющая последовательность  $\{0, +1\}$  переведет  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$

при затратах топлива  $F^* = |\xi_2|$  единиц и при времени перехода [см. уравнение (8.128)]

$$T = -\frac{1}{2} \xi_2 - \frac{\xi_1}{\xi_2}. \quad (8.157)$$

Время перехода  $T$  является наименьшим из возможных при затрате топлива  $F^* = |\xi_2|$  единиц. Если  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$  и время перехода  $T_f < T$ , то потребуется более  $F^* = |\xi_2|$  единиц топлива. При  $T_f > T$  управление, переводящее состояние в начало координат с минимальной затратой топлива  $F^* = |\xi_2|$  единиц, неединственно (см. лемму 8.5). Эти рассуждения можно сформулировать в виде следующей леммы.

**Лемма 8.11.** Пусть  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$ . Если  $T_f$  задано, причем

$$T_f < T = -\frac{1}{2} \xi_2 - \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad (8.158)$$

то оптимальное по расходу топлива управление определяется соотношениями (8.137), (8.153) и (8.154). Если  $T_f$  ограничено величиной  $\hat{T}_f$ , причем

$$T_f \leq \hat{T}_f < T, \quad (8.159)$$

то оптимальное по расходу топлива управление требует времени

$$T_f = \hat{T}_f. \quad (8.160)$$

Минимальное количество топлива в каждом из случаев определяется соотношением (8.155).

Доказательство аналогично доказательствам лемм 8.9 и 8.10 и поэтому не приводится.

**Лемма 8.12.** Если  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$  и  $T_f > T$ , то существует множество оптимальных по расходу топлива управлений, требующих  $F^* = |\xi_2|$  единиц топлива.

**Доказательство** этой леммы следует из леммы 8.5.

В заключение сформулируем результаты лемм 8.7—8.13 в виде следующего закона управления. Заметим, что эти леммы дают решение задачи для начальных состояний  $(\xi_1, \xi_2)$  из  $R_1 \cup R_4$ ; результаты для исходных состояний из  $R_2 \cup R_3$  можно получить из соображений симметрии.

**Закон управления 8.3 (решение задачи 8.3).**

1) Пусть  $(\xi_1, \xi_2)$  — любое исходное состояние и  $T_f$  — фиксированное время перехода. Если оптимальное управление  $u^*(t)$  существует, то оно определяется следующими уравнениями:

Для всех  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$  и любого  $T_f$   
или для всех  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4$  и  $T_f \leq -\frac{1}{2} \xi_2 - \frac{\xi_1}{\xi_2}$

$$\left. \begin{aligned} u^*(t) &= -1 \quad \text{для } 0 \leq t < t_1 \\ u^*(t) &= 0 \quad \text{для } t_1 \leq t < t_2 \\ u^*(t) &= +1 \quad \text{для } t_2 \leq t \leq T_f \end{aligned} \right\} \text{единственно,}$$

где

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{2} \left\{ T_f + \xi_2 - [(T_f - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2]^{\frac{1}{2}} \right\}; \\ t_2 &= \frac{1}{2} \left\{ T_f + \xi_2 + [(T_f - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2]^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (8.161a)$$

Для всех  $(\xi_1, \xi_2) \in R_3$  и любого  $T_f$  или для всех  $(\xi_1, \xi_2) \in R_2$  и  $T_f \leq \frac{1}{2} \xi_2 - \frac{\xi_1}{\xi_2}$

$$\left. \begin{aligned} u^*(t) &= +1 \text{ для } 0 \leq t < t_1 \\ u^*(t) &= 0 \text{ для } t_1 \leq t < t_2 \\ u^*(t) &= -1 \text{ для } t_2 \leq t \leq T_f \end{aligned} \right\} \text{единственно,}$$

где

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{2} \left\{ T_f - \xi_2 - \left[ (T_f - \xi_2)^2 + 4\xi_1 - 2\xi_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}; \\ t_2 &= \frac{1}{2} \left\{ T_f - \xi_2 + \left[ (T_f - \xi_2)^2 + 4\xi_1 - 2\xi_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (8.161б)$$

Для всех

$$\left. \begin{aligned} (\xi_1, \xi_2) &\in R_4 \text{ и любого } T_f > -\frac{1}{2} \xi_2 - \frac{\xi_1}{\xi_2}, \\ \text{или для всех} \\ (\xi_1, \xi_2) &\in R_2 \text{ и любого } T_f > \frac{1}{2} \xi_2 - \frac{\xi_1}{\xi_2}, \\ \text{оптимальное по расходу топлива управление} \\ &\text{неединственно.} \end{aligned} \right\} \quad (8.161в)$$

Для всех  $(\xi_1, \xi_2) \in \gamma_+ \cup \gamma_-$  — оптимальное по расходу топлива управление единственно и равно

$$\left. \begin{aligned} u^*(t) &= -\text{sign} \{ \xi_2 \} \text{ для } 0 \leq t < |\xi_2|; \\ u^*(t) &= 0 \text{ для } |\xi_2| \leq t \leq T_f. \end{aligned} \right\} \quad (8.161г)$$

2)  $T_f$  ограничено сверху величиной  $\hat{T}_f$ . Выводы аналогичны пункту 1, с той лишь разницей, что в уравнениях (8.161а) — (8.161г) следует заменить  $T_f$  на  $\hat{T}_f$ .

**Упражнение 8.10.** Докажите закон управления 8.3.

**Упражнение 8.11.** Рассмотрите исходное состояние  $(2, -1) \in R_4$ . Начертите оптимальные по расходу топлива траектории к началу координат для  $T_f = 2,2; 2,3; 2,4$  и  $2,5$ .

Мы знаем теперь способы отыскания оптимальной траектории в случае, когда время перехода  $T_f$  задано. Предположим еще раз, что условия леммы 8.9 или 8.11 удовлетворяются, и поэтому оптимальной по расходу топлива является управляющая последовательность  $\{-1, 0, +1\}$ . Моменты переключения определяются уравнениями (8.153) и (8.154). Мы показали, что в момент переключения  $t_2$  состояние  $W = (w_1, w_2)$  принадлежит кривой  $\gamma_+$ . Напомним [см. уравнения (8.138)], что в момент переключения  $t_1$  состояние равно  $Z = (z_1, z_2)$ . Значение  $z_2$  определяется уравнением (8.152), а  $z_1$  — уравнением (8.146). Очевидно, что состояние  $(z_1, z_2)$  является функцией от  $(\xi_1, \xi_2)$  и  $T_f$ . Возникает вопрос: не принадлежит ли состояние  $(z_1, z_2)$  некоторой кривой (переключения)? На этот вопрос можно ответить следующим образом: так как  $(z_1, z_2)$  зависит от трех параметров  $\xi_1, \xi_2$  и  $T_f$ , то если зафиксировать любые два из них и варьировать третий, то из уравнений (8.152) и (8.146) получим геометрическое место состояний  $(z_1, z_2)$ , представляющее собой кривую на фазовой плоскости. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 8.3. Предположим, что исходным является состояние  $(\xi_1, 0)$ ,  $\xi_1 > 0$ , т. е. точка на положительной полуоси  $x_1$ . Минимальное время  $t^*$   $(\xi_1, 0)$ , соответствующее этому состоянию [см. уравнение (8.134)], определяется соотношением

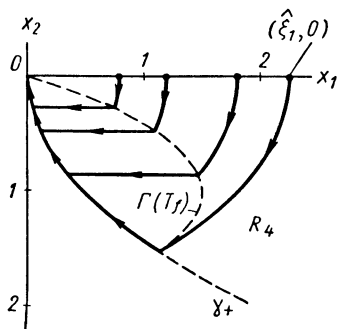
$$t^* = 2\sqrt{\xi_1}.$$

Предположим, нам задано значение  $T_f$ . Существует такое состояние  $(\hat{\xi}_1, 0)$ , что

$$\hat{\xi}_1 = \frac{T_f^2}{4}, \quad (8.162)$$

т. е. заданное время  $T_f$  является минимальным временем, необходимым для перевода  $(\hat{\xi}_1, 0)$  в  $(0, 0)$ . Рассмотрим множество состояний  $(\xi_1, 0)$ , т. е.

$$0 \leq \xi_1 \leq \hat{\xi}_1, \quad (8.163)$$



и найдем оптимальное по расходу топлива управление к началу координат, требующее одного и того же времени  $T_f$  для каждого из состояний  $(\xi_1, 0)$ . Подставим  $\xi_2 = 0$  в уравнение (8.152) и найдем, что

$$z_2 = -\frac{1}{2}T_f + \frac{1}{2}(T_f^2 - 4\xi_1)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.164)^1$$

Подставив  $\xi_2 = 0$  в уравнение (8.146), найдем

$$z_1 = \xi_1 - \frac{1}{2}z_2^2. \quad (8.165)$$

Рис. 8.7. Иллюстрация линии переключения  $\Gamma(T_f)$ . При построениях было принято  $T_f = 3$

Исключив  $\xi_1$  из уравнений (8.164) и (8.165), после алгебраических преобразований получим

$$z_1 = -1,5z_2^2 - z_2T_f. \quad (8.166)$$

Известно [см. соотношения (8.139)], что  $(z_1, z_2) \in R_4$ , т. е.

$$z_2 < 0; \quad z_1 > \frac{1}{2}z_2^2. \quad (8.167)$$

Итак, уравнения (8.166) и (8.167) определяют кривую на фазовой плоскости, которую мы будем называть линией «переключения»:

$$\Gamma(T_f) = \left\{ (z_1, z_2) : z_1 = -1,5z_2^2 - z_2T_f; \quad z_2 < 0; \quad z_1 > \frac{1}{2}z_2^2 \right\}. \quad (8.168)$$

На рис. 8.7 показана такая кривая для  $T_f = 3$ , где также изображены некоторые оптимальные по расходу топлива траектории, начинающиеся из оси  $x_1$ . Все траектории требуют одинакового времени перехода  $T_f$ . Управление  $u(t) = -1$  прикладывается до тех пор, пока траектория не достигнет кривой  $\Gamma(T_f)$ . В момент  $(t_1)$  управление переключается на  $u(t) = 0$  и остается таким до тех пор, пока траектория не пересечет кривой  $\gamma_+$ ; в момент  $(t_2)$  управление переключается на  $u(t) = +1$  и остается неизменным до попадания траектории в начало координат. Оптимальная по расходу топлива траектория, начинающаяся из точки  $(\hat{\xi}_1, 0)$ , оптимальна также и по быстродействию (почему?).

**Упражнение 8.12.** Рассчитайте и постройте график потребляемого топлива в зависимости от  $\xi_1$  для примера 8.3. Примите  $T_f = 3$ .

**Упражнение 8.13.** Пусть начальным является состояние  $(0, \xi_2)$ ,  $\xi_2 > 0$ . Найдите геометрическое место точек  $(z_1, z_2)$  и начертите кривую  $\Gamma(T_f)$  для  $T_f = 3$ .

**Упражнение 8.14.** Повторите упражнение 8.13 для исходного состояния  $(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\xi_1 = \xi_2$ ,  $\xi_2 > 0$ .

Мы завершаем настоящий параграф проверкой уравнения Гамильтона—Якоби<sup>2</sup> для данной задачи. Такая проверка полезна потому, что до сих пор мы занимались оптимальным управлением инвариантными во времени системами при неограниченном времени перехода. Система, рассматриваемая в данном параграфе, также инвариантна во времени, но время перехода теперь фиксировано.

<sup>1</sup> Уравнения (8.162) и (8.163) гарантируют, что  $z_2$  является действительным числом.

<sup>2</sup> См. § 5.20.

Предположим сначала, что нам задано исходное состояние  $(\xi_1, \xi_2)$  из  $R_1$  и время перехода  $T_f$  фиксировано. Оптимальным является управление

$$\left. \begin{aligned} u^*(t) &= -1 \text{ для } 0 \leq t < t_1; \\ u^*(t) &= 0 \text{ для } t_1 \leq t < t_2; \\ u^*(t) &= +1 \text{ для } t_2 \leq t \leq T_f, \end{aligned} \right\} \quad (8.169)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  определяются уравнениями (8.153) и (8.154) соответственно.

Пусть  $(x_1, x_2)$  — состояние на оптимальной траектории от  $(\xi_1, \xi_2)$  до  $(0, 0)$ . Обозначим через  $t$  соответствующее время

$$0 < t < t_1, \quad (8.170)$$

а через  $\hat{F}(x_1, x_2, t)$  — количество топлива, требующегося для перехода из  $(x_1, x_2)$  в  $(0, 0)$ . Очевидно,  $\hat{F}(x_1, x_2, t)$  должно быть решением уравнения Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial \hat{F}(x_1, x_2, t)}{\partial t} + |u^*| + x_2 \frac{\partial \hat{F}(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + u^* \frac{\partial \hat{F}(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} = 0. \quad (8.171)$$

Если  $t < t_1$ , то согласно уравнению (8.169)

$$u^* = -1. \quad (8.172)$$

Так как  $(x_1, x_2)$  — состояние на оптимальной траектории, начинающейся из  $(\xi_1, \xi_2)$ , и  $t < t_1$ , то

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(t) = \xi_1 + \xi_2 t - \frac{1}{2} t^2; \\ x_2 &= x_2(t) = \xi_2 - t. \end{aligned} \right\} \quad (8.173)$$

Количество топлива  $\hat{F}(x_1, x_2, t)$  определяется соотношением

$$\hat{F}(x_1, x_2, t) = \int_t^{t_1} |-1| d\tau + \int_{t_1}^{t_2} |0| d\tau + \int_{t_2}^{T_f} |1| d\tau = t_1 - t + T_f - t_2. \quad (8.174)$$

Нам известна зависимость  $t_1$  и  $t_2$  от  $\xi_1, \xi_2$  и  $T_f$ . Но из уравнений (8.173) мы также имеем

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= x_2 + t; \\ \xi_1 &= x_1 - (x_2 + t)t + \frac{1}{2} t^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.175)$$

Подставив уравнения (8.175) в (8.153) и (8.154), выразим  $t_1$  и  $t_2$  в функции от  $x_1, x_2, t$  и  $T_f$  и, подставив полученные выражения в соотношение (8.174), найдем

$$\hat{F}(x_1, x_2, t) = T_f - t - (T_f^2 + t^2 + 2tx_2 - 2T_f x_2 - 2T_f t - 4x_1 - x_2^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.176)$$

Для упрощения выражений примем

$$Y = T_f^2 + t^2 + 2tx_2 - 2T_f x_2 - 2T_f t - 4x_1 - x_2^2. \quad (8.177)$$

Найдем теперь частные производные

$$\frac{\partial \hat{F}(x_1, x_2, t)}{\partial t} = -1 - \frac{t + x_2 - T_f}{\sqrt{Y}}; \quad (8.178)$$

$$\frac{\partial \hat{F}(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} = \frac{2}{\sqrt{Y}}; \quad (8.179)$$

$$\frac{\partial \hat{F}(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} = \frac{x_2 - t + T_f}{\sqrt{Y}}. \quad (8.180)$$



Подстановка выражений (8.172), (8.178), (8.179) и (8.180) в уравнение Гамильтона—Якоби обращает его в тождество.

**Упражнение 8.15.** Заданы  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$  и  $T_f$ . Пусть  $(x_1, x_2)$  — состояние на оптимальной по расходу топлива траектории в момент времени  $t$ ,  $t_1 < t < t_2$ . Найдите  $\hat{F}(x_1, x_2, t)$  и покажите, что оно является решением уравнения Гамильтона—Якоби.

**Упражнение 8.16.** Повторите предыдущее упражнение для  $t_2 < t < T_f$ .

Сделаем в заключение некоторые замечания относительно закона управления 8.3. Мы хотим подчеркнуть, что оптимальное по расходу топлива управление является функцией исходного состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  и времени перехода  $T_f$ . Методом, аналогичным использованному при выводе формулы (8.176), можно выразить управление как функцию состояния и оставшегося времени  $T_f - t$ . Иными словами, практическая реализация закона управления 8.3 должна содержать «часы», «показывающие» оставшееся время  $T_f - t$ . В этом смысле система с обратной связью оказывается зависящей от времени, хотя управляемая система и функционал стоимости инвариантны во времени. Во многих случаях это может быть крупным недостатком. Поэтому продолжим изучение объекта с двойным интегрированием в надежде найти инвариантную во времени систему с обратной связью.

### 8.7. ВРЕМЯ ПЕРЕХОДА ОГРАНИЧЕНО ПРОИЗВЕДЕНИЕМ МИНИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ НА ПОСТОЯННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ

Чтобы мотивировать задачу, рассматриваемую в настоящем параграфе, еще раз обсудим с практической точки зрения недостатки результатов, полученных в § 8.5 и 8.6.

Решение задачи 8.2 в § 8.5 неудовлетворительно по двум причинам. С математической точки зрения решений для исходных состояний из  $R_1$  или  $R_3$  не существует. С практической точки зрения более неприятными оказываются большие времена перехода из исходных состояний, расположенных вблизи от оси  $x_1$ .

Приходится смириться с тем, что уменьшение времени перехода требует увеличения расхода топлива. Поэтому в § 8.6 мы сформулировали задачу 8.3, потребовав, чтобы время перехода было либо фиксировано, либо ограничено сверху. В этом случае управление оказалось функцией исходного состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  и времени перехода  $T_f$ , т. е. функцией трех величин  $\xi_1, \xi_2$  и  $T_f$ . Если зафиксировать две из них, то получится некоторого рода кривая переключения, как в примере 8.3 и в упражнениях 8.13 и 8.14.

Возникает вопрос: какой путь задания времени перехода  $T_f$  является наиболее естественным в случае, когда задано исходное состояние  $(\xi_1, \xi_2)$ ? Предположим, в частности, что нам задано исходное состояние  $(\xi_1, \xi_2)$  и время перехода  $T_f$ . Пусть теперь нам задано другое исходное состояние  $(\xi'_1, \xi'_2)$ , близкое к  $(\xi_1, \xi_2)$ . Каким образом выбрать  $T'_f$  для состояния  $(\xi'_1, \xi'_2)$ , чтобы оптимальные по топливу траектории были в некотором смысле «близки» друг к другу? Все эти вопросы возникают из физических, а не из математических соображений. Их можно подытожить в виде вопроса: каким образом указать естественное время перехода  $T_f$  для каждого из состояний?

Существует фундаментальная величина времени, связанная с каждым из состояний на фазовой плоскости. Это — минимальное время перехода  $t^*$ , требующееся для перевода состояния в начало координат. Минимальное время учитывает:

- 1) ограниченность  $u(t)$ ;
- 2) положение состояния относительно начала координат.

Желательно, чтобы время перехода  $T_f$  учитывало минимальное время  $t^*$ . Посмотрим, как это можно сделать. Предположим, что задано исходное состояние  $(\xi_1, \xi_2)$  и мы нашли минимальное время  $t^*$   $(\xi_1, \xi_2)$ . Можно потребовать, чтобы время перехода удовлетворяло соотношению

$$T_f = \beta t^*(\xi_1, \xi_2) \quad (8.181)$$

или

$$T_f \leq \hat{T}_f = \beta t^*(\xi_1, \xi_2), \quad (8.182)$$

где  $\beta$  — некоторая положительная постоянная,

$$\beta > 1. \quad (8.183)$$

Для каждого состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  время  $T_f$ , определяемое соотношением (8.181), является фиксированным числом. Если задать  $\beta$  и использовать это значение для каждого начального состояния  $(\xi_1, \xi_2)$ , то уравнение (8.181) будет естественным способом задания времени перехода.

На конкретном примере разберем, что получается, если задавать время перехода при помощи уравнения (8.181).

**Пример 8.4.** Рассмотрим систему (8.131), полагая, что исходным является состояние  $(\xi_1, 0) \in R_1$ ,  $\xi_1 \gg 0$ , т. е. точка положительной полуоси  $x_1$ . Это предположение аналогично сделанному в примере 8.3. Минимальное время  $t^*$   $(\xi_1, 0)$  равно

$$t^* = 2\sqrt{\xi_1}. \quad (8.184)$$

Потребуем, чтобы время перехода было равно

$$T_f = \beta t^* = 2\beta\sqrt{\xi_1}; \quad \beta > 1. \quad (8.185)$$

Читатель заметил, что в примере 8.3 мы требовали одинакового времени перехода для всех  $(\xi_1, 0)$ , тогда как в данном примере время перехода является функцией исходного состояния. Если подставить  $T_f = 2\beta\sqrt{\xi_1}$  и  $\xi_2 = 0$  в уравнение (8.152), то после алгебраических преобразований получим соотношение

$$z_2 = \sqrt{\xi_1}(\sqrt{\beta^2 - 1} - \beta). \quad (8.186)$$

Читателю следует сравнить это уравнение с (8.164). Так как  $\xi_2 = 0$ ,  $z_1$  выражается соотношением (8.165)

$$z_1 = \xi_1 - \frac{1}{2} z_2^2. \quad (8.187)$$

Исключим  $\xi_1$  из уравнений (8.186) и (8.187) и получим

$$z_1 = h_\beta z_2^2, \quad (8.188)$$

где  $h_\beta$  — постоянная, определяемая соотношением

$$h_\beta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{(\sqrt{\beta^2 - 1} - \beta)^2}. \quad (8.189)$$

Так как  $\beta \gg 1$ , получим

$$h_\beta > \frac{1}{2}. \quad (8.190)$$

Поскольку  $(z_1, z_2) \in R_4$ , можно определить линию переключения  $\Gamma_\beta$  как

$$\Gamma_\beta = \left\{ (z_1, z_2) : z_1 = h_\beta z_2^2; z_2 < 0; z_1 > \frac{1}{2} z_2^2 \right\}, \quad (8.191)$$

где  $h_\beta$  определяется уравнением (8.189).

На рис. 8.8 показана кривая  $\Gamma_\beta$  для  $h_\beta = 1,5$   $\left( \beta = 3 \frac{\sqrt{2}}{4} = 1,06 \right)$ , где изображены также некоторые из оптимальных по расходу топлива траекторий, начинающихся из оси  $x_1$ .

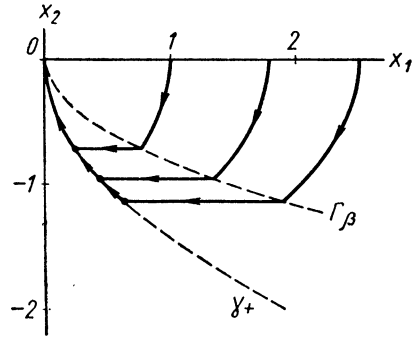


Рис. 8.8. Линия переключения  $\Gamma_\beta$ . На этом рисунке  $\beta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ , и поэтому  $h_\beta = 1,5$

Управление  $u = -1$  прикладывается до тех пор, пока траектория не достигнет кривой  $\Gamma_\beta$ . В этот момент управление переключается с  $u = -1$  на  $u = 0$ . Следующее переключение управления с  $u = 0$  на  $u = +1$  происходит на кривой  $\gamma_+$ . Из сравнения рис. 8.8 и 8.7 видно отличие в работе системы.

**Упражнение 8.17.** Вычислите количество топлива, необходимое для перевода  $(\xi_1, 0)$  в  $(0, 0)$  по методике, рассмотренной в примере 8.4. Начертите график зависимости количества топлива от  $\xi_1$  при  $\beta = 1,5$ . При  $\xi_1 = 1$  начертите график зависимости количества топлива от  $\beta$ . Повторите это для  $\xi_1 = 2$ .

**Упражнение 8.18.** Пусть исходным является состояние  $(0, \xi_2)$ . Задайте время перехода при помощи соотношения (8.181) и найдите геометрическое место точек  $(z_1, z_2)$ . Начертите линию переключения для  $\beta = 1, 2$ . Сравните ее с результатами упражнения 8.13.

**Упражнение 8.19.** Повторите упражнение (8.18) для исходных состояний  $(\xi_1, \xi_2)$ :  $\xi_1 = \xi_2$ ;  $\xi_2 > 0$ . Сравните с упражнением 8.14.

Фиксация времени  $T_f$  при помощи соотношения  $T_f = \beta t^*(\xi_1, \xi_2)$  превращает оптимальное по расходу топлива управление в функцию только  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Если задать соотношение, связывающее  $\xi_1$  с  $\xi_2$  (как в примере 8.4 или упражнениях 8.18 и 8.19), то получится некоторая линия переключения. Заметим, однако, что эта линия переключения является функцией «связи» между  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

С практической точки зрения желательно иметь систему, измеряющую текущие значения фазовых координат и вырабатывающую оптимальное управление на основе только этой информации. Иначе говоря, система должна работать, «не запоминая» никакой «зависимости» между исходными значениями фазовых координат. Этим свойством обладали все рассмотренные нами системы, оптимальные по быстродействию. Решение задачи 8.4, сформулированной ниже, также будет обладать этим свойством.

**Задача 8.4.** Дана система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \quad |u(t)| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.192)$$

и функционал

$$F(u) = F = \int_0^T |u(t)| dt. \quad (8.193)$$

Пусть  $(\xi_1, \xi_2)$  — произвольное исходное состояние. Если задать время перехода  $T_f$ , то можно найти оптимальные по расходу топлива управление и траекторию к началу координат. Обозначим через  $(x_1(t), x_2(t))$  состояние на этой оптимальной траектории в момент времени  $t$ ,  $t \in [0, T_f]$ . Пусть  $t^*(x_1, x_2)$  — минимальное время, соответствующее состоянию  $(x_1(t), x_2(t))$ . Мы хотим найти оптимальное по расходу топлива управление, при котором

$$T_f - t \leq \beta t^*(x_1, x_2), \quad \beta > 1 \quad (8.194)$$

для любых  $(\xi_1, \xi_2)$  и  $t \in [0, T_f]$ .

Разберем физический смысл неравенства (8.194). Это соотношение гарантирует, что с помощью оптимального управления каждое состояние  $(x_1, x_2)$  на оптимальной по расходу топлива траектории может быть переведено в начало координат за некоторое время  $T_f - t$ , ограниченное сверху произведением минимального времени  $t^*(x_1, x_2)$ , соответствующего этому состоянию, на постоянный коэффициент. По сути дела, уравнение (8.194) является ограничением, зависящим от времени. Смысл этого утверждения станет яснее по мере решения задачи 8.4.

Предположим, что  $(x_1, x_2)$  — состояние из  $R_4$  [см. уравнение (8.112) и рис. 8.3]. Известно, что минимальное время  $t^*(x_1, x_2)$ , соответствующее этому состоянию, равно

$$t^*(x_1, x_2) = x_2 + \sqrt{4x_1 + 2x_2^2}. \quad (8.195)$$

Известно также (см. лемму 8.5), что состояние  $(x_1, x_2) \in R_4$  может быть переведено в  $(0, 0)$  оптимальной по расходу топлива управляющей последовательностью  $\{0, +1\}$ , требующей  $|x_2|$  единиц топлива и времени перехода

$$T(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{x_1}{x_2}. \quad (8.196)$$

С другой стороны, если  $(x_1, x_2) \in R_2$ , то минимальное время, соответствующее  $(x_1, x_2) \in R_2$  определяется соотношением

$$t^*(x_1, x_2) = -x_2 + \sqrt{-4x_1 + 2x_2^2}. \quad (8.197)$$

Известно (см. лемму 8.12), что состояние  $(x_1, x_2) \in R_2$  может быть переведено в  $(0, 0)$  оптимальной по расходу топлива управляющей последовательностью  $\{0, -1\}$ , которая требует  $|x_2|$  единицу топлива и времени, равного

$$T(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2 - \frac{x_1}{x_2}. \quad (8.198)$$

**Определение 8.2.** Обозначим через  $Q(T)$  множество состояний  $(x_1, x_2) \in R_4 \cup R_2$ , переводимых в начало координат управляющей последовательностью  $\{0, +1\}$ , если  $(x_1, x_2) \in R_4$ , и управляющей последовательностью  $\{0, -1\}$ , если  $(x_1, x_2) \in R_2$ , и требующих одинакового времени перехода  $T$ .

Из уравнений (8.196) и (8.198) найдем

$$Q(T) = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -x_2T + \frac{1}{2}x_2|x_2|; (x_1, x_2) \in R_4 \cup R_2 \right\}. \quad (8.199)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} Q^+(T) &= Q(T) \cap R_4; \\ Q^-(T) &= Q(T) \cap R_2. \end{aligned} \quad (8.200)$$

На рис. 8.9 показаны некоторые кривые  $Q(T)$ . Полезное свойство кривых  $Q(T)$  устанавливает следующая лемма.

**Лемма 8.14.** Пусть  $T_1 < T_2$ ;  $(x_1, x_2) \in Q(T_1)$ ;  $(x'_1, x_2) \in Q(T_2)$ . Справедливо соотношение

$$|x'_1| > |x_1|. \quad (8.201)$$

**Доказательство** леммы проводится путем прямых вычислений при помощи соотношения (8.199). Грубо говоря, кривые  $Q(T)$  «растягиваются» с ростом  $T$ .

Пусть  $t^*$  — некоторое положительное число. Известно, что можно найти множество состояний, для которых  $t^*$  является минимальным временем перехода в начало координат. Это множество состояний мы обозначили через  $S(t^*)$  [см. определение 7.6]. Уравнение минимальной изохроны  $S(t^*)$  имеет вид [см. уравнение (7.27)]

$$S(t^*) = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{4}(t^* - x_2)^2, \text{ если } (x_1, x_2) \in R_4 \cup R_1, \right.$$

или

$$\left. x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4}(t^* + x_2)^2, \text{ если } (x_1, x_2) \in R_2 \cup R_3 \right\}. \quad (8.202)$$

На рис. 8.10 показана минимальная изохрона  $S(t^*)$ . На этом же рисунке изображена кривая  $Q(\beta t^*)$  с  $\beta > 1$ . Полагая  $T = \beta t^*$  в уравнении (8.197), получим

$$Q(\beta t^*) = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -x_2\beta t^* + \frac{1}{2}x_2|x_2|; (x_1, x_2) \in R_4 \cup R_2 \right\}. \quad (8.203)$$

Как показано на рис. 8.10, множества  $Q(\beta t^*)$  и  $S(t^*)$  пересекаются в двух точках, обозначенных через  $Z = (z_1, z_2)$  и  $Z' = (z'_1, z'_2)$ , симметричных относительно начала координат. Точка  $Z = (z_1, z_2)$  принадлежит к  $R_4$ , т. е.

$$(z_1, z_2) = S(t^*) \cap Q^+(\beta t^*) = S(t^*) \cap Q(\beta t^*) \cap R_4, \quad (8.204)$$

а точка  $Z' = (z'_1, z'_2) \in R_2$ , т. е.

$$(z'_1, z'_2) = S(t^*) \cap Q^-(\beta t^*) = S(t^*) \cap Q(\beta t^*) \cap R_2. \quad (8.205)$$

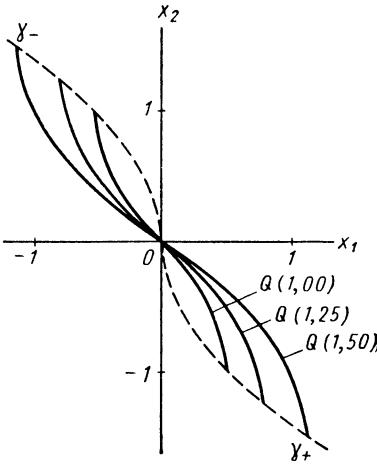


Рис. 8.9. Некоторые из кривых  $Q(T)$ , определяемых уравнением (8.199). Приведенные кривые соответствуют  $T=1$ ,  $T=1,25$  и  $T=1,50$

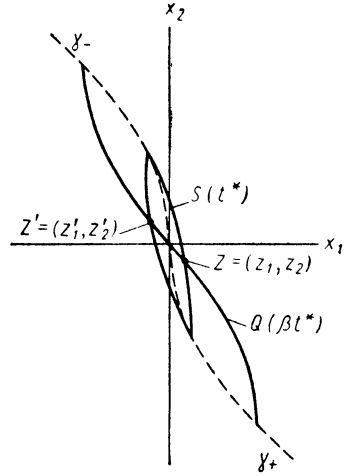


Рис. 8.10. Точки  $Z$  и  $Z'$  принадлежат пересечению  $S(t^*)$  и  $Q(\beta t^*)$

Из уравнений (8.203) и (8.202) находим, что точка  $(z_1, z_2)$  определяется уравнением

$$z_1 = -z_2 \beta t^* - \frac{1}{2} z_2^2 = -\frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{4} (t^* - z_2)^2. \quad (8.206)$$

Таким образом, точку  $(z_1, z_2)$  можно найти из двух уравнений:

$$z_2 = t^* [(1 - 2\beta) + 2\sqrt{\beta(\beta - 1)}]; \quad (8.207)$$

$$z_1 = -z_2 \beta t^* - \frac{1}{2} z_2^2. \quad (8.208)$$

Ввиду симметричности  $(z_1, z_2)$  и  $(z'_1, z'_2)$  имеем

$$z'_2 = -t^* [(1 - 2\beta) + 2\sqrt{\beta(\beta - 1)}]; \quad (8.209)$$

$$z'_1 = -z'_2 \beta t^* + \frac{1}{2} z'^2_2. \quad (8.210)$$

Итак, при заданных  $\beta$  и  $t^*$  точки  $Z = (z_1, z_2)$  и  $Z' = (z'_1, z'_2)$  полностью определены.

Исключая время  $t^*$  из уравнений (8.207) и (8.208) и из уравнений (8.209) и (8.210), получим

$$z_1 = m_\beta z_2^2; \quad (z_1, z_2) \in R_4; \quad (8.211)$$

$$z'_1 = -m_\beta z'^2_2, \quad (z'_1, z'_2) \in R_2; \quad (8.212)$$

где

$$m_\beta = \frac{\beta}{2\beta - 2\sqrt{\beta(\beta-1)} - 1} - \frac{1}{2}. \quad (8.213)$$

Объединим уравнения (8.211) и (8.212) в одно и определим кривую  $\gamma_\beta$  как

$$\gamma_\beta = \{(x_1, x_2) : x_1 = -m_\beta x_2 |x_2|\}, \quad (8.214)$$

где  $m_\beta$  соответствует выражению (8.213), а символы  $z$  заменены на  $x$ .

На рис. 8.11 показан вид кривых  $\gamma_\beta$  для различных значений  $\beta \geq 1$ . Докажем две леммы, с помощью которых сформулируем затем закон управления.

**Лемма 8.15.** Пусть  $(x_1, x_2) \in \gamma_\beta$  и  $t^*(x_1, x_2)$  — минимальное время, соответствующее  $(x_1, x_2)$ . Если  $(x_1, x_2) \in R_4$ , то оптимальна по расходу топлива управляющая последовательность  $\{0, +1\}$ , если  $(x_1, x_2) \in R_2$ , то оптимальна управляющая последовательность  $\{0, -1\}$ . В каждом из этих случаев время перехода

$$T = \beta t^*(x_1, x_2) \quad (8.215)$$

для любых  $(x_1, x_2) \in \gamma_\beta$ .

**Доказательство.** Эта лемма непосредственно следует из построения кривой  $\gamma_\beta$ . Так как  $\gamma_\beta$  является геометрическим местом точек  $(z_1, z_2)$  и  $(z'_1, z'_2)$  в зависимости от  $t^*$  и так как точки  $(z_1, z_2)$  и  $(z'_1, z'_2)$  одновременно принадлежат изохроне  $S(t^*)$  и множеству  $Q(\beta t^*)$ , то лемма вытекает из определения кривых  $Q(T)$  (см. определение 8.2).

**Лемма 8.16.** Дано  $\beta_1 < \beta_2$ ; пусть  $(x_1, x_2) \in \gamma_{\beta_1}$ , а  $(x'_1, x'_2) \in \gamma_{\beta_2}$ . Тогда  $|x_1| < |x'_1|$ .

Лемма доказывается прямыми вычислениями при помощи уравнений (8.214) и (8.213).

Из нее следует, что с ростом  $\beta$  кривые  $\gamma_\beta$  стремятся к оси  $x_1$  (сравните с рис. 8.11).

Кривые  $\gamma_\beta$  и  $\gamma^1$  делят фазовую плоскость на четыре области  $G_1, G_2, G_3$  и  $G_4$ , как показано на рис. 8.12. Более строго:

$$G_1 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 \geq -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \text{ и } x_1 > -m_\beta x_2 |x_2| \right\}; \quad (8.216)$$

$$G_2 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 < -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \text{ и } x_1 \geq -m_\beta x_2 |x_2| \right\}; \quad (8.217)$$

$$G_3 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 \leq -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \text{ и } x_1 < -m_\beta x_2 |x_2| \right\}; \quad (8.218)$$

$$G_4 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \text{ и } x_1 \leq -m_\beta x_2 |x_2| \right\}. \quad (8.219)$$

Отметим, что область  $G_1$  включает кривую  $\gamma_-$ , а область  $G_3$  — кривую  $\gamma_+$ .

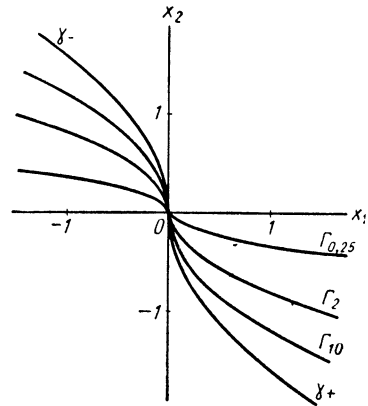


Рис. 8.11. Некоторые из кривых  $\gamma_\beta$ , определяемых уравнением (8.214). Показанные кривые соответствуют  $\beta = 1,2; \beta = 2,0$  и  $\beta = 10$

1) Напомним, что  $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$  [см. определение 7.4 и уравнение (7.21)].

**Закон управления 8.4 (решение задачи 8.4).** Оптимальное управление как функция состояния  $(x_1, x_2)$  определяется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1 \text{ для } (x_1, x_2) \in G_1; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для } (x_1, x_2) \in G_3; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = 0 \text{ для } (x_1, x_2) \in G_2 \cup G_4. \end{aligned} \right\} \quad (8.220)$$

Оптимальное управление единственно.

**Доказательство.** Пусть  $X = (x_1, x_2)$  — состояние из области  $G_4$  и  $t_X^*$  — минимальное время, соответствующее  $X$ . Мы должны показать, что время перехода  $T_X$ , соответствующее оптимальной по расходу топлива управляющей последовательности  $\{0, +1\}$ , удовлетворяет неравенству

$$T_X \leq \beta t_X^*. \quad (8.221)$$

Допустим, что

$$T_X > \beta t_X^*. \quad (8.222)$$

Тогда должно существовать  $\beta'$ ,  $\beta' > \beta$ , для которого

$$T_X = \beta' t_X^* \quad (8.223)$$

и, следовательно, кривая  $\gamma_{\beta'}$ , причем  $(x_1, x_2) \in \gamma_{\beta'}$ ; в свою очередь,  $\gamma_{\beta'} \in G_4$ . Но это противоречит лемме 8.16. Поэтому, если  $(x_1, x_2) \in G_4$ , то справедливо уравнение (8.221).

Пусть теперь  $Y = (y_1, y_2)$  — состояние из  $G_1$ , показанное на рис. 8.12, и  $t_Y^*$  — минимальное время, соответствующее  $Y$ . Управление (8.220) дает траекторию  $YABO$ , показанную на рис. 8.12. Надо доказать, что

$$T_Y \leq \beta t_Y^*. \quad (8.224)$$

Обозначим через  $t_A$  момент времени, в который траектория пересекает кривую  $\gamma_\beta$  (в точке  $A$ ). Так как отрезок траектории  $YA$  идентичен оптимальной по быстродействию траектории к началу координат, минимальное время  $t_A^*$ , соответствующее точке  $A$ , будет равно

$$t_A^* = t_Y^* - t_A. \quad (8.225)$$

Время, требующееся на переход из точки  $A$  в начало координат вдоль траектории  $ABO$ , по определению, равно  $\beta t_A^*$ , и, следовательно, время  $T_Y$ , требующееся для перехода из точки  $Y$  в начало координат вдоль траектории  $YABO$ , равно

$$T_Y = t_A + \beta(t_Y^* - t_A) = \beta t_Y^* + (1 - \beta)t_A. \quad (8.226)$$

Так как  $\beta > 1$ , то член  $(1 - \beta)t_A$  отрицателен, и поэтому

$$T_Y < \beta t_Y^*. \quad (8.227)$$

Если начальное состояние принадлежит к  $G_2 \cup G_3$ , доказательство закона управления аналогично приведенному выше.

Рассмотрим практическую реализацию закона управления 8.4. Система управления должна измерять состояние  $(x_1, x_2)$ , определять, принадлежит ли оно к областям  $G_1, G_3$  или  $G_2 \cup G_4$ , и вырабатывать оптималь-

ное управление в соответствии с уравнениями (8.220). Система, показанная на рис. 8.13, решает эту задачу. Фазовая координата  $x_2$  подается на нелинейность  $N$ , характеристика которой  $x_2 |x_2|^{1)}$ . Сигнал  $x_2 |x_2|$  делится и суммируется с  $x_1$ , в результате чего получается сигнал  $a(t)$ . Сигнал  $x_2 |x_2|$  умножается также на постоянный коэффициент  $m_B$  и складывается с сигналом  $x_1$ , давая в результате сигнал  $b(t)$ . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} a(t) > 0 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in G_1 \cup G_4; \\ a(t) < 0 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in G_2 \cup G_3; \\ a(t) = 0 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in \gamma_+ \cup \gamma_-; \end{aligned}$$

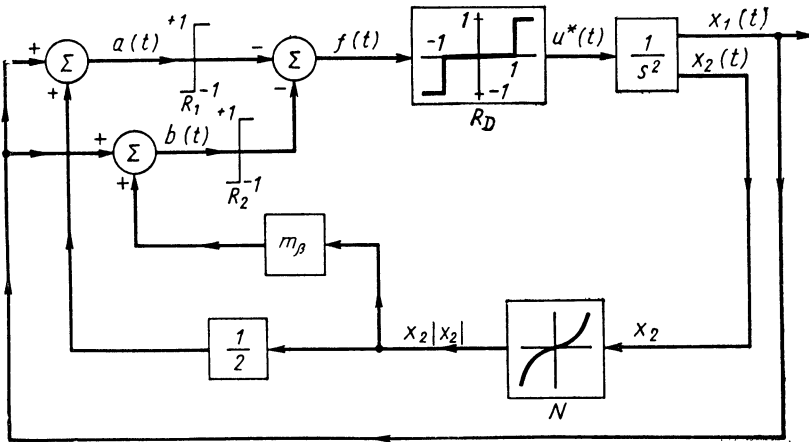


Рис. 8.13. Реализация закона управления 8.4

и

$$\begin{aligned} b(t) > 0 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in G_1 \cup G_2; \\ b(t) < 0 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in G_3 \cup G_4; \\ b(t) = 0 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in \gamma_B. \end{aligned}$$

Сигналы  $a(t)$  и  $b(t)$  подаются на поляризованные реле  $R_1$  и  $R_2$ ; суммирование выходных сигналов реле дает сигнал

$$f(t) = -\text{sign}\{a(t)\} - \text{sign}\{b(t)\}. \quad (8.228)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \text{если } (x_1, x_2) \in G_1, & \text{ то } f(t) = -2; \\ \text{если } (x_1, x_2) \in G_3, & \text{ то } f(t) = +2; \\ \text{если } (x_1, x_2) \in G_2 \cup G_4, & \text{ то } f(t) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.229)$$

Характеристики блока  $R_D$  соответствуют характеристикам идеального реле с зоной нечувствительности, т. е.

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= +1, \text{ если } f(t) \geq 1; \\ u(t) &= 0, \text{ если } |f(t)| < 1; \\ u(t) &= -1, \text{ если } f(t) \leq -1. \end{aligned} \right\} \quad (8.230)$$

Из уравнений (8.230) и (8.229) видно, что система, показанная на рис. 8.13, дает управление в соответствии с уравнениями (8.220) и пред-

1) Заметим, что это та же нелинейность, что и на рис. 7.5, «вырабатывающая» оптимальное по быстродействию управление для той же самой системы.



ставляет собой обещанное инвариантное во времени управляющее устройство.

При решении этой задачи нам «повезло», так как уравнение кривой  $\gamma_\beta$  оказалось подобным уравнению кривой  $\gamma$  (обе они являются парабололами). Это обстоятельство позволяет использовать один и тот же нелинейный элемент  $N$  (см. рис. 8.13) для получения обеих кривых  $\gamma$  и  $\gamma_\beta$ . Это не всегда справедливо для остальных систем второго порядка. Иначе говоря, уравнения кривых  $\gamma$  и  $\gamma_\beta$  в общем случае отличны друг от друга.

**Упражнение 8.20.** Покажите, что для заданного состояния  $(x_1, x_2)$  время перехода  $T$  при управлении (8.220) равно

$$T = \begin{cases} x_2 + \left(\frac{3}{2} + m_\beta\right) \sqrt{\frac{2x_1 + x_2^2}{1 + 2m_\beta}}, & \text{если } (x_1, x_2) \in G_1; \\ \frac{1}{2}|x_2| - \frac{x_1}{x_2}, & \text{если } (x_1, x_2) \in G_2 \cup G_4; \\ -x_2 + \left(\frac{3}{2} + m_\beta\right) \sqrt{\frac{-2x_1 + x_2^2}{1 + 2m_\beta}}, & \text{если } (x_1, x_2) \in G_3 \end{cases} \quad (8.231)$$

и что при этом требуется  $F$  единиц топлива:

$$F = \begin{cases} x_2 + 2 \sqrt{\frac{2x_1 + x_2^2}{1 + 2m_\beta}}, & \text{если } (x_1, x_2) \in G_1; \\ |x_2|, & \text{если } (x_1, x_2) \in G_2 \cup G_4 \\ -x_2 + 2 \sqrt{\frac{-2x_1 + x_2^2}{1 + 2m_\beta}}, & \text{если } (x_1, x_2) \in G_3. \end{cases} \quad (8.232)$$

При  $x_2 = 0$  постройте графики зависимости количества топлива  $F$  и времени  $T$  от  $|x_1|$  для  $\beta = 1,0; 1,1; 1,2; 1,5; 2,0; 5,0$  и  $10,0$ . При  $\beta = 1,2$  и  $x_2 = 0$  постройте график зависимости отношения  $\frac{T}{t^*}$  в функции от  $|x_1|$ , где  $t^*$  — минимальное время.

## 8.8. МИНИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВРЕМЕНИ И РАСХОДА ТОПЛИВА

В предыдущем параграфе мы спроектировали инвариантную во времени систему с обратной связью, дающую оптимальное по расходу топлива решение и гарантирующую, что время перехода всегда ограничено произведением минимального времени на некоторую константу. При выводе закона управления 8.4 было использовано аналитическое выражение минимальной изохроны  $S(t^*)$ . В гл. 7 мы отмечали, что отыскание уравнения минимальной изохроны является задачей исключительно сложной, если вообще разрешимой. В этом и заключается основной недостаток подхода, использованного для решения задачи 8.4.

Цель настоящего параграфа — сформулировать и решить задачу оптимизации, используя функционал стоимости, представляющий собой взвешенную линейную комбинацию времени перехода и расходуемого топлива. Мы увидим, что использование такого функционала стоимости опять приводит к инвариантной во времени системе с обратной связью, что весьма желательно с практической точки зрения. В двух последующих параграфах используется этот же функционал стоимости, так как считается, что он является хорошим критерием для практических задач.

В этом параграфе будем действовать следующим образом. Сначала применим принцип минимума для отыскания управляющих последовательностей, которые могут оказаться оптимальными. Далее мы неоднократно будем пользоваться необходимым условием, состоящим в равенстве нулю гамильтониана задачи вдоль оптимальной траектории. Покажем

единственность экстремальных управлений. Наконец, получим уравнения линий переключения и выразим оптимальное управление в функции от состояния. Оптимальная система с обратной связью окажется той же самой, что и система, показанная на рис. 8.13. Подчеркнем, что это лишь совпадение, а не общее свойство всех оптимальных систем.

В этом параграфе решим следующую задачу.

**Задача 8.5.** Дана система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t); \quad |u(t)| \leq 1.\end{aligned}\tag{8.233}$$

Найти управление, переводящее систему (8.233) из любого исходного состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и минимизирующее при этом функционал

$$J(u) = J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt,\tag{8.234}$$

где 
$$k > 0;\tag{8.235}$$

время перехода  $T$  не задано.

Напомним, что

$$J = kT + \int_0^T |u(t)| dt = kT + F.\tag{8.236}$$

Таким образом,  $J$  есть взвешенная сумма времени перехода и израсходованного при этом топлива.

Гамильтониан  $H$  этой задачи равен

$$H = k + |u(t)| + x_2(t)p_1(t) + u(t)p_2(t).\tag{8.237}$$

Дополнительные переменные  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  являются решениями дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = 0;\tag{8.238}$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -p_1(t).\tag{8.239}$$

Полагая  $\pi_1 = p_1(0)$ ,  $\pi_2 = p_2(0)$ , найдем 
$$\pi_1 = p_1(t) = \pi_1 = \text{const};\tag{8.240}$$

$$p_2(t) = \pi_2 - \pi_1 t.\tag{8.241}$$

Управление, минимизирующее гамильтониан, равно

$$u(t) = 0, \text{ если } |p_2(t)| < 1;\tag{8.242}$$

$$u(t) = -\text{sign}\{p_2(t)\}, \text{ если } |p_2(t)| > 1;\tag{8.243}$$

$$0 \leq u(t) \leq +1, \text{ если } p_2(t) = -1;\tag{8.244}$$

$$-1 \leq u(t) \leq 0, \text{ если } p_2(t) = +1.\tag{8.245}$$

Нам следует выяснить не окажется ли  $|p_2(t)| = 1$  для любого  $t$  на некотором интервале, скажем  $[t_1, t_2]$ . Результатом этого в § 8.5 явилась неединственность управлений. Покажем, что в задаче 8.5 такое положение не встречается.

**Лемма 8.17.**  $|p_2(t)|$  не может быть равно 1 ни на каком интервале  $[t_1, t_2]$ . Следовательно, вырожденное управление не может быть оптимально, и поэтому задача нормальна.

**Доказательство.** Допустим, что  $p_2(t) = -1$  при любом  $t \in [t_1, t_2]$ . Тогда согласно уравнению (8.244) управление  $u(t)$  должно быть некоторой неотрицательной функцией времени. В любой момент времени  $t \in [t_1, t_2]$  гамильтониан равен

$$H = k + |u(t)| + x_2(t) \pi_1 - u(t) = k + x_2(t) \pi_1. \quad (8.246)$$

Но если  $p_2(t) = -1$  при любом  $t \in [t_1, t_2]$ , то

$$\pi_1 = 0 \text{ и } \pi_2 = -1. \quad (8.247)$$

Подставив  $\pi_1 = 0$  в уравнение (8.246), получим:

$$H = k > 0 \text{ (так как } k > 0\text{)}. \quad (8.248)$$

Система (8.233) инвариантна во времени, и  $T$  не задано. Поэтому гамильтониан  $H$  должен быть тождественно равен нулю вдоль оптимальной траектории, что, очевидно, противоречит уравнению (8.248). Рассуждения для  $p_2(t) = +1$  при любом  $t \in [t_1, t_2]$  полностью аналогичны.

Так как вырожденные управления не могут быть оптимальными, то в качестве возможных оптимальных управлений следует рассматривать лишь девять управляющих последовательностей<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} &\{0\}; \{+1\}; \{-1\}; \{0, +1\}; \{0, -1\}; \{+1, 0\}; \{-1, 0\}; \\ &\{+1, 0, -1\}; \{-1, 0, +1\}. \end{aligned} \quad (8.249)$$

**Лемма 8.18.** Если желаемым конечным состоянием является начало координат  $(0, 0)$ , то оптимальными могут быть только шесть управляющих последовательностей

$$\begin{aligned} &\{+1\}; \{-1\}; \{0, +1\}; \{0, -1\}; \\ &\{+1, 0, -1\}; \{-1, 0, +1\}. \end{aligned} \quad (8.250)$$

**Доказательство.** Надо показать, что управляющие последовательности  $\{0\}$ ;  $\{+1; 0\}$  и  $\{-1; 0\}$  не могут быть оптимальными по отношению к началу координат. Общей характеристикой этих последовательностей является то, что в конечный момент времени  $T$

$$u(T) = 0. \quad (8.251)$$

Так как  $x_2(T) = 0$ , гамильтониан при  $t = T$  и  $[u(T) = 0]$  равен

$$H|_{t=T} = k + |u(T)| + x_2(T) \pi_1 + u(T) p_2(T) = k > 0. \quad (8.252)$$

Это противоречит условию  $H = 0$  при любом  $t \in [0, T]$ . Лемма доказана.

Заметим, что управляющие последовательности  $\{+1\}$  и  $\{0; +1\}$  являются подпоследовательностями управляющей последовательности  $\{-1; 0; +1\}$ , а управляющие последовательности  $\{-1\}$ ;  $\{0; -1\}$  — подпоследовательностями из  $\{+1; 0; -1\}$ . По принципу оптимальности<sup>2</sup>, если вся последовательность оптимальна, то и любая подпоследовательность из нее должна быть оптимальна.

<sup>1</sup> См. § 5.16.

<sup>2</sup> В этом параграфе термин «оптимальный» относится к функционалу

$$J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt.$$

На рис. 8.14 показана функция  $p_2(t)$ , дающая управляющую последовательность  $\{-1; 0; +1\}$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= -1; & 0 \leq t < t_1; \\ u(t) &= 0; & t_1 \leq t < t_2; \\ u(t) &= +1; & t_2 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (8.253)$$

Очевидно, что так как  $p_2(t) = \pi_2 - \pi_1 t$ , должно быть

$$\pi_2 > 1, \pi_1 > 0 \quad (8.254)$$

и, кроме того, в моменты переключения  $t_1$  и  $t_2$  имеем

$$p_2(t_1) = 1 = \pi_2 - \pi_1 t_1; \quad (8.255)$$

$$p_2(t_2) = -1 = \pi_2 - \pi_1 t_2 \quad (8.256)$$

Начиная с некоторого исходного состояния  $(\xi_1, \xi_2)$ , приложим  $H$  — минимальное управление (8.253). Пусть  $^1(z_1, z_2)$  — некоторое состояние при  $t = t_1$ , а  $(w_1, w_2)$  — состояние при  $t = t_2$ . Известно, что  $(w_1, w_2) \in \gamma_+$  и удовлетворяются уравнения (8.140)—(8.142). Надо найти геометрическое место состояний  $(z_1, z_2)$ . Так как  $(w_1, w_2) \in \gamma_+$ , имеем

$$w_1 = \frac{1}{2} w_2^2. \quad (8.257)$$

Уравнение (8.141) можно записать в виде

$$w_2 = z_2;$$

$$w_1 = z_1 + z_2(t_2 - t_1). \quad (8.258)$$

Из уравнений (8.257) и (8.258) получим соотношение

$$\frac{1}{2} z_2^2 = z_1 + z_2(t_2 - t_1). \quad (8.259)$$

Гамильтониан должен быть равен нулю при любом  $t \in [0, T]$ . При  $t = t_1$  имеем

$$x_1(t_1) = z_1; \quad x_2(t_1) = z_2; \quad p_2(t_1) = 1; \quad u(t_1) \leq 0. \quad (8.260)$$

Подставив уравнения (8.260) в соотношение (8.237), получим

$$H|_{t=t_1} = 0 = k + z_2 \pi_1, \quad (8.261)$$

откуда

$$\pi_1 = -\frac{k}{z_2}. \quad (8.262)$$

Вычтем уравнение (8.256) из (8.255) и найдем

$$2 = \pi_1(t_2 - t_1). \quad (8.263)$$

Подставляя уравнения (8.262) и (8.263) в соотношение (8.259), получим

$$\frac{1}{2} z_2^2 = z_1 - z_2 \frac{2z_2}{k} \quad (8.264)$$

или, эквивалентно,

$$z_1 = g_k z_2^2, \quad (8.265)$$

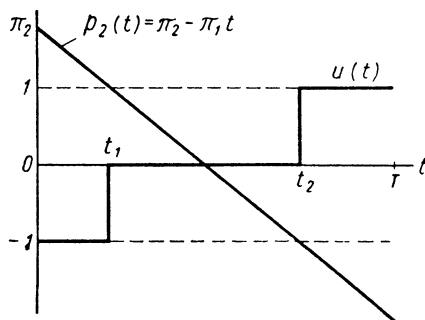


Рис. 8.14. Функция  $p_2(t) = \pi_2 - \pi_1 t$ , дающая управление  $u(t)$  по уравнению (8.253)

<sup>1</sup> См. уравнения (8.138).

где

$$g_k = \frac{k+4}{2k}. \quad (2.266)$$

Уравнения (8.265) и (8.266) описывают геометрическое место состояний  $(z_1, z_2)$ , в которых управление, даваемое управляющей последовательностью  $\{-1; 0; +1\}$ , переключается с  $u = -1$  на  $u = 0$ . Действуя аналогичным образом, найдем геометрическое место состояний  $(z'_1, z'_2)$ , в которых управление, даваемое управляющей последовательностью  $\{+1; 0; -1\}$ , переключается с  $u = +1$  на  $u = 0$ :

$$z'_1 = -g_k z_2'^2. \quad (2.267)$$

Итак, мы использовали все необходимые условия для доказательства того, что на экстремальной траектории состояние в момент переключения  $t_1$

$$x_1(t_1) = z_1;$$

$$x_2(t_1) = z_2$$

должно удовлетворять уравнению (8.265), т. е. соотношению  $z_1 = g_k z_2^2$ , а состояние в момент переключения  $t$

$$x_1(t_2) = \omega_1;$$

$$x_2(t_2) = \omega_2$$

должно удовлетворять уравнениям (8.257) и (8.258), т. е. соотношениям  $\omega_1 = \frac{1}{2} \omega_2^2$  и  $z_2 = \omega_2$ . Так как  $g_k = \frac{k+4}{2k}$  [см. уравнение (8.266)],

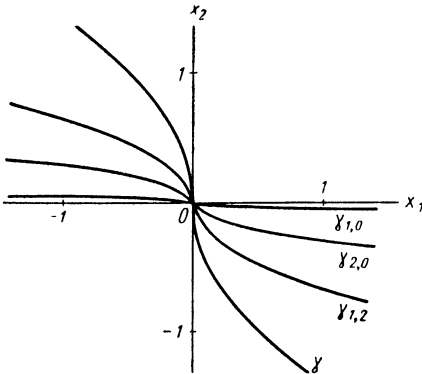


Рис. 8.15. Некоторые из кривых  $\Gamma_k$ ;  $k = 0,25$ ;  $k = 2$  и  $k = 10$

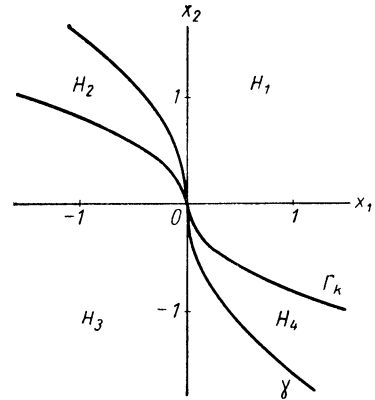


Рис. 8.16. Разбиение фазовой плоскости на области  $H_1, H_2, H_3$  и  $H_4$  кривыми  $\gamma$  и  $\Gamma_k$

геометрическое место состояний  $\{(z_1, z_2)\}$  полностью определяется коэффициентом  $k$ , а геометрическое место состояний  $\{(\omega_1, \omega_2)\}$  абсолютно не зависит от  $k$ . Сформулируем следующее определение.

**Определение 8.3.** Обозначим через  $\Gamma_k$  кривую, определенную соотношением

$$\Gamma_k = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -g_k x_2 \mid x_2 \right\}; \quad g_k = \frac{k+4}{2k}. \quad (8.268)$$

На рис. 8.15 показаны некоторые кривые  $\Gamma_k$  для различных значений  $k$ . Кривые  $\gamma$  и  $\Gamma_k$  делят фазовую плоскость на четыре области  $H_1, H_2, H_3, H_4$ .

$H_2, H_3$  и  $H_4$ , как показано на рис. 8.16. Точно эти области определяются следующим образом:

$$H_1 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 \geq -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \text{ и } x_1 > -g_k x_2 |x_2| \right\}; \quad (8.269)$$

$$H_2 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 < -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \text{ и } x_1 \geq -g_k x_2 |x_2| \right\}; \quad (8.270)$$

$$H_3 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 \leq -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \text{ и } x_1 < -g_k x_2 |x_2| \right\}; \quad (8.271)$$

$$H_4 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \text{ и } x_1 \leq -g_k x_2 |x_2| \right\}. \quad (8.272)$$

**Закон управления 8.5 (решение задачи 8.5).** Оптимальное управление  $u^*$  как функция от состояния  $(x_1, x_2)$  определяется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(x, x_2) = -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in H_1; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in H_3; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = 0 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in H_2 \cup H_4, \end{aligned} \right\} \quad (8.273)$$

и, следовательно, управление  $u^*$  единственно.

**Упражнение 8.21.** Докажите закон управления 8.5. У к а з а н и е: при доказательстве существования считайте, что оптимальное управление для задачи 8.3 существует. При доказательстве единственности выберите состояния из  $H_1, H_2, H_3$  и  $H_4$ . Испытайте каждую из шести управляющих последовательностей (8.250) и потребуйте, чтобы гамильтониан был равен нулю вдоль оптимальной траектории.

Практическая реализация закона управления 8.5 полностью аналогична блок-схеме, показанной на рис. 8.13, и отличается от нее лишь тем, что коэффициент усиления  $m_p$  на рис. 8.13 надо заменить коэффициентом усиления  $g_k = \frac{k+4}{2k}$ . Идентичность реализаций объясняется одинаковым видом уравнений кривых  $\Gamma_k$  (8.268) и  $\gamma_B$  (8.214)<sup>1)</sup>. Нетрудно показать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \frac{1}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} g_k \rightarrow \infty. \quad (8.274)$$

Это означает, грубо говоря, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k \rightarrow \text{кривая } \gamma; \quad (8.275)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k \rightarrow \text{ось } x_1. \quad (8.276)$$

Этого и следовало ожидать, так как функционал имеет вид

$$J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt. \quad (8.277)$$

Нетрудно видеть, что если  $k \rightarrow \infty$ , то функционал «взвешивает» только время, и поэтому при  $k \rightarrow \infty$  закон управления 8.5 переходит в закон управления, оптимального по быстродействию (закон управления 7.1). Иначе говоря,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_1 = R_- \cup \gamma_-; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} H_3 = R_+ \cup \gamma_+; \quad (8.278)$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} H_2 \cup H_4 = \emptyset$  (пустое множество).

<sup>1)</sup> Это лишь простое совпадение. Читатель не должен считать, что такое положение имеет место для всех систем второго порядка.

Если  $k \rightarrow 0$ , то функционал (8.277) превращается в функционал топлива  $F$  (8.84), и задача 8.5 оказывается почти эквивалентной задаче 8.2. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} H_1 &= R_1; \\ \lim_{k \rightarrow 0} H_3 &= R_3; \\ \lim_{k \rightarrow 0} H_2 \cup H_4 &= R_2 \cup R_4, \end{aligned} \right\} \quad (8.279)$$

где области  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$  соответствуют определению 8.1 [уравнения (8.109)—(8.112) и рис. 8.3]. В этом случае ( $k \rightarrow 0$ ) закон управления 8.5 почти аналогичен закону управления 8.2. При  $k \rightarrow 0$  автоматически получается управление, оптимальное по расходу топлива (если оно существует), требующее наименьшего времени перехода<sup>1</sup>. Иначе говоря, при  $k \rightarrow 0$  закон управления 8.5 не выявляет того обстоятельства, что оптимальное по топливу управление может быть неединственно.

**Упражнение 8.22.** Выразите минимальную стоимость  $J^*$  в функции от  $(x_1, x_2)$ . Покажите, что она является решением уравнения Гамильтона—Якоби. Примите  $k = 1$  и начертите область состояний, «стоимость» перевода которых в начало координат одинакова ( $J^* = \frac{1}{2}, 1, 2$ ). Являются ли эти множества границами выпуклых областей?

**Упражнение 8.23.** Выразите время перехода  $T$  и количество топлива  $F$  в функции от состояния. Постройте график отношения количества топлива к времени перехода для исходных состояний, расположенных на оси  $x_1$  при  $k = 1$ .

**Упражнение 8.24.** Найдите связь между  $k$  в задаче 8.5 и  $\beta$  в задаче 8.4 таким образом, чтобы законы управления 8.4 и 8.5 были идентичны.

**Упражнение 8.25.** Рассмотрите систему (8.233) и функционал (8.234) с незадаанным  $T$ . Считайте, что конечное состояние  $(\theta_1, \theta_2)$  не обязательно является началом координат. Полагая, что оптимум существует, найдите оптимальное управление в функции от состояния. Обсудите единственность оптимального и экстремального управлений. Найдите линии переключения для  $\theta_1 = 1, \theta_2 = 1$  при  $k = 2$ . Постройте кривые равной стоимости. Является ли поверхность минимальной стоимости непрерывной функцией состояния?

**Упражнение 8.26.** Рассмотрите систему (8.233) и функционал (8.234) с незадаанным  $T$  и  $k = 2$ . Областью цели является окружность

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Найдите оптимальное управление как функцию от состояния для состояний внутри окружности  $S$  и вне ее.

**Упражнение 8.27.** Повторите упражнение 8.26 для случая, когда область цели составлена из двух изолированных точек, т. е.

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1 = -1; x_2 = 0 \text{ или } x_1 = 1; x_2 = 0\}.$$

Обсудите единственность оптимального и экстремального управлений.

\* \* \*

### 8.9. МИНИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВРЕМЕНИ И РАСХОДА ТОПЛИВА ДЛЯ ОБЪЕКТА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО СОБОЙ ИНТЕГРАТОР И АПЕРИОДИЧЕСКОЕ ЗВЕНО<sup>2</sup>

В предыдущих четырех параграфах мы рассмотрели управление положением и скоростью массы, движущейся без трения. В этом параграфе рассмотрим управление движением массы, подверженной действию сил сопротивления. Примем, что сила сопротивления (или трения) пропорциональна скорости движения тела. При этом будем пользоваться тем же критерием, что и в § 8.8, т. е.

$$J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt.$$

<sup>1</sup> То же самое получилось и в § 8.2.

<sup>2</sup> Этот вопрос рассматривается в работе [121].

Методы решения данной задачи аналогичны методам § 8.8. Решение этой задачи преследует две цели: во-первых, показать, что закон управления для нашей задачи аналогичен закону управления 8.5 в том смысле, что и здесь будут две линии переключения, делящие фазовую плоскость на четыре области. Во-вторых, в следующем параграфе мы рассмотрим оптимальное управление телом, которое подвержено действию сил сопротивления, изменяющихся по нелинейному закону. Эти два случая существенно отличаются друг от друга, хотя критерий остается тем же самым.

Предположим, что дано тело единичной массы. Обозначим через  $y(t)$  его положение, а через  $u(t)$  — управляющую силу. Будем считать, что тело движется в вязкой среде и поэтому сила трения пропорциональна скорости его движения. Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) = u(t), \tag{8.280}$$

где  $a$  — положительная постоянная (коэффициент трения).

Управляющая сила ограничена:

$$|u(t)| \leq 1. \tag{8.281}$$

Передаточная функция объекта (8.280) имеет вид

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{1}{s(s+a)}, \tag{8.282}$$

и поэтому такой объект можно рассматривать как «интегратор с апериодическим звеном».

Определим фазовые координаты при помощи уравнений

$$x_1(t) = y(t) - y_d; \quad x_2(t) = \dot{y}(t), \tag{8.283}$$

где  $y_d$  — заданное положение.

**Задача 8.6.** Дана система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -ax_2(t) + u(t), \quad |u(t)| \leq 1. \end{aligned} \right\} \tag{8.284}$$

Найти управление, переводящее систему (8.284) из любого исходного состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и минимизирующее при этом функционал

$$J(u) = J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt, \tag{8.285}$$

где  $k > 0$ , а время перехода  $T$  не задано.

Оптимальное по быстродействию управление системой (8.280) рассматривалось в упражнении 7.32<sup>1)</sup>.

Гамильтониан данной задачи имеет вид

$$H = k + |u(t)| + x_2(t)p_1(t) - ax_2(t)p_2(t) + u(t)p_2(t). \tag{8.286}$$

Дополнительные переменные  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  являются решениями уравнений

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = 0; \tag{8.287}$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -p_1(t) + ap_2(t). \tag{8.288}$$

Примем, что

$$\pi_1 = p_1(0); \quad \pi_2 = p_2(0), \tag{8.289}$$

<sup>1)</sup> Фазовые координаты  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , определенные уравнениями (8.284), отличны от фазовых координат (7.272).



и, решив уравнения (8.287) и (8.288), получим

$$p_1(t) = \pi_1 = \text{const}; \quad (8.290)$$

$$p_2(t) = \left( \pi_2 - \frac{\pi_1}{a} \right) e^{at} + \frac{\pi_1}{a}. \quad (8.291)$$

Управление, абсолютно минимизирующее гамильтониан, равно

$$u(t) = 0, \quad \text{если } |p_2(t)| < 1; \quad (8.292)$$

$$u(t) = -\text{sign} \{p_2(t)\}, \quad \text{если } |p_2(t)| > 1; \quad (8.293)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad \text{если } p_2(t) = -1; \quad (8.294)$$

$$-1 \leq u(t) \leq 0, \quad \text{если } p_2(t) = +1. \quad (8.295)$$

**Лемма 8.19.** Условие  $|p_2(t)| = 1$  при любом  $t \in [t_1, t_2]$  дает управление, которое не может быть оптимальным по расходу топлива; следовательно, вырожденных управлений для данной задачи не существует, и поэтому задача нормальна.

**Упражнение 8.28.** Докажите лемму 8.19. У к а з а н и е: следуя методике доказательства леммы 8.17, покажите, что из  $|p_2(t)| = 1$  при любом  $t \in [t_1, t_2]$  следует  $H = k > 0$ .

Так как вырожденных управлений не может быть и функция  $p_2(t)$  есть сумма постоянной и возрастающей (по величине) экспоненты, то из уравнения (8.291) следует, что при  $t \in [0, T]$

$$\left. \begin{aligned} p_2(t) &= \text{const}, & \text{если } \pi_2 &= \frac{\pi_1}{a}; \\ p_2(t) &\text{ монотонно возрастает,} & \text{если } \pi_2 &> \frac{\pi_1}{a}; \\ p_2(t) &\text{ монотонно убывает,} & \text{если } \pi_2 &< \frac{\pi_1}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (8.296)$$

Из уравнений (8.296), (8.292) и (8.293) следует вывод, что оптимальными могут оказаться девять управляющих последовательностей

$$\{0\}; \{+1\}; \{-1\}; \{0, -1\}; \{0, +1\}; \{+1, 0\}; \{-1, 0\}; \{+1, 0, -1\}; \{-1, 0, +1\}. \quad (8.297)$$

**Лемма 8.20.** Если желаемым конечным состоянием является начало координат  $(0, 0)$ , то оптимальными могут быть только шесть управляющих последовательностей

$$\{+1\}; \{-1\}; \{0, +1\}; \{0, -1\}; \{+1, 0, -1\}; \{-1, 0, +1\}. \quad (8.298)$$

**Упражнение 8.29.** Докажите лемму 8.20. У к а з а н и е: это доказательство аналогично доказательству леммы 8.18.

Теперь необходимо решить систему (8.284) для управлений

$$u(t) = +1; \quad u(t) = -1; \quad u(t) = 0. \quad (8.299)$$

Пусть  $\xi_1 = x_1(0)$ ;  $\xi_2 = x_2(0)$ . (8.300)

Решив уравнения (8.284), получим

$$\left. \begin{aligned} x_2(t) &= \xi_2 e^{-at}, \\ x_1(t) &= \xi_1 + \frac{\xi_2}{a} (1 - e^{-at}) \end{aligned} \right\} u(t) = 0; \quad (8.301)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2(t) &= \left( \xi_2 - \frac{\Delta}{a} \right) e^{-at} + \frac{\Delta}{a}; \\ x_1(t) &= \xi_1 + \frac{\Delta}{a} t + \frac{1}{a^2} (\Delta - a\xi_2) e^{-at} + \frac{1}{a} \left( \xi_2 - \frac{\Delta}{a} \right). \end{aligned} \right\} u(t) = \Delta = \pm 1 \quad (8.302)$$

Исключив время из уравнений (8.301) и (8.302), получим уравнения траекторий на фазовой плоскости.

**Определение 8.4.** Обозначим через  $T^0(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$  траекторию, начинающуюся из  $(\xi_1, \xi_2)$ , произведенную управлением  $u(t) = 0$  и проходящую через точку  $(x_1, x_2)$ . Уравнение траектории  $T^0(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$  получено путем исключения времени  $t$  из уравнений (8.301). Итак, для  $T^0(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$  имеем уравнение

$$x_1 = \xi_1 + \frac{1}{a}(\xi_2 - x_2). \quad (8.303)$$

**Определение 8.5.** Обозначим через  $T^+(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$  траекторию, начинающуюся из  $(\xi_1, \xi_2)$ , произведенную управлением  $u(t) = +1$  и проходящую через точку  $(x_1, x_2)$ . Из уравнений (8.302) при  $\Delta = +1$  для траектории  $T^+(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$  получим

$$x_1 = \xi_1 + \frac{1}{a^2} \log \frac{a\xi_2 - 1}{ax_2 - 1} + \frac{1}{a}(\xi_2 - x_2). \quad (8.304)$$

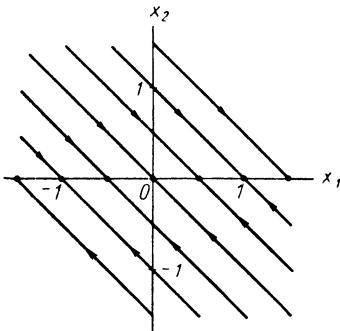


Рис. 8.17.  $T^0$ -траектории системы (8.284) при  $u(t) = 0$  и  $a = 1$

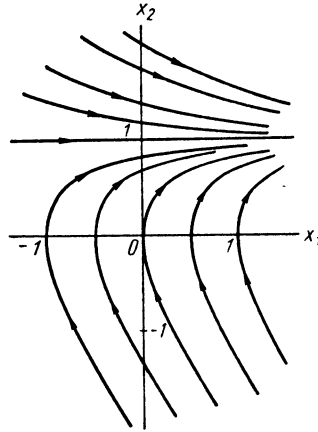


Рис. 8.18.  $T^+$ -траектории системы (8.284) при  $u(t) = +1$  и  $a = 1$

**Определение 8.6.** Обозначим через  $T^-(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$  траекторию, начинающуюся из  $(\xi_1, \xi_2)$ , произведенную управлением  $u = -1$  и проходящую через точку  $(x_1, x_2)$ . Из уравнений (8.302) при  $\Delta = -1$  для траектории  $T^-(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$  получим

$$x_1 = \xi_1 - \frac{1}{a^2} \log \frac{a\xi_2 + 1}{ax_2 + 1} + \frac{1}{a}(\xi_2 - x_2). \quad (8.305)$$

Различные траектории  $T^0$ ,  $T^+$  и  $T^-$  показаны на рис. 8.17—8.19 для значения  $a = 1$ .

Приступим теперь к построению линий переключения и к формулировке закона оптимального управления. Нам известно (из леммы 8.20), что управляющая последовательность  $\{-1; 0; +1\}$  может быть оптимальной. Для этой последовательности управление равно

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= -1 && \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ u(t) &= 0 && \text{при } t_1 \leq t < t_2; \\ u(t) &= +1 && \text{при } t_2 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (8.306)$$

На рис. 8.20 показано исходное состояние  $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$ , которое переводится в начало координат  $O = (0, 0)$  управлением (8.306). Обозначим

$$\left. \begin{aligned} x_1(t_1) &= z_1, \quad x_2(t_1) = z_2, \quad Z = (z_1, z_2); \\ x_1(t_2) &= w_1, \quad x_2(t_2) = w_2, \quad W = (w_1, w_2). \end{aligned} \right\} \quad (8.307)$$

Так как  $u(t) = -1$  при  $t \in (0, t_1)$ , то траекторией, соединяющей  $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$  и  $Z = (z_1, z_2)$ , является  $T^-(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$ . При  $t \in (t_1, t_2)$   $u(t) = 0$ , и поэтому точки  $Z = (z_1, z_2)$  и  $W = (w_1, w_2)$  соединяет траектория  $T^0(z_1, z_2, w_1, w_2)$ . Наконец, при  $t \in [t_2, T]$  управление  $u(t) = 1$ , и точки  $W = (w_1, w_2)$  и  $O = (0, 0)$  соединяет траектория  $T^+(w_1, w_2, 0, 0)$ .

Рассмотрев множество всех состояний, для которых оптимальна управляющая последовательность  $\{-1; 0; +1\}$ , можно получить геометрические места точек  $(w_1, w_2)$  и  $(z_1, z_2)$ .

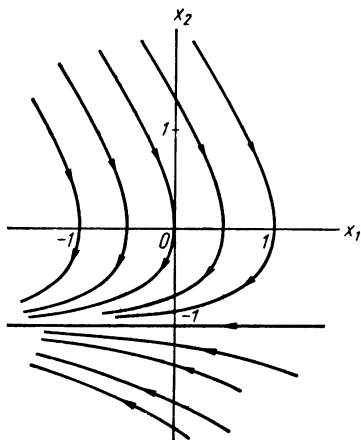


Рис. 8.19.  $T^-$  — траектории системы (8.284) при  $u(t) = -1$  и  $a = 1$

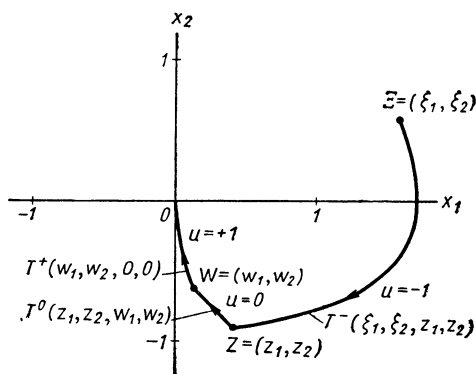


Рис. 8.20. Траектория, получающаяся в результате приложения управляющей последовательности  $\{-1, 0, +1\}$  и переводящая исходное состояние  $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$  в начало координат

Найдем геометрическое место точек  $(w_1, w_2)$ . Так как  $(w_1, w_2) \in T^+(w_1, w_2, 0, 0)$ , подстановка значений

$$\xi_1 = w_1; \xi_2 = w_2; x_1 = 0; x_2 = 0 \quad (8.308)$$

в уравнение (8.304) дает

$$w_1 = -\frac{1}{a} w_2 - \frac{1}{a^2} \log(1 - a w_2). \quad (8.309)$$

Из физического требования — перевести  $(w_1, w_2)$  в  $(0, 0)$  за положительное время следует, что в уравнении (8.309)

$$w_2 \leq 0. \quad (8.310)$$

Если определить кривую  $\gamma_+$  соотношением

$$\gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{a} x_2 - \frac{1}{a^2} \log(1 - a x_2); x_2 \leq 0 \right\}, \quad (8.311)$$

то  $(w_1, w_2) \in \gamma_+$ .

Далее надо найти геометрическое место состояний  $(z_1, z_2)$ . Состояния  $(w_1, w_2)$  и  $(z_1, z_2)$  соединяет траектория  $T^0(z_1, z_2, w_1, w_2)$ . Подставив значения

$$\xi_1 = z_1; \xi_2 = z_2; x_1 = w_1; x_2 = w_2 \quad (8.312)$$

в уравнение (8.303), найдем

$$w_1 = z_1 + \frac{1}{a} (z_2 - w_2). \quad (8.313)$$

Подставляя уравнение (8.309) в соотношение (8.313), получим

$$z_1 = -\frac{z_2}{a} - \frac{1}{a^2} \log(1 - a w_2). \quad (8.314)$$

Если выразить  $\omega_2$  через  $z_2$ , то уравнение (8.314) даст уравнение геометрического места точек  $(z_1, z_2)$ . Чтобы получить это соотношение, воспользуемся тем, что гамильтониан вдоль оптимальной траектории равен нулю.

При  $t = t_1$  имеем

$$x_1(t_1) = z_1; x_2(t_1) = z_2; p_2(t_1) = +1; u(t_1) \leq 0. \quad (8.315)$$

Так как при  $t = t_1$  управление (8.306) переключается с  $u(t) = -1$  на  $u(t) = 0$ , то  $p_2(t_1) = +1$  согласно уравнениям (8.292) и (8.293). Подставим теперь уравнения (8.315) в (8.286).

При  $t = t_1$  получим

$$H|_{t=t_1} = 0 = k + z_2\pi_1 - az_2. \quad (8.316)$$

При  $t = t_2$  имеем

$$x_1(t_2) = \omega_1; x_2(t_2) = \omega_2; p_2(t_2) = -1; u(t_2) \geq 0. \quad (8.317)$$

Подставив уравнения (8.317) в (8.286), найдем

$$H|_{t=t_2} = 0 = k + \omega_2\pi_1 + a\omega_2. \quad (8.318)$$

Исключая  $\pi_1$  из уравнений (8.316) и (8.318), определим

$$\omega_2 = \frac{kz_2}{k - 2az_2}. \quad (8.319)$$

Заменяя в выражении (8.314)  $\omega_2$  соотношением (8.319), получим

$$z_1 = -\frac{z_2}{a} - \frac{1}{a^2} \log \left( 1 - \frac{akz_2}{k - 2az_2} \right). \quad (8.320)$$

Состояние  $(z_1, z_2)$  переводится в  $(\omega_1, \omega_2)$  в течение положительного времени, и поэтому в уравнении (8.320)

$$z_2 \leq 0. \quad (8.321)$$

Таким образом, если определить кривую  $\Gamma_k^+$  соотношением

$$\Gamma_k^+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{x_2}{a} - \frac{1}{a^2} \log \left( 1 - \frac{akx_2}{k - 2ax_2} \right); x_2 \leq 0 \right\}, \quad (8.322)$$

то  $(z_1, z_2)$  будет элементом из  $\Gamma_k^+$ , т. е.

$$(z_1, z_2) \in \Gamma_k^+. \quad (8.323)$$

Те же рассуждения можно повторить для исходных состояний  $(\xi'_1, \xi'_2)$ , для которых оптимальна управляющая последовательность  $\{+1; 0; -1\}$ . Если оптимальным является управление

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= +1 \text{ при } 0 \leq t < t'_1; \\ u(t) &= 0 \text{ при } t'_1 \leq t < t'_2; \\ u(t) &= -1 \text{ при } t'_2 \leq t \leq T, \end{aligned} \right\} \quad (8.324)$$

то, вводя обозначения

$$x_1(t'_1) = z'_1; x_2(t'_1) = z'_2; x_1(t'_2) = \omega'_1; x_2(t'_2) = \omega'_2, \quad (8.325)$$

можно найти, что геометрическое место состояний  $(\omega'_1, \omega'_2)$  определяется уравнением

$$\omega'_1 = -\frac{1}{a}\omega'_2 + \frac{1}{a^2} \log(1 + a\omega'_2), \quad (8.326)$$

где

$$\omega'_2 \geq 0, \quad (8.327)$$

а геометрическое место состояний  $(z'_1, z'_2)$  определяется уравнением

$$z'_1 = -\frac{z'_2}{a} + \frac{1}{a^2} \log \left( 1 + \frac{akz'_2}{k + 2az'_2} \right), \quad (8.328)$$

где  $z'_2 \geq 0$ .

$$(8.329)$$

Определим кривую  $\gamma_-$  соотношением

$$\gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{a} x_2 + \frac{1}{a^2} \log(1 + ax_2); x_2 \geq 0 \right\}, \quad (8.330)$$

а кривую  $\Gamma_k^-$  соотношением

$$\Gamma_k^- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{x_2}{a} + \frac{1}{a^2} \log \left( 1 + \frac{akx_2}{k + 2ax_2} \right); x_2 \geq 0 \right\}. \quad (8.331)$$

Тогда

$$(\omega'_1, \omega'_2) \in \gamma_-; \quad (8.332)$$

$$(z'_1, z'_2) \in \Gamma_k^-. \quad (8.333)$$

Определим линию переключения  $\gamma$  как

$$\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-. \quad (8.334)$$

Из уравнений (8.311) и (8.330) получим

$$\gamma = \{(x_1, x_2) : x_1 = f_1(x_2)\}, \quad (8.335)$$

где функция  $f_1(x_2)$  определяется соотношением

$$f_1(x_2) = -\frac{x_2}{a} + \text{sign}\{x_2\} \frac{1}{a^2} \log(1 + a|x_2|). \quad (8.336)$$

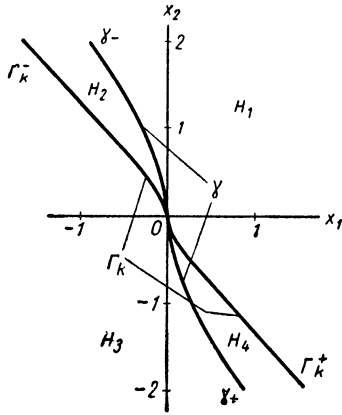


Рис. 8.21. Линии переключения  $\gamma_+ \cup \gamma_-$  и  $\Gamma_k^+ \cup \Gamma_k^-$  делят фазовую плоскость на области  $H_1, H_2, H_3$  и  $H_4$  ( $a = 1$ )

Определим линию переключения  $\Gamma_k$  отношением

$$\Gamma_k = \Gamma_k^+ \cup \Gamma_k^-. \quad (8.337)$$

Из уравнений (8.322) и (8.331) найдем

$$\Gamma_k = \{(x_1, x_2) : x_1 = f_2(x_2)\}, \quad (8.338)$$

где

$$f_2(x_2) = -\frac{x_2}{a} + \text{sign}\{x_2\} \frac{1}{a^2} \log \left( 1 + \frac{ak|x_2|}{k + 2a|x_2|} \right). \quad (8.339)$$

Кривые  $\gamma$  и  $\Gamma_k$  делят фазовую плоскость на четыре области  $H_1, H_2, H_3$  и  $H_4$ , показанные на рис. 8.21. Более точно эти области определяются следующим образом:

$$H_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq f_1(x_2) \text{ и } x_1 > f_2(x_2)\}; \quad (8.340)$$

$$H_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 < f_1(x_2) \text{ и } x_1 \geq f_2(x_2)\}; \quad (8.341)$$

$$H_3 = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq f_1(x_2) \text{ и } x_1 < f_2(x_2)\}; \quad (8.342)$$

$$H_4 = \{(x_1, x_2) : x_1 > f_1(x_2) \text{ и } x_1 \leq f_2(x_2)\}, \quad (8.343)$$

где  $f_1(x_2)$  и  $f_2(x_2)$  определяются соотношениями (8.336) и (8.339) соответственно. Область  $H_1$  включает кривую  $\gamma_-$ , область  $H_2$  — кривую  $\Gamma_k^-$ , область  $H_3$  — кривую  $\gamma_+$ , область  $H_4$  — кривую  $\Gamma_k^+$ .

**Закон управления 8.6 (решение задачи 8.6).** Оптимальное управление  $u^*$  как функция от состояния  $(x_1, x_2)$  определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in H_1; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in H_3; \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = 0 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in H_2 \cup H_4. \end{aligned} \right\} \quad (8.344)$$

Следовательно,  $u^*$  единственно.

**Доказательство.** Прежде всего убедимся, что оптимальное управление существует. Далее, пользуясь хорошо нам знакомым методом исключения, докажем, что управление (8.344) действительно оптимально.

Предположим, что исходным является состояние  $(x_1, x_2) \in \gamma_-$  (заметим, что  $\gamma_- \subset H_1$ ). С помощью рис. 8.17—8.19 «испробуем» каждую из управляющих последовательностей (8.298) и найдем, что только управляющая последовательность  $\{-1\}$  может перевести  $(x_1, x_2) \in \gamma_-$  в  $(0, 0)$  вдоль траектории  $\gamma_-$ . Таким образом, действуя методом исключения, устанавливаем: если  $(x_1, x_2) \in \gamma_-$ , то оптимально управление  $u(t) = -1$ .

Предположим теперь, что  $(x_1, x_2) \in H_1 - \gamma_-$ .

Снова с помощью рис. 8.17—8.19 «испытаем» каждую из управляющих последовательностей (8.298) и найдем, что только управляющая последовательность  $\{-1; 0; +1\}$  может перевести состояние  $(x_1, x_2) \in H_1 - \gamma_-$  в начало координат. Управление должно переключиться с  $u(t) = -1$  на  $u(t) = 0$  при пересечении траекторией кривой  $\Gamma_k$  (траектория пересекает участок кривой  $\Gamma_k^+$ ). При пересечении кривой  $\gamma$  (ее участка  $\gamma_+$ ) управление должно переключиться с  $u(t) = 0$  на  $u(t) = +1$ . Причина того, что переключения происходят на кривых  $\Gamma_k$  и  $\gamma$ , ясны из построения этих кривых.

Предположим, исходным является состояние  $(x_1, x_2) \in H_4$ . С помощью рис. 8.17—8.19 приходим к выводу, что состояние  $(x_1, x_2) \in H_4$  может быть переведено в  $(0, 0)$  либо управляющей последовательностью  $\{0, +1\}$ , либо последовательностью  $\{-1; 0; +1\}$ . Если  $(x_1, x_2) \in H_4$ , то последовательность  $\{-1; 0; +1\}$  не оптимальна, и поэтому (по методу исключения) должна быть оптимальна последовательность  $\{0; +1\}$ . Допустим, управляющая последовательность  $\{-1; 0; +1\}$  оптимальна. Тогда управление должно переключаться с  $u(t) = -1$  на  $u(t) = 0$  на кривой  $\Gamma_k^+$ . Но это, как мы покажем ниже, невозможно. Рассмотрим исходное состояние  $A = (\xi_1, \xi_2) \in H_4$ , показанное на рис. 8.22. Траектория  $ABO$  получается при помощи управляющей последовательности  $\{0; +1\}$ . Очевидно, траектория  $AB$  не пересекает кривой  $\Gamma_k^+$  (по построению). Если можно показать, что траектория  $T^-$ , получающаяся при управлении  $u(t) = -1$  и исходящая из  $A = (\xi_1, \xi_2)$ , не пересекает кривой  $\Gamma_k^+$ , то можно сделать вывод о неоптимальности управляющей последовательности  $\{-1; 0; +1\}$ .

Уравнение траектории  $AB$  [по формуле (8.303)] имеет вид

$$x_1 = \xi_1 + \frac{\xi_2}{a} - \frac{x_2}{a}. \quad (8.345)$$

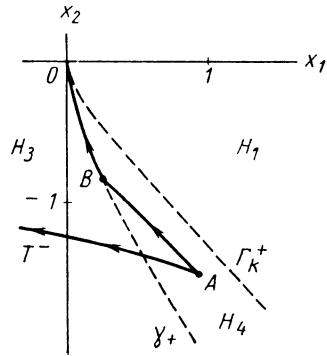


Рис. 8.22. Иллюстрация траекторий, используемых для доказательства закона управления 8.6

<sup>1</sup> Выражение  $H_1 - \gamma_-$  означает область  $H_1$  за исключением кривой  $\gamma_-$  (см. § 2.3).

Траектория  $T^-$ , исходящая из  $(\xi_1, \xi_2)$  и соответствующая управлению  $u(t) = -1$ , определяется соотношением [см. уравнение (8.305)]

$$x_1 = \xi_1 + \frac{\xi_2}{a} - \frac{1}{a} x_2 - \frac{1}{a^2} \log \frac{a\xi_2 + 1}{ax_2 + 1}. \quad (8.346)$$

Так как траектория «движется» в «положительном» времени, то можно показать, что

$$\frac{a\xi_2 + 1}{ax_2 + 1} > 1,$$

откуда следует

$$-\frac{1}{a^2} \log \frac{a\xi_2 + 1}{ax_2 + 1} < 0. \quad (8.347)$$

Из уравнений (8.346) и (8.347) получим

$$x_1 < \xi_1 + \frac{\xi_2}{a} - \frac{1}{a} x_2. \quad (8.348)$$

Из уравнений (8.348) и (8.345) следует, что траектория  $T^-$ , производимая управлением  $u(t) = -1$ , располагается слева от траектории  $AB$ . Так как прямая  $AB$  не пересекает кривой  $\Gamma_k^+$ , то и траектория  $T^-$  не пересекает кривой  $\Gamma_k^+$ , и поэтому управляющая последовательность  $\{-1; 0; +1\}$  не оптимальна. Аналогичным образом можно доказать закон управления 8.6 и для исходных состояний из  $H_2 \cup H_3$ .

Рассмотрим поведение оптимальной системы при  $k \rightarrow 0$  и  $k \rightarrow \infty$ . Кривая  $\gamma$  не зависит от  $k$ , так как функция  $f_1(x_2)$  (8.336) не зависит от  $k$ . Однако кривая  $\Gamma_k$  зависит от  $k$ , потому что  $k$  входит в выражение (8.339) функции  $f_2(x_2)$ . Итак, имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_2(x_2) = -\frac{x_2}{a} + \text{sign}\{x_2\} \frac{1}{a^2} \log(1 + a|x_2|) = f_1(x_2); \quad (8.349)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_2(x_2) = -\frac{x_2}{a}. \quad (8.350)$$

Уравнение (8.349) означает, что при  $k \rightarrow \infty$  кривая  $\Gamma_k$  переходит в кривую  $\gamma$ . Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k = \gamma; \quad (8.351)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_2 \cup H_4 = \emptyset \text{ (пустое множество)}, \quad (8.352)$$

поэтому при  $k \rightarrow \infty$  закон управления 8.6 превращается в закон оптимального по быстродействию управления системой (8.284) (сравните с упражнением 7.32).

При  $k \rightarrow 0$  кривая  $\Gamma_k$  превращается в прямую

$$x_1 = -\frac{x_2}{a}. \quad (8.353)$$

Так как при малых  $k$  функционал  $J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt$  оценивает («взвешивает») в основном затраты топлива, то при  $k \rightarrow 0$  получаем систему, оптимальную по расходу топлива, причем никаких ограничений на время перехода не накладывается. На рис. 8.23 показано деление фазовой плоскости на области  $H_1, H_2, H_3$  и  $H_4$  при  $k = 0$  и некоторые из оптимальных по расходу топлива траекторий. Если исходное состояние принадлежит области  $H_1$ , то управление  $u = -1$  прикладывается до тех пор, пока тра-

ектория не достигнет кривой  $\Gamma_k$  ( $k = 0$ ), которая сама по себе является траекторией к началу координат (см. рис. 8.17). Время перехода в начало координат вдоль нее бесконечно велико, но время, требующееся на то, чтобы достигнуть сколь угодно малой окрестности начала координат, конечно <sup>1</sup>.

На рис. 8.24 показана практическая реализация закона управления 8.6. Сигнал  $x_2$  прикладывается к нелинейностям  $N_1$  и  $N_2$ . Нелинейность  $N_1$  соответствует кривой  $\gamma$ , и на ее выходе получается сигнал  $f_1(x_2)$  в соответствии с соотношением (8.336). Нелинейность  $N_2$  имеет характеристику, соответствующую кривой  $f_2(x_2)$ , ее выходной сигнал  $f_2(x_2)$  выражается уравнением (8.339). Из уравнений (8.340) и (8.343) заключаем:

$$\left. \begin{aligned} a > 0 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in H_1 \cup H_4; \\ a < 0 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in H_2 \cup H_3; \\ b > 0 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in H_1 \cup H_2; \\ b < 0 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in H_3 \cup H_4. \end{aligned} \right\} (8.354)$$

Сигналы  $a$  и  $b$  подаются на реле  $R_1$  и  $R_2$ , на выходах которых получаются сигналы  $\text{sign}\{a\}$  и  $\text{sign}\{b\}$  соответственно. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} -\text{sign}\{a\} - \text{sign}\{b\} = +2 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in H_3; \\ -\text{sign}\{a\} - \text{sign}\{b\} = -2 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in H_1; \\ -\text{sign}\{a\} - \text{sign}\{b\} = 0 & \text{ означает } (x_1, x_2) \in H_2 \cup H_4. \end{aligned} \right\} (8.355)$$

Нелинейный элемент  $R_D$  «вырабатывает» оптимальное управление в соответствии с законом управления 8.6.

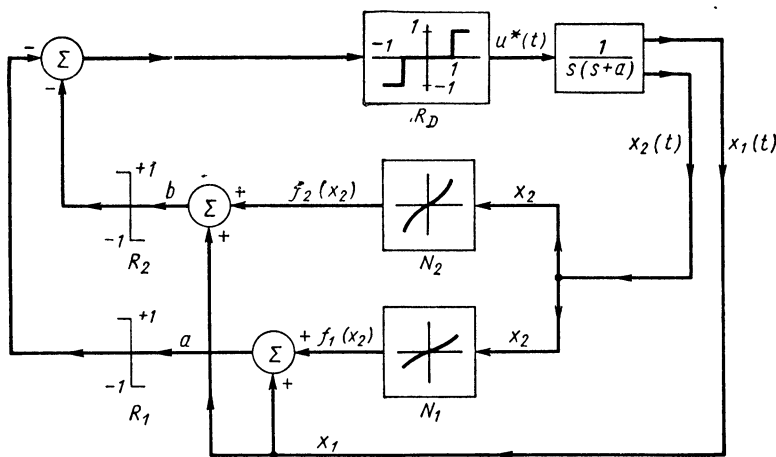


Рис. 8.24. Реализация закона управления 8.6

Заметим, что при  $k \rightarrow \infty$  наклон характеристики  $N_2$  стремится к нулю, а нелинейность  $N_1$  остается без изменений. Система, показанная на

<sup>1</sup> Строго говоря, это означает, что оптимального по расходу топлива управления не существует. Однако существует  $\varepsilon$ -оптимальное управление.

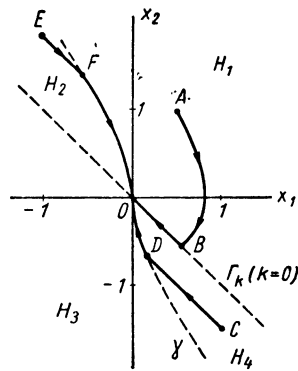


Рис. 8.23. Поведение линий переключения при  $k \rightarrow 0$  и  $a = 1$  (случай оптимального по топливу управления без ограничений времени перехода). Траектории  $ABO$  и  $CDO$  являются оптимальными по топливу траекториями к началу координат



рис. 8.24, превращается в систему, оптимальную по быстродействию. При  $k \rightarrow 0$  нелинейность  $N_2$  превращается в линейный «усилитель» (с коэффициентом усиления  $-\frac{1}{a}$ ), и система, показанная на рис. 8.24, превращается в систему, оптимальную по расходу топлива, без ограничений на время перехода.

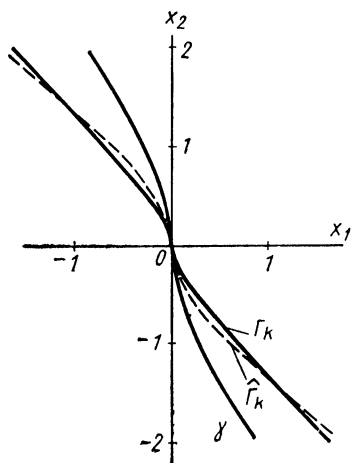


Рис. 8.25. Аппроксимация линии переключения  $\Gamma_k$  кривой  $\hat{\Gamma}_k$

Сравнивая рис. 8.24 с рис. 8.13 (который изображает реализацию законов управления 8.4 и 8.5 для объекта с двойным интегрированием), заметим что для системы рис. 8.24 требуются две нелинейности, а для системы рис. 8.13 одна<sup>1</sup>.

Можно спроектировать субоптимальную систему, используя только одну нелинейность  $N_1$  (см. рис. 8.24). Кривую  $\Gamma_k$  (см. рис. 8.21) можно аппроксимировать кривой  $\hat{\Gamma}_k$ , имеющей то же уравнение, что и кривая  $\gamma$ . Кривая  $\gamma$  определяется выражением

$$\gamma = \{(x_1, x_2) : x_1 = f_1(x_2)\}, \quad (8.356)$$

где  $f_1(x_2)$  — функция (8.336).

Определим новую кривую  $\hat{\Gamma}_k$  как

$$\hat{\Gamma}_k = \{(x_1, x_2) : x_1 = \lambda f_1(x_2); \lambda > 1\}. \quad (8.357)$$

Коэффициент  $\lambda$  можно выбрать таким образом, чтобы кривая  $\hat{\Gamma}_k$  была «близка»<sup>2</sup> к кривой  $\Gamma_k$ . На рис. 8.25 показаны кривые  $\gamma$  и  $\Gamma_k$  при  $a = 1$  и  $k = 1$ , а также кривая  $\hat{\Gamma}_k$  при  $\lambda = 2$ . Если использовать в качестве линий переключения кривые  $\gamma$  и  $\hat{\Gamma}_k$ , то система, показанная на рис. 8.26,

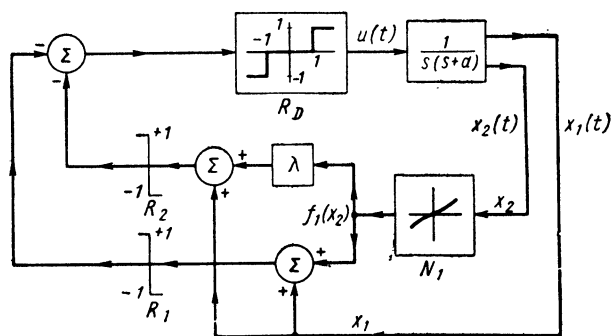


Рис. 8.26. Реализация субоптимального закона управления, полученного заменой кривой  $\Gamma_k$  на кривую  $\hat{\Gamma}_k$

будет близка к оптимальной. Ее отличие от системы рис. 8.24 состоит в том, что в ней используется только одна нелинейность для получения кривых  $\gamma$  и  $\hat{\Gamma}_k$ .

<sup>1</sup> Причина в том, что уравнения кривых  $\gamma_B$  на рис. 8.12 и  $\Gamma_k$  на рис. 8.16 похожи по своему виду на уравнение кривой  $\gamma$ .

<sup>2</sup> Термин «близка» употреблен в практическом смысле, без претензий на математическую строгость.

Выбор коэффициента  $\lambda$  осуществляется, естественно, на основании дополнительной информации. Если, например, с очень большой вероятностью исходное состояние  $(\xi_1, \xi_2)$  удовлетворяет соотношению

$$-\Gamma \leq \xi_2 \leq \Gamma, \quad (8.358)$$

то надо аппроксимировать кривую  $\Gamma_k$  только на участке  $-\Gamma \leq x_2 \leq \Gamma$ . Аппроксимация кривой  $\Gamma_k$  с помощью  $\hat{\Gamma}_k$  тем лучше, чем больше величина  $k$ . Если кривая  $\hat{\Gamma}_k$  располагается между кривыми  $\gamma$  и  $\Gamma_k$ , то субоптимальная система требует меньше времени и больше топлива, чем оптимальная (почему?). Если же кривая  $\hat{\Gamma}_k$  целиком располагается в области  $H_1 \cup H_3$ , то субоптимальная система требует меньше топлива, но больше времени, чем оптимальная (почему?).

Эти замечания относительно проектирования субоптимальной системы иллюстрируют, по нашему мнению, полезность получения оптимального устройства и на его основе — проектирования субоптимального, которое может оказаться более привлекательным с практической точки зрения.

**Упражнение 8.30.** Рассмотрите аппроксимирующую кривую  $\hat{\Gamma}_k$ , показанную на рис. 8.25 ( $a = 1, k = 1, \lambda = 2$ ), и исходное состояние  $(2, \xi_2)$ ,  $-3 \leq \xi_2 \leq 3$ . Постройте в функции от  $\xi_2$  следующие графики отношений:

а) времени перехода для субоптимальной системы и времени перехода для оптимальной системы;

б) потребляемых количеств топлива;

в) стоимостей  $\int_0^T [1 + |u(t)|] dt$ .

**Упражнение 8.31.** Рассмотрите систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t); |u(t)| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.359)$$

и функционал  $F = \int_0^T |u(t)| dt$ . Считайте  $T$  заданным. Найдите оптимальный по расходу

топлива закон управления. Обсудите существование и единственность. Сравните с результатами, полученными при  $k \rightarrow 0$  (см. рис. 8.23).

**Упражнение 8.32.** Повторите упражнение 8.31, считая  $T$  ограниченным сверху величиной  $\hat{T}_f$ . Найдите оптимальное по расходу топлива управление как функцию от исходного состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  и заданного времени перехода  $\hat{T}_f$ .

**Упражнение 8.33.** Предложите другие аппроксимации кривой и обсудите получившиеся субоптимальные системы.

## 8.10. МИНИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВРЕМЕНИ И РАСХОДА ТОПЛИВА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА<sup>1</sup>

В § 8.9 была изучена задача о движении материальной точки при наличии «линейного» трения. В этом параграфе рассмотрим задачу об управлении движущейся материальной точкой в случае сил трения, меняющихся по нелинейному закону, пользуясь тем же функционалом, что и в § 8.8 и 8.9.

Мы покажем, что многократное применение и логическая интерпретация необходимых условий, даваемых принципом минимума, позволяют выразить оптимальное управление в функции от состояния с помощью одних только графических методов. Надеемся, что способы, применяемые при решении данной задачи, хорошо иллюстрируют как пошаговую про-

<sup>1</sup> См. работу [14].

педуру использования необходимых условий, так и возможность руководствоваться лишь «видом» функций вместо их уравнений.

Предположим, единичная масса движется в таких условиях, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости. Обозначим через  $y(t)$  положение, а через  $u(t)$  — управляющую тягу в момент времени  $t$ . Будем считать, что

$$|u(t)| \leq 1, \quad (8.360)$$

а также, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости  $\dot{y}(t)$  и направлена противоположно ей. В этом случае движение единичной массы подчиняется дифференциальному уравнению

$$\ddot{y}(t) = -a\dot{y}(t)|\dot{y}(t)| + u(t), \quad (8.361)$$

где коэффициент трения

$$a > 0. \quad (8.362)$$

Включение множителя  $|\dot{y}(t)|$  в силу сопротивления  $a\dot{y}(t)|\dot{y}(t)|$  гарантирует, что последняя всегда направлена противоположно скорости. Обозначив через  $y_d$  желаемое положение, введем, как и выше, фазовые координаты

$$x_1(t) = y(t) - y_d; \quad x_2(t) = \dot{y}(t). \quad (8.363)$$

**Задача 8.7.** Дана система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -ax_2(t)|x_2(t)| + u(t); \quad |u(t)| \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (8.364)$$

Найти управление, переводящее систему (8.364) из любого исходного состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$  и минимизирующее при этом функционал

$$J(u) = J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt, \quad (8.365)$$

где

$$k > 0 \quad (8.366)$$

и время перехода  $T$  не задано.

В § 7.11 мы рассматривали оптимальное по быстродействию управление нелинейной системой второго порядка и получили закон управления системой (8.364), показанный на рис. 7.68 (при  $a = 1$ ). В § 7.11 отмечалось, что оптимальное по быстродействию управление нелинейными системами второго порядка в основном не отличается от оптимального по быстродействию управления линейными системами второго порядка. Изучение оптимального управления нелинейной системой (8.364) по отношению к стоимости (8.365) должно показать, существуют ли отличия между линейными и нелинейными системами в случае, когда расход топлива входит в функционал. Как будет показано, различие действительно существует, и мы обнаружим это, доказав, что вырожденные управления могут быть оптимальными.

Для получения необходимых условий оптимального управления воспользуемся принципом минимума. Гамильтониан  $H$  для системы (8.364) со стоимостью (8.365) имеет вид

$$\begin{aligned} H = k + |u(t)| + x_2(t)p_1(t) - ax_2(t)|x_2(t)|p_2(t) + \\ + u(t)p_2(t). \end{aligned} \quad (8.367)$$

Дополнительные переменные  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = 0; \quad (8.368)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -p_1(t) + 2a|x_2(t)|p_2(t). \quad (8.369)$$

Примем, что

$$\pi_1 = p_1(0); \quad \pi_2 = p_2(0), \quad (8.370)$$

и получим уравнения

$$p_1(t) = \pi_1 = \text{const}; \quad (8.371)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\pi_1 + 2a|x_2(t)|p_2(t). \quad (8.372)$$

Управление, абсолютно минимизирующее гамильтониан и удовлетворяющее ограничению  $|u(t)| \leq 1$ , равно

$$u(t) = 0, \quad \text{если } |p_2(t)| < 1; \quad (8.373)$$

$$u(t) = -\text{sign}\{p_2(t)\}, \quad \text{если } |p_2(t)| > 1; \quad (8.374)$$

$$0 \leq u(t) \leq +1, \quad \text{если } p_2(t) = -1; \quad (8.375)$$

$$-1 \leq u(t) \leq 0, \quad \text{если } p_2(t) = +1. \quad (8.376)$$

Покажем, что если в функционале (8.365)  $k \leq 1$ , то для данной задачи существуют вырожденные экстремальные управления. Для этого<sup>1</sup> предположим, что  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  и

$$p_2(t) = +1 \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.377)$$

Отсюда следует:

$$\dot{p}_2(t) = 0 \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.378)$$

Подставляя выражения (8.377) и (8.378) в уравнение (8.372), получим

$$\pi_1 = 2a|x_2(t)| \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.379)$$

Так как  $\pi_1$  и  $a$  — константы, это означает, что

$$x_2(t) = \text{const} \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.380)$$

Может возникнуть подозрение, не является ли  $x_2(t)$  кусочно-постоянной функцией, например

$$\left. \begin{aligned} x_2(t) &= \frac{\pi_1}{2a}; \quad t_1 \leq t < t_2; \\ x_2(t) &= -\frac{\pi_1}{2a}; \quad t_3 \leq t < t_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.381)$$

такой, что уравнение (8.379) удовлетворяется. Это невозможно, так как  $x_2(t)$  — фазовая координата и, следовательно, непрерывная функция времени<sup>2</sup>. Таким образом,  $x_2(t) = \text{const}$ . Из уравнения (8.379) также следует

$$\pi_1 > 0. \quad (8.382)$$

Но так как  $x_2(t) = \text{const}$  при любом  $t \in [t_1, t_2]$ , то

$$\dot{x}_2(t) = 0 \text{ при любом } t \in [t_1, t_2], \quad (8.383)$$

поэтому из уравнения (8.364) получим

$$u(t) = ax_2(t)|x_2(t)| \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.384)$$

<sup>1</sup> Советуем читателю вернуться к материалу § 6.21 и 6.22.

<sup>2</sup> См. § 4.5, аксиома 4.3.

Так как  $x_2(t) = \text{const}$ , из уравнения (8.384) следует

$$u(t) = \text{const} \text{ при любом } t \in [t_1, t_2] \quad (8.385)$$

Мы начали с уравнения (8.377) и с предположения, что  $p_2(t) = +1$  при любом  $t \in [t_1, t_2]$ , а затем, следуя от уравнения (8.378) к (8.385), пришли к выводу, что управление  $u(t)$  должно быть постоянным при любом  $t \in [t_1, t_2]$ . Если это постоянное управление оптимально, то оно должно удовлетворять необходимым условиям принципа минимума. Одно из требований состоит в том, что оптимальное управление должно минимизировать гамильтониан. Это условие выражается уравнением (8.376). Итак, на основании уравнений (8.376) и (8.385)

$$-1 \leq u(t) = \text{const} \leq 0 \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.386)$$

Другое необходимое условие состоит в том, что гамильтониан (8.367) должен быть тождественно равен нулю при любом  $t \in [0, T]$ <sup>1)</sup> и, следовательно, при любом  $t \in [t_1, t_2]$ . Подставляя уравнения (8.377), (8.379) и (8.384) в уравнение (8.367), получим, что при любом  $t \in [t_1, t_2]$  должно выполняться равенство

$$H = 0 = k + |u(t)| + 2ax_2(t)|x_2(t)| - \\ - ax_2(t)|x_2(t)| + u(t). \quad (8.387)$$

Так как  $u(t)$  отрицательно, то, очевидно,

$$|u(t)| + u(t) = 0 \text{ при любом } t \in [t_1, t_2], \quad (8.388)$$

поэтому из уравнения (8.387) получим

$$-ax_2(t)|x_2(t)| = k \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.389)$$

Из уравнения (8.384) находим, что

$$u(t) = -k \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.390)$$

Итак, постоянное управление  $u(t) = -k$  удовлетворяет условиям<sup>2)</sup>, вытекающим из принципа минимума, и поэтому может быть оптимально, если  $|u(t)| \leq 1$ ; очевидно, что для этого должно быть

$$k \leq 1. \quad (8.391)$$

Из уравнения (8.390) получим также

$$x_2(t) = -\sqrt{\frac{k}{a}}. \quad (8.392)$$

Аналогичные рассуждения можно повторить и для  $p_2(t) = -1$  при любом  $t \in [t_1, t_2]$  и прийти к выводу, что управление  $u(t) = k$  при любом  $t \in [t_1, t_2]$  может быть оптимальным. Таким образом, мы доказали следующую лемму.

**Лемма 8.21.** Если

$$k \leq 1 \quad (8.393)$$

и

$$|p_2(t)| = 1 \text{ при любом } t \in [t_1, t_2], \quad (8.394)$$

то вырожденное управление

$$u(t) = -k \text{ sign } \{p_2(t)\} \text{ при любом } t \in [t_1, t_2] \quad (8.395)$$

может быть оптимальным. В этом случае

$$\pi_1 = 2\sqrt{ka} \text{ sign } \{p_2(t)\} \quad (8.396)$$

<sup>1)</sup> Так как система (8.364) и подынтегральная функция  $k + |u(t)|$  инвариантны во времени, а время перехода не задано.

<sup>2)</sup> Мы еще не убедились в том, что это управление удовлетворяет граничным условиям.

и

$$x_2(t) = - \sqrt{\frac{k}{a}} \operatorname{sign} \{p_2(t)\}. \quad (8.397)$$

В дальнейшем будем полагать, что  $k \leq 1$ .

Так как оптимальными могут быть управления  $u(t) = +1$ ,  $u(t) = -1$ ,  $u(t) = 0$ ,  $u(t) = k$  и  $u(t) = -k$ , полезно рассмотреть траектории си-

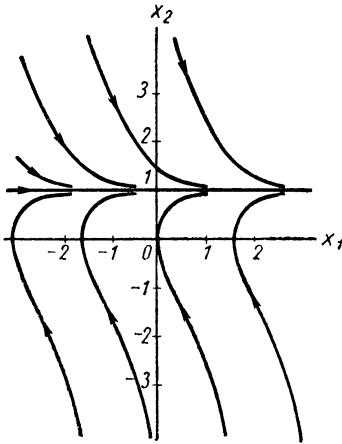


Рис. 8.27. Траектории системы (8.364) при  $u(t) = +1$  и  $a = 1$

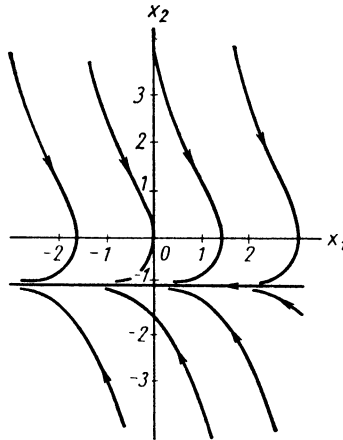


Рис. 8.28. Траектории системы (8.364) при  $u(t) = -1$  и  $a = 1$

стемы (8.364) на фазовой плоскости, соответствующие этим управлениям. На рис. 8.27—8.30 показаны траектории системы. Все траектории строились графически<sup>1</sup> для  $a = 1$ .

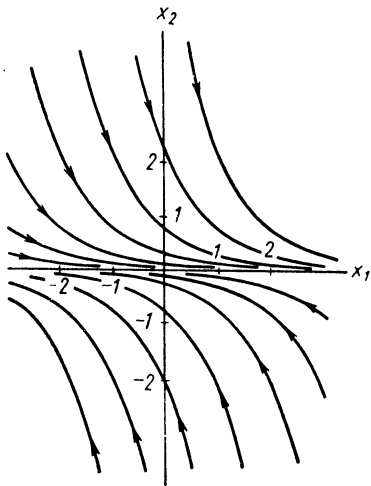


Рис. 8.29. Траектории системы (8.364) при  $u(t) = 0$  и  $a = 1$

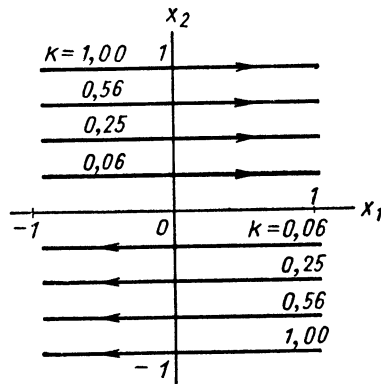


Рис. 8.30. Траектории системы (8.364) при  $u(t) = \pm k$  и  $a = 1$ . Траектории, соответствующие  $u = k$ , расположены в верхней полуплоскости ( $x_2 > 0$ ), а при  $u = -k$  — в нижней полуплоскости ( $x_2 \leq 0$ )

Интересно сравнить траектории на фазовой плоскости этой системы с нелинейным трением с траекториями системы, рассмотренной в § 8.9.

<sup>1</sup> Из уравнения (8.364) следует, что  $\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{-ax_2|x_2| + u}$ , и поэтому наклон траекторий известен.

Из сравнения рис. 8.27 с рис. 8.18 видно, что траектории этих двух систем похожи друг на друга и лишь незначительно отличаются по виду. Однако сравнение рис. 8.29 с рис. 8.17 обнаруживает существенные различия характеристик двух систем.

Так как  $H$ -минимальное управление  $u(t)$  является нелинейной функцией дополнительной переменной  $p_2(t)$ , желательно получить как можно больше информации относительно  $p_2(t)$ . Для этого докажем следующую лемму.

**Лемма 8.22.** Функция  $p_2(t)$  непрерывна при всех  $t \in [0, T]$  и может обращаться в нуль не более одного раза.

**Доказательство.** Функция  $p_2(t)$  является решением дифференциального уравнения (8.372), и поэтому  $p_2(t)$  является непрерывной функцией времени. Доказательство того, что  $p_2(t)$  обращается в нуль не более одного раза, приводится в § 7.11 и поэтому опущено.

**Лемма 8.23.** Оптимальная управляющая последовательность к началу координат должна иметь вид  $\{ \dots; +1 \}$  или  $\{ \dots; -1 \}$ . Иначе говоря, оптимальное управление при  $t = T$  должно быть равно  $u(T) = +1$  или  $u(T) = -1$  (если оно существует).

**Доказательство.** Управляющая последовательность  $\{ \dots; 0 \}$  не может быть оптимальна, так как подстановка  $u(T) = x_1(T) = x_2(T) = 0$  в уравнение (8.367) дает  $H = k > 0$ . Управляющая последовательность  $\{ \dots; +k \}$  не может быть оптимальна, так как подстановка  $p_2(T) = -1$ ,  $u(T) = k$ ,  $x_1(T) = x_2(T) = 0$  в уравнение (8.367) дает  $H = k > 0$ . Управляющая последовательность  $\{ \dots; -k \}$  не может быть оптимальна, так как подстановка  $p_2(T) = +1$ ,  $u(T) = -k$ ,  $x_1(T) = x_2(T) = 0$  в уравнение (8.367) дает  $H = k > 0$ . Лемма доказана методом исключения.

Существует другой путь доказательства леммы 8.23, основанный на виде траекторий, а также на том, что при  $k > 0$  время перехода должно быть конечно. Из рис. 8.29 и 8.30 видно, что траектории, соответствующие управлению  $u = 0$  и  $u = \pm k$ , не попадают в начало координат. В начало координат попадают лишь две траектории, соответствующие  $u = +1$  и  $u = -1$  (см. рис. 8.27 и 8.28).

**Упражнение 8.34.** Покажите, что если  $u(T) = +1$ , то  $p_2(T) = -1 - k$ , и если  $u(T) = -1$ , то  $p_2(T) = 1 + k$ .

Опишем путь дальнейших рассуждений. Как и в § 8.9, мы формулируем определения различных траекторий, получающихся при различных постоянных управлениях. После этого приведем ряд лемм, выделяющих управляющие последовательности, которые могут быть оптимальными. Доказательство некоторых из лемм «конструктивно» в том смысле, что мы определим различные линии переключения через входящие в них величины.

С помощью ряда лемм докажем, что экстремальные управления единственны. После этого мы окажемся в состоянии доказать закон управления 8.7.

**Определение 8.7.** Обозначим через  $T^+(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$  траекторию, исходящую из  $(\xi_1, \xi_2)$ , производимую управлением  $u(t) = +1$  и проходящую через состояние (точку)  $(x_1, x_2)$ . В силу того, что время положительно, имеем (см. рис. 8.27)

$$\left| \xi_2 - \sqrt{\frac{1}{a}} \right| > \left| x_2 - \sqrt{\frac{1}{a}} \right|. \quad (8.398)$$

Все траектории  $T^+$  асимптотически стремятся (при  $t \rightarrow \infty$ ) к прямой  $x_2 = + \sqrt{\frac{1}{a}}$ . Обозначим через  $T^-(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$  траекторию, исходящую

из  $(\xi_1, \xi_2)$ , производимую управлением  $u(t) = -1$  и проходящую через состояние  $(x_1, x_2)$ . Из-за положительности времени имеем (см. рис. 8.28)

$$\left| \xi_2 + \sqrt{\frac{1}{a}} \right| > \left| x_2 + \sqrt{\frac{1}{a}} \right|. \quad (8.399)$$

Все траектории  $T^-$  асимптотически стремятся (при  $t \rightarrow \infty$ ) к прямой  $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{a}}$ . Обозначим через  $T^0(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$  траекторию, исходящую из  $(\xi_1, \xi_2)$ , производимую управлением  $u(t) = 0$  и проходящую через состояние  $(x_1, x_2)$ . Из-за положительности времени (см. рис. 8.29) имеем

$$|\xi_2| > |x_2|. \quad (8.400)$$

Обозначим через  $T_s^+(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$  траекторию, исходящую из  $(\xi_1, \xi_2)$  и производимую вырожденным управлением  $u(t) = +k$ ,  $0 < k \leq 1$  (см. рис. 8.30). На основании леммы 8.21 и положительности времени имеем

$$\xi_2 = x_2 = \sqrt{\frac{k}{a}}. \quad (8.401)$$

Обозначим через  $T_s^-(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$  траекторию, исходящую из  $(\xi_1, \xi_2)$  и производимую вырожденным управлением  $u(t) = -k$  (см. рис. 8.30). На основании леммы 8.21 и положительности времени имеем

$$\xi_2 = x_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}}. \quad (8.402)$$

**Определение 8.8.** Обозначим через  $\gamma_+$  ( $\gamma_-$ ) множество состояний  $(x_1, x_2)$ , которые могут быть переведены в  $(0, 0)$  управлением  $u(t) = +1$  ( $u(t) = -1$ ) за положительное время:

$$\gamma_+ = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in T^+(x_1, x_2, 0, 0), x_1 > 0, x_2 < 0\}; \quad (8.403)$$

$$\gamma_- = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in T^-(x_1, x_2, 0, 0), x_1 < 0, x_2 > 0\}. \quad (8.404)$$

Пусть

$$\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-. \quad (8.405)$$

Кривые  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  показаны на рис. 8.31. Как показано на рис. 8.31,  $S_R$  — множество состояний справа от кривой  $\gamma$ , а  $S_L$  — множество состояний слева от кривой  $\gamma$ ;

$$S_R = \{(x_1, x_2) : x_1 > x_1', \text{ если } (x_1', x_2) \in \gamma\}; \quad (8.406)$$

$$S_L = \{(x_1, x_2) : x_1 < x_1', \text{ если } (x_1', x_2) \in \gamma\}. \quad (8.407)$$

Рассмотрим теперь управляющие последовательности вида  $\{ \dots; +1 \}$ .

**Лемма 8.24.** Управляющие последовательности вида  $\{ \dots; -1; +1 \}$ ,  $\{ \dots; -k; +1 \}$  и  $\{ \dots; +k; +1 \}$  не могут быть оптимальны, и поэтому должна быть оптимальна управляющая последовательность  $\{ \dots; 0; +1 \}$ .

**Доказательство.** Допустим, что оптимальна либо  $\{ \dots; -1; +1 \}$ , либо  $\{ \dots; -k; +1 \}$ , и пусть управление переключается с  $u = -1$  или с  $u = -k$  на  $u = +1$  при  $t = t_1$ . Тогда  $p_2(t_1) = -1$  и  $p_2(t_1-) = +1$  [см. уравнения (8.374) и (8.376)]. Следовательно, при  $t = t_1$  имеет место разрыв  $p_2(t)$ , что противоречит лемме 8.22. Управляющая последовательность  $\{ \dots; k; +1 \}$  не может быть оптимальна, так как траектории  $T_s^+(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2)$ , производимые управлением  $u(t) = +k$ , расположены в верхней половине фазовой плоскости, а кривая  $\gamma_+$  — в нижней (см. рис. 8.30 и 8.31).

**Лемма 8.25.** Если

$$\pi_1 = 2\sqrt{ka}, \quad (8.408)$$



то управляющая последовательность  $\{0; -k; 0; +1\}$  может быть оптимальной, а  $\{. . .; -1; 0; -k; 0; +1\}$  — нет.

**Доказательство** выполним графически. На рис. 8.32 показан вид функции  $p_2(t)$ , которой соответствует управляющая последовательность  $\{0; -k; 0; +1\}$ . Пунктирное продолжение  $p_2(t)$  требуется для получения последовательности  $\{. . .; -1; 0; -k; 0; +1\}$ . Пусть

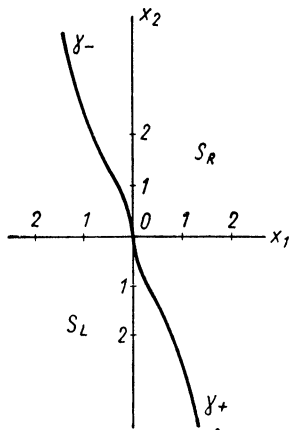


Рис. 8.31. Кривые  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  ( $a=1$ ) и области  $S_R$  и  $S_L$

$$\left. \begin{aligned} x_1(t_5) &= \omega_1; & x_2(t_5) &= \omega_2; \\ x_1(t_4) &= s_1; & x_2(t_4) &= s_2; \\ x_1(t_3) &= z_1; & x_2(t_3) &= z_2; \\ x_1(t_0) &= r_1; & x_2(t_0) &= r_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.409)$$

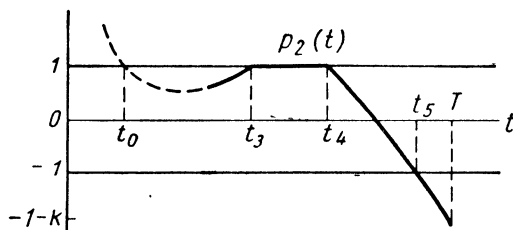


Рис. 8.32. Вид функции  $p_2(t)$ , которой соответствует управляющая последовательность  $\{. . ., -1, 0, -k; 0; +1\}$ . Участок  $p_2(t)$ , показанный сплошной линией, дает управляющую последовательность  $\{0, -k, 0, +1\}$

Очевидно, что  $(\omega_1, \omega_2) \in \gamma_+$ , (8.410)

и поэтому  $\omega_2 \leq 0$ . (8.411)

Но  $p_2(t_5) = -1$ , и так как  $\pi_1 = 2\sqrt{ka}$ , то условие  $H = 0$  дает

$$H = 0 = k + 2\sqrt{ka}\omega_2 - a\omega_2^2. \quad (8.412)$$

Решив уравнение (8.412) относительно  $\omega_2$ , получим

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{a}}(1 \pm \sqrt{2}). \quad (8.413)$$

Так как  $\omega_2 \leq 0$ , то

$$\omega_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}}(\sqrt{2} - 1). \quad (8.414)$$

Тем самым точка  $(\omega_1, \omega_2)$  полностью определена, поскольку она представляет собой пересечение кривой  $\gamma_+$  и прямой  $x_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}}(\sqrt{2} - 1)$ .

Так как при  $t = t_4$  состояние равно  $(s_1, s_2)$  и  $u(t) = 0$  при любом  $t \in [t_4, t_5]$ , то существует траектория  $T^0(s_1, s_2, \omega_1, \omega_2)$ , соединяющая  $(s_1, s_2)$  с  $(\omega_1, \omega_2)$ . Из уравнения (8.400) и условия  $\omega_2 \leq 0$  получим соотношение

$$s_2 \leq \omega_2 \leq 0. \quad (8.415)$$

При  $t = t_4$  и  $p_2(t_4) = +1$  условие  $H = 0$  дает уравнение

$$H = 0 = k + 2\sqrt{ka}s_2 + as_2^2. \quad (8.416)$$

Решая уравнение (8.416) относительно  $s_2$ , находим

$$s_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}}. \quad (8.417)$$

Точка  $(s_1, s_2)$  полностью определена, поскольку она является пересечением траектории  $T^0(s_1, s_2, \omega_1, \omega_2)$  и прямой  $x_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}}$ .

В течение временного интервала  $t_3 \leq t \leq t_4$  управление вырождено, т. е.  $u = -k$ , и поэтому траектория проходит вдоль прямой  $x_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}}$

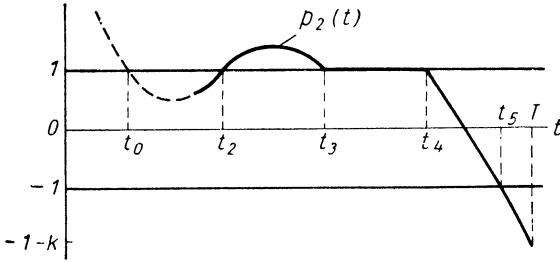


Рис. 8.33. Вид функции  $p_2(t)$ , которому соответствует управляющая последовательность  $\{\dots, -1, 0, -1, -k, 0, +1\}$ . Участок  $p_2(t)$ , показанный сплошной линией, дает управляющую последовательность  $\{0; -1; -k; 0; +1\}$

до точки  $(s_1, s_2)$ . Итак, точки  $(z_1, z_2)$  и  $(s_1, s_2)$  соединены траекторией  $T_s^-(z_1, z_2, s_1, s_2)$ , и поэтому [из уравнения (8.402)] получим

$$z_2 = s_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}} < 0; \quad z_1 > s_1 > 0. \quad (8.418)$$

Допустим, что оптимальна управляющая последовательность  $\{\dots; -1; 0; -k; 0; +1\}$ . Тогда (см. рис. 8.32) найдется такой момент времени  $t_0 < t_3$ , что  $p_2(t_0) = 1$ ,  $\dot{p}_2(t_0) < 0$ , и состояние системы будет  $(v_1, v_2)$ . Состояние  $(v_1, v_2)$  должно переводиться в  $(z_1, z_2)$  по траектории  $T^0(v_1, v_2, z_1, z_2)$ . Из уравнений (8.418) и (8.400) следует, что

$$v_2 < z_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}} < 0. \quad (8.419)$$

При  $t = t_0$ ,  $\pi_1 = 2\sqrt{ka}$ ,  $p_2(t_0) = +1$ ,  $x_2(t_0) = v_2 < 0$  имеем

$$\dot{p}_2(t_0) = -2\sqrt{ka} - 2av_2. \quad (8.420)$$

Так как  $\dot{p}_2(t_0) < 0$  (см. рис. 8.32), из уравнения (8.420) получим

$$v_2 > -\sqrt{\frac{k}{a}}. \quad (8.421)$$

Соотношения (8.419) и (8.421) противоречат друг другу. Следовательно, последовательность  $\{\dots; -1; 0; -k; 0; +1\}$  не может быть оптимальна. Оптимальной может быть последовательность  $\{0; -k; 0; +1\}$ .

**Лемма 8.26.** Если

$$\pi_1 = 2\sqrt{ka}, \quad (8.422)$$

то последовательность  $\{0; -1; -k; 0; +1\}$  может быть оптимальной, а последовательность  $\{\dots; -1; 0; -1; -k; 0; +1\}$  — нет.

**Доказательство выполним** графически. На рис. 8.33 показан вид функции  $p_2(t)$ , дающей управляющую последовательность  $\{0; -1; -k;$

0; +1}. Пунктирный отрезок  $p_2(t)$  дает управляющую последовательность  $\{ \dots; -1; 0; -1; -k; 0; +1 \}$ . Воспользуемся обозначениями (8.409) и, кроме этого, примем

$$x_1(t_2) = q_1; \quad x_2(t_2) = q_2. \quad (8.423)$$

Очевидно, что все условия и уравнения для состояний  $(\omega_1, \omega_2)$ ,  $(s_1, s_2)$  и  $(z_1, z_2)$ , полученные при доказательстве леммы 8.25, остаются в силе. Так как  $u(t) = -1$  при  $t \in [t_2, t_3]$ , то состояние  $(q_1, q_2)$  при  $t = t_2$  должно переводиться в  $(z_1, z_2)$  управлением  $u = -1$ , и поэтому  $(z_1, z_2)$  и  $(q_1, q_2)$  соединены траекторией  $T^-(q_1; q_2; z_1; z_2)$ . Поскольку [см. уравнение (8.418)]  $z_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}} > -\sqrt{\frac{1}{a}}$ , то должно быть [см. уравнение (8.399)]

$$q_2 > -\sqrt{\frac{k}{a}}. \quad (8.424)$$

Но  $p_2(t_2) = +1$  и  $\dot{p}_2(t_2) > 0$  при  $t = t_2$ . Так как  $\dot{p}_2(t) = -2\sqrt{ka} + a|q_2|p_2(t)$ , получим

$$|q_2| > \sqrt{\frac{k}{a}}. \quad (8.425)$$

Из неравенств (8.424) и (8.425) следует

$$q_2 > \sqrt{\frac{k}{a}} > 0. \quad (8.426)$$

При  $t = t_2$  условие  $H = 0$  дает уравнение

$$0 = k + 2\sqrt{ka}q_2 - aq_2^2,$$

откуда, в свою очередь, в силу неравенства (8.426) следует

$$q_2 = \sqrt{\frac{k}{a}}(1 + \sqrt{2}). \quad (8.427)$$

Таким образом, состояние  $(q_1, q_2)$  определено, поскольку оно является пересечением траектории  $T^-(q_1, q_2, z_1, z_2)$  с прямой  $x_2 = \sqrt{\frac{k}{a}}(1 + \sqrt{2})$ .

Допустим, что оптимальна последовательность  $\{ \dots; -1; 0; -1; -k; 0; +1 \}$ . Тогда найдется такой момент времени  $t_0 < t_2$ , что при  $t = t_0$   $x_1(t_0) = r_1$ ,  $x_2(t_0) = r_2$ ,  $p_2(t_0) = 1$ ,  $\dot{p}_2(t_0) < 0$ . Так как  $u(t) = 0$  при  $t \in [t_0, t_2]$ , то состояние  $(r_1, r_2)$  должно быть соединено с  $(q_1, q_2)$  траекторией  $T^0(r_1, r_2, q_1, q_2)$ . Из этого, а также из уравнений (8.400) и (8.427) следует, что

$$r_2 > q_2 = \sqrt{\frac{k}{a}}(1 + \sqrt{2}) > \sqrt{\frac{k}{a}} > 0. \quad (8.428)$$

Но  $\dot{p}_2(t_0) = -2\sqrt{ka} + 2a|r_2|p_2(t_0)$ ; так как  $\dot{p}_2(t_0) < 0$  и  $p_2(t_0) = 1$ , получим

$$|r_2| < \sqrt{\frac{k}{a}}. \quad (8.429)$$

Уравнения (8.428) и (8.429) противоречат друг другу. Следовательно, управляющая последовательность  $\{ \dots; -1; 0; -1; -k; 0; +1 \}$  не может быть оптимальной, и поэтому в качестве возможной оптимальной последовательности необходимо рассматривать только последовательность  $\{0; -1; -k; 0; +1\}$ .

**Лемма 8.27.** Если  $\pi_1 = 2\sqrt{ka}$ , то управляющая последовательность  $\{ \dots; -k; 0; -1; -k; 0; +1 \}$  не может быть оптимальной.

**Упражнение 8.35.** Докажите лемму 8.27.

**Лемма 8.28.** Если  $\pi_1 = 2\sqrt{ka}$ , то управляющие последовательности  $\{ \dots; +1; 0; -k; 0; +1 \}$  и  $\{ \dots; +k; 0; -k; 0; +1 \}$  не могут быть оптимальными.

**Упражнение 8.36.** Докажите лемму 8.28. У к а з а н и е: используйте лемму 8.22.

Теперь обсудим результаты лемм 8.25—8.28. Мы показали, что если  $\pi_1 = 2\sqrt{ka}$  (лишь в этом случае вырожденное управление  $u(t) = -k$  может быть частью оптимальной управляющей последовательности), то оптимальными могут быть только управляющие последовательности  $\{0; -k; 0; +1\}$  и  $\{0; -1; -k; 0; +1\}$ . По принципу оптимальности можно сделать вывод, что любая подпоследовательность из этих двух управляющих последовательностей также может быть оптимальна.

Перечислим некоторые из определений и построений, использовавшихся ранее при доказательствах графическими методами (рис. 8.34):

1) во-первых, выбираем  $\pi_1 = 2\sqrt{ka}$ ;

2) по уравнению (8.414) находим  $w_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}} \times (\sqrt{2} - 1)$ ;

3) точка  $(w_1, w_2)$  принадлежит кривой  $\gamma_+$ ;

4) по соотношению (8.417) имеем  $s_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}}$ ;

5) точка  $(s_1, s_2)$  является пересечением траектории  $T^0(s_1, s_2, w_1, w_2)$  и прямой  $x_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}}$ .

6) из соотношения (8.427) имеем  $q_2 = \sqrt{\frac{k}{a}}(1 + \sqrt{2})$ ;

7) точка  $(q_1, q_2)$  является пересечением траектории  $T^-(q_1, q_2, z_1, z_2)$  и прямой  $x_2 = \sqrt{\frac{k}{a}}(1 + \sqrt{2})$ .

Назовем геометрическое место точек  $(z_1, z_2)$  кривой  $\gamma_z^+$ :

$$\gamma_z^+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}}, x_1 > s_1 \right\}. \quad (8.430)$$

Рассмотрим геометрическое место точек  $(q_1, q_2)$  в зависимости от изменения  $(z_1, z_2)$  вдоль кривой  $\gamma_z^+$ . В частности,

$$(\hat{q}_1, \hat{q}_2) = \lim_{(z_1, z_2) \rightarrow (s_1, s_2)} (q_1, q_2). \quad (8.431)$$

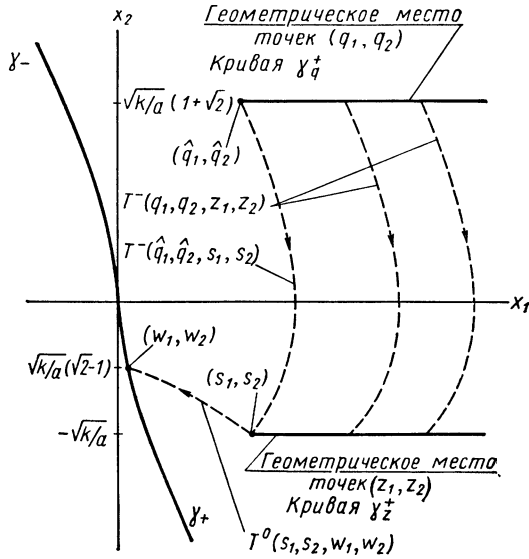


Рис. 8.34. Точки  $(w_1, w_2)$ ,  $(s_1, s_2)$  и  $(q_1, q_2)$  и кривые  $\gamma_z^+$  и  $\gamma_q^+$

Точка  $(\hat{q}_1, \hat{q}_2)$  показана на рис. 8.34. Легко видеть, что  $(\hat{q}_1, \hat{q}_2)$  является пересечением  $T^-(\hat{q}_1, \hat{q}_2, s_1, s_2)$  с прямой

$$x_2 = \sqrt{\frac{k}{a}}(1 + \sqrt{2}).$$

При изменении  $(z_1, z_2)$  на множестве  $\gamma_z^+$  точка  $(q_1, q_2)$  описывает кривую, которую будем называть кривой  $\gamma_q^+$ :

$$\gamma_q^+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \sqrt{\frac{k}{a}}(1 + \sqrt{2}); x_1 > \hat{q}_1 \right\}. \quad (8.432)$$

Докажем теперь ряд лемм в предположении, что  $\pi_1 \neq 2\sqrt{ka}$ . Если  $\pi_1 \neq 2\sqrt{ka}$ , то вырожденное управление  $u(t) = -k$  не может быть частью оптимальной управляющей последовательности (см. лемму 8.21).

**Лемма 8.29.** Если

$$\pi_1 > 2\sqrt{ka}, \quad (8.433)$$

то управляющая последовательность  $\{0; -1; 0; +1\}$  может быть оптимальной, а последовательность  $\{ \dots; -1; 0; -1; 0; +1 \}$  — нет.

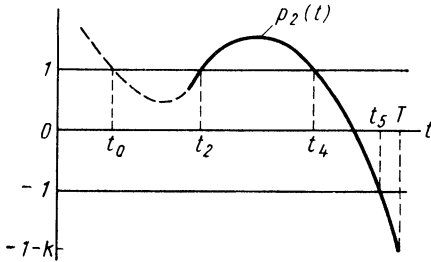


Рис. 8.35. Вид функции  $p_2(t)$ , которому соответствует управляющая последовательность  $\{ \dots, -1; 0; -1; 0; +1 \}$ . Участок  $p_2(t)$ , показанный сплошной линией, дает последовательность  $\{0; -1; 0; +1\}$

**Доказательство выполним графически.** На рис. 8.35 показан вид функции  $p_2(t)$ , дающей управляющую последовательность  $\{0; -1; 0; +1\}$ . Отрезок  $p_2(t)$ , показанный штриховой линией, дает управляющую последовательность  $\{ \dots; -1; 0; -1; 0; +1 \}$ .

Пусть

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= x_1(t_5); & m_2 &= x_2(t_5); \\ n_1 &= x_1(t_4); & n_2 &= x_2(t_4); \\ h_1 &= x_1(t_2); & h_2 &= x_2(t_2); \\ g_1 &= x_1(t_0); & g_2 &= x_2(t_0). \end{aligned} \right\} \quad (8.434)$$

При  $t = t_0$  управление переключается с  $u = 0$  на  $u = +1$ , причем  $u(t) = +1$  при любом  $t \in [t_5; T]$ . Отсюда следует, что

$$(m_1, m_2) \in \gamma_+ \quad (8.435)$$

и поэтому

$$m_2 < 0. \quad (8.436)$$

При  $t = t_5$ ,  $p_2(t_5) = -1$ ; условие  $H = 0$  дает уравнение

$$H = 0 = 1 + m_2\pi_1 - am_2^2. \quad (8.437)$$

Воспользовавшись неравенством (8.436) для определения знака, получим

$$m_2 = \frac{1}{2a} \left( \pi_1 - \sqrt{\pi_1^2 - 4ak} \right). \quad (8.438)^1$$

Заметим, что справедливы предельные соотношения [см. уравнение (8.414)]

$$\lim_{\pi_1 \rightarrow 2\sqrt{ka}} m_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}}(\sqrt{2} - 1) = \omega_2; \quad (8.439)$$

$$\lim_{\pi_1 \rightarrow \infty} m_2 = 0. \quad (8.440)$$

<sup>1</sup> Неравенство (8.433) гарантирует, что  $m_2$  — действительное число.

При  $t = t_4$  управление переключается с  $u(t) = -1$  на  $u(t) = 0$ . Так как  $u(t) = 0$  при любом  $t \in [t_4, t_5]$ , получим соотношение

$$n_2 < m_2 < 0. \quad (8.441)$$

При  $t = t_4$   $p_2(t_4) = +1$ ,  $\dot{p}_2(t_4) < 0$  и поэтому из уравнения  $\dot{p}_2(t_4) = -\pi_1 + 2a|n_2|p_2(t_4)$  получаем соотношение

$$n_2 > -\frac{\pi_1}{2a}. \quad (8.442)$$

Условие  $H = 0$  при  $t = t_4$  дает

$$H = k + n_2\pi_1 + an_2^2 = 0. \quad (8.443)$$

Таким образом, мы найдем [пользуясь соотношением (8.442)]

$$n_2 = -\frac{1}{2a} \left( \pi_1 - \sqrt{\pi_1^2 - 4ak} \right). \quad (8.444)$$

При этом выполняются предельные соотношения [см. уравнение (8.417)]

$$\lim_{\pi_1 \rightarrow 2\sqrt{ka}} n_2 = -\sqrt{\frac{k}{a}} = s_2; \quad (8.445)$$

$$\lim_{\pi_1 \rightarrow \infty} n_2 = 0; \quad (8.446)$$

$$\lim_{\pi_1 \rightarrow 2\sqrt{ka}} (n_1, n_2) = (s_1, s_2). \quad (8.447)$$

При  $t = t_2$   $p_2(t_2) = 1$  и  $\dot{p}_2(t_2) > 0$ ; поэтому уравнение  $\dot{p}_2(t_2) = -\pi_1 + 2a|h_2|p_2(t_2)$  дает неравенство

$$|h_2| > \frac{\pi_1}{2a}. \quad (8.448)$$

Так как  $u(t) = -1$  при  $t \in [t_2, t_4]$  и

$$x_2(t_4) = n_2 > -\frac{\pi_1}{2a} > -\sqrt{\frac{k}{a}} > -\sqrt{\frac{1}{a}},$$

то получается [см. уравнение (8.399)]

$$h_2 > n_2 > -\frac{\pi_1}{2a}. \quad (8.449)$$

Из двух неравенств (8.448) и (8.449) делаем вывод, что

$$h_2 > \frac{\pi_1}{2a} > \sqrt{\frac{k}{a}} > 0. \quad (8.450)$$

Условие  $H = 0$  при  $t = t_2$  дает

$$H = 0 = k + h_2\pi_1 - ah_2^2. \quad (8.451)$$

Решим уравнение (8.451), пользуясь неравенством (8.450) для выбора знака, и найдем

$$h_2 = \frac{1}{2a} \left( \pi_1 + \sqrt{\pi_1^2 - 4ak} \right). \quad (8.452)$$

Заметим, что

$$\lim_{\pi_1 \rightarrow 2\sqrt{ka}} h_2 = \sqrt{\frac{k}{a}} (1 + \sqrt{2}) = \hat{q}_2; \quad (8.453)$$

$$\lim_{\pi_1 \rightarrow \infty} h_2 = +\infty; \quad (8.454)$$

$$\lim_{\pi_1 \rightarrow 2\sqrt{ka}} (h_1, h_2) = (\hat{q}_1, \hat{q}_2). \quad (8.455)$$

Для доказательства того, что управляющая последовательность  $\{ \dots; -1; 0; -1; 0; +1 \}$  не может быть оптимальной, можно повторить процедуру доказательства леммы 8.26, и поэтому мы предоставляем эту часть доказательства прочитать читателю в порядке упражнения.

**Лемма 8.30.** Если  $\pi_1 > 2\sqrt{ka}$ , то управляющая последовательность типа  $\{ \dots; +1; 0; -1; 0; +1 \}$  не может быть оптимальной.

**Упражнение 8.37.** Докажите лемму 8.30. *Указание:* пользуйтесь леммой 8.28.

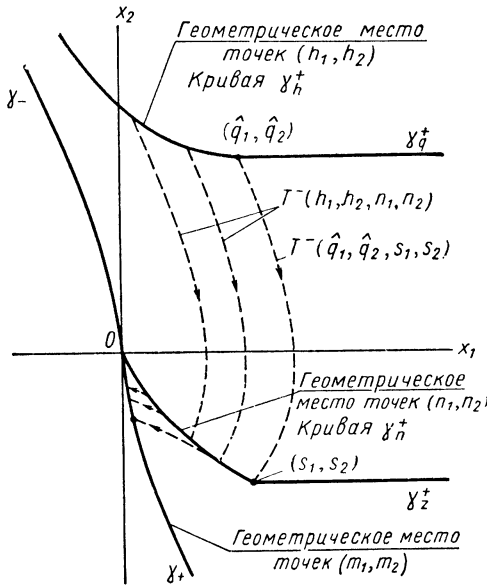


Рис. 8.36. Кривые  $\gamma_h^+$  и  $\gamma_n^+$

**Лемма 8.31.** Если  $\pi_1 > 2\sqrt{ka}$ , то управляющая последовательность типа  $\{ \dots; +1; 0; +1 \}$  не может быть оптимальной.

**Упражнение 8.38.** Докажите лемму 8.31.

Еще раз посмотрим, что следует из лемм 8.29—8.31 и их графических доказательств. Для иллюстрации воспользуемся рис. 8.36.

1. Выбираем  $\pi_1 > 2\sqrt{ka}$ .
2. Согласно выражению (8.438) имеем

$$m_2 = \frac{1}{2a} (\pi_1 - \sqrt{\pi_1^2 + 4ak}).$$

3. Точка  $(m_1; m_2)$  принадлежит кривой  $\gamma_+$ , являясь точкой пересечения кривой  $\gamma_+$  с прямой:

$$x_2 = \frac{1}{2a} (\pi_1 - \sqrt{\pi_1^2 + 4ak}).$$

4. Согласно выражению (8.444) имеем

$$n_2 = -\frac{1}{2a} (\pi_1 - \sqrt{\pi_1^2 - 4ak}).$$

5. Чертим траекторию  $T^0(n_1, n_2, m_1, m_2)$ , проходящую через  $(m_1, m_2)$ , и находим точку ее пересечения с прямой:

$$x_2 = -\frac{1}{2a} (\pi_1 - \sqrt{\pi_1^2 - 4ak}).$$

Точка пересечения дает точку  $(n_1, n_2)$ .

6. Согласно выражению (8.452) имеем

$$h_2 = \frac{1}{2a} (\pi_1 + \sqrt{\pi_1^2 + 4ak}).$$

7. Точка  $(h_1, h_2)$  есть точка пересечения прямой

$$x_2 = \frac{1}{2a} (\pi_1 + \sqrt{\pi_1^2 + 4ak})$$

с траекторией  $T^-(h_1, h_2, n_1, n_2)$ , проходящей через точку  $(n_1, n_2)$ .

Итак, для каждого из значений  $\pi_1 > 2\sqrt{ka}$  можно графически найти точки  $(m_1, m_2)$ ,  $(n_1, n_2)$  и  $(h_1, h_2)$ . Если  $\pi_1$  изменяется на множестве

$$2\sqrt{ka} < \pi_1 < \infty, \quad (8.456)$$

то получаются геометрические места точек  $(m_1, m_2)$ ,  $(n_1, n_2)$  и  $(h_1, h_2)$ .

Мы знаем, что

$$(m_1, m_2) \in \left\{ (x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \gamma_+; -\sqrt{\frac{k}{a}} < x_2 \leq 0 \right\}. \quad (8.457)$$

**Определение 8.9.** Обозначим через  $\gamma_n^+$  геометрическое место точек  $(n_1, n_2)$ , а через  $\gamma_h^+$  — геометрическое место точек  $(h_1, h_2)$ , получающееся при изменении  $\pi_1$  на множестве значений  $2\sqrt{ka} < \pi_1 < \infty$ .

Эти множества  $\gamma_n^+$  и  $\gamma_h^+$  показаны на рис. 8.36.

Серию лемм завершим следующей леммой.

**Лемма 8.32.** Если  $\pi_1 < 2\sqrt{ka}$ , то управляющая последовательность  $\{0; +1\}$  может быть оптимальна, а последовательности вида  $\{ \dots; -1; 0; +1\}$  и  $\{ \dots; +1; 0; +1\}$  не оптимальны.

**Упражнение 8.39.** Докажите лемму 8.32. Укажите, где: доказывайте от противного.

Мы определили выше некоторые кривые, показанные на рис. 8.34 и 8.36, и назвали их кривыми  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$ ,  $\gamma_z^+$ ,  $\gamma_q^+$ ,  $\gamma_n^+$  и  $\gamma_h^+$ . Все эти кривые принадлежат к  $S_R$ , т. е. расположены справа от кривой  $\gamma_+ \cup \gamma_-$ . Так как система симметрична, то можно доказать аналогичную последовательность лемм относительно управляющих последовательностей вида  $\{ \dots; -1\}$ . Чтобы не тратить усилий попусту, определим кривые  $\gamma_z^-$ ,  $\gamma_q^-$ ,  $\gamma_n^-$  и  $\gamma_h^-$  как кривые, симметричные относительно начала координат кривым  $\gamma_z^+$ ,  $\gamma_q^+$ ,  $\gamma_n^+$  и  $\gamma_h^+$  соответственно.

Напомним, что каждая из этих кривых зависит от постоянной  $k$ ,  $0 < k \leq 1$ . На рис. 8.37 показаны все эти кривые для значений  $a = 1$  и  $k = 0,25$ . Все они были построены описанными выше графическими методами.

Как видно из рис. 8.37, эти кривые делят фазовую плоскость на шесть областей, обозначенных  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$  и  $H_6$ . Мы ограничимся определением этих областей с помощью рис. 8.37, добавив, что

$H_2$  включает кривую  $\gamma_n^-$ ;

$H_3$  включает кривые  $\gamma_q^-$ ,  $\gamma_h^-$  и  $\gamma_+$ ;

$H_5$  включает кривую  $\gamma_n^+$ ;

$H_6$  включает кривые  $\gamma_q^+$ ,  $\gamma_h^+$  и  $\gamma_-$ .

Горизонтальные отрезки  $\gamma_z^+$  и  $\gamma_z^-$  не включаются ни в одну из областей  $H_1-H_6$ .

Решением поставленной задачи является следующий закон управления.

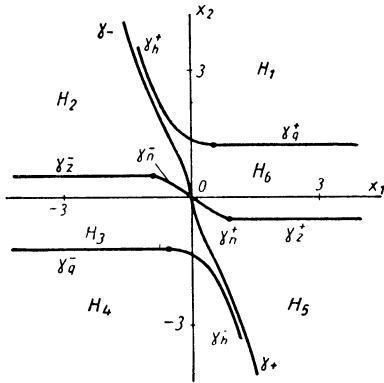


Рис. 8.37. Разбиение фазовой плоскости на шесть областей  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$  и  $H_6$



**Закон управления 8.7 (решение задачи 8.7).** Если  $0 < k \leq 1$ , то единственное оптимальное управление  $u^*$  как функция состояния  $(x_1, x_2)$  определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= 0 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in H_1 \cup H_2 \cup H_4 \cup H_5; \\ u^* &= -1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in H_6; \\ u^* &= +1 \text{ для всех } (x_1, x_2) \in H_3; \\ u^* &= -k \text{ для всех } (x_1, x_2) \in \gamma_2^+; \\ u^* &= +k \text{ для всех } (x_1, x_2) \in \gamma_2^-. \end{aligned} \right\} \quad (8.458)$$

**Доказательство.** Пусть  $(\xi_1, \xi_2)$  — некоторое исходное состояние. Напомним, что построение различных кривых основывалось на том, что оптимальными управляющими последовательностями к началу координат являются

$$\left. \begin{aligned} \{0; +1\}, & \text{ если } (\xi_1, \xi_2) \in \gamma_n^+; \\ \{0; -1\}, & \text{ если } (\xi_1, \xi_2) \in \gamma_n^-; \\ \{-k; 0; +1\}, & \text{ если } (\xi_1, \xi_2) \in \gamma_2^+; \\ \{+k; 0; -1\}, & \text{ если } (\xi_1, \xi_2) \in \gamma_2^-; \\ \{-1; 0; +1\}, & \text{ если } (\xi_1, \xi_2) \in \gamma_h^+; \\ \{+1; 0; -1\}, & \text{ если } (\xi_1, \xi_2) \in \gamma_h^-; \\ \{-1; -k; 0; +1\}, & \text{ если } (\xi_1, \xi_2) \in \gamma_q^+; \\ \{+1; +k; 0; -1\}, & \text{ если } (\xi_1, \xi_2) \in \gamma_q^- \end{aligned} \right\} \quad (8.459)$$

Отсюда непосредственно следует:

$$\left. \begin{aligned} \text{Если } (\xi_1, \xi_2) \in H_6, & \text{ то } u(t) = -1; \\ \text{Если } (\xi_1, \xi_2) \in H_3, & \text{ то } u(t) = +1; \\ \text{Если } (\xi_1, \xi_2) \in \gamma_2^+, & \text{ то } u(t) = -k; \\ \text{Если } (\xi_1, \xi_2) \in \gamma_2^-, & \text{ то } u(t) = +k. \end{aligned} \right\} \quad (8.460)$$

На основании лемм (8.26) и (8.27) делаем вывод, что к кривой  $\gamma_h^+ \cup \gamma_q^+$  надо двигаться по траектории  $T^0$ . Отсюда,

$$\text{если } (\xi_1, \xi_2) \in H_1, \text{ то } u(t) = 0. \quad (8.461)$$

Из леммы 8.25 следует, что к кривой  $\gamma_2^+$  надо двигаться по траектории  $T^0$ , и поэтому в  $H_5$  существует подмножество исходных состояний, которые переводятся на кривую  $\gamma_2^+$  управлением  $u = 0$ . Из леммы 8.32 следует, что существуют состояния, которые могут переводиться в точки кривой  $\gamma_+$  управлением  $u(t) = 0$ . Итак,

$$\text{если } (\xi_1, \xi_2) \in H_5, \text{ то } u(t) = 0. \quad (8.462)$$

Аналогичные рассуждения приводят к заключению:

$$\text{если } (\xi_1, \xi_2) \in H_2, \text{ то } u(t) = 0. \quad (8.463)$$

Таким образом, закон управления доказан.

Устремим теперь  $k \rightarrow 0$  и рассмотрим поведение различных кривых

в этом предельном случае. Такой переход даст нам решение, оптимальное по расходу топлива. Из уравнений (8.414) и (8.427) находим

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} (\omega_1, \omega_2) &= (0, 0); \\ \lim_{k \rightarrow 0} (s_1, s_2) &= (0, 0); \\ \lim_{k \rightarrow 0} (q_1, q_2) &= (0, 0). \end{aligned} \right\} \quad (8.464)$$

Из уравнений (8.438), (8.444) и (8.452) получим

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} (m_1, m_2) &= (0, 0); \\ \lim_{k \rightarrow 0} (n_1, n_2) &= (0, 0); \\ \lim_{k \rightarrow 0} (h_1, h_2) &= (\infty, \infty). \end{aligned} \right\} \quad (8.465)$$

Итак,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \gamma_n^+ = \lim_{k \rightarrow 0} \gamma_n^- = \emptyset \quad (8.466)$$

— пустое множество,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \gamma_z^+ \cup \gamma_z^- \text{ есть ось } x_1; \quad (8.467)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \gamma_q^+ \cup \gamma_q^- \text{ есть ось } x_1; \quad (8.468)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \gamma_h^+ \cup \gamma_h^- = \gamma_+ \cup \gamma_- \quad (8.469)$$

**Упражнение 8.40.** Решите задачу об оптимальном по расходу топлива управлении системой (8.364) (т. е. используйте функционал  $F = \int_0^T |u(t)| dt$ ;  $T$  не задано). Обсудите существование и единственность и сравните с результатом, полученным выше при  $k \rightarrow 0$ .

**Упражнение 8.41.** Рассмотрите систему (8.364) и функционал  $F = \int_0^T |u(t)| dt$ .

Считайте  $T$  заданным. Опишите порядок отыскания оптимального управления. Существуют ли в этом случае вырожденные решения?

**Упражнение 8.42**<sup>1</sup>. Решите задачу, рассмотренную в настоящем параграфе при  $k > 1$ . У к а з а н и е: вырожденных управлений быть не может; наиболее общими оптимальными управляющими последовательностями являются  $\{0; +1; 0; -1\}$  и  $\{0; -1; 0; +1\}$ . Положите  $k \rightarrow \infty$  и проверьте, стремится ли ваше решение к решению, оптимальному по быстродействию (§ 7.11).

**Упражнение 8.43.** Спроектируйте практическую реализацию закона управления 8.7 и предложите субоптимальные устройства. Повторите упражнение для закона управления, полученного в упражнении 8.42.

## 8.11. ЗАМЕЧАНИЯ И ОБОБЩЕНИЯ

В § 7.11 были рассмотрены способы оптимального по быстродействию управления для одного класса нелинейных систем второго порядка. Мы пришли к выводу, что оптимальное по быстродействию управление нелинейными системами то же, что и для линейных систем, за исключением «вида» уравнений или линий переключения.

<sup>1</sup> Решение приводится в работе [14].

Если сравнить оптимальное управление<sup>1</sup> нелинейной системой, рассмотренное в § 8.10, с оптимальным управлением линейной системой (§ 8.8 и 8.9), то нетрудно обнаружить различие между ними, проявляющееся в наличии вырожденных оптимальных управлений для нелинейной системы.

Возникает естественный вопрос: является ли существование оптимального вырожденного управления свойством только нелинейной системы (8.364) или общим свойством класса нелинейных систем?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим нелинейную систему второго порядка

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -f[x_2(t)] + u(t), \quad |u(t)| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.470)^2$$

и функционал

$$J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt, \quad (8.471)$$

где  $T$  не задано. Будем считать, что функция  $f[x_2(t)]$  обладает свойствами:

$$f(0) = 0; \quad (8.472)$$

$$\text{sign}\{f[x_2(t)]\} = \text{sign}\{x_2(t)\}. \quad (8.473)$$

$$g[x_2(t)] = \frac{\partial f[x_2(t)]}{\partial x_2(t)} > 0. \quad (8.474)$$

$$\text{Если } |x_2'(t)| < |x_2''(t)|, \text{ то } |f[x_2'(t)]| < |f[x_2''(t)]|. \quad (8.475)$$

Систему (8.470) можно использовать для описания движения материальной точки, считая, что  $x_1(t)$  обозначает ошибку по положению,  $x_2(t)$  — скорость, а  $f[x_2(t)]$  — силу сопротивления, являющуюся нелинейной функцией от скорости  $x_2(t)$ . Предположения (8.472)—(8.475) означают, по сути дела, что сила сопротивления направлена противоположно скорости и большим скоростям соответствуют большие силы сопротивления.

Гамильтониан для системы (8.470) и стоимости (8.471) имеет вид

$$H = k + |u(t)| + x_2(t)p_1(t) - f[x_2(t)]p_2(t) + u(t)p_2(t), \quad (8.476)$$

и поэтому

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = 0; \quad (8.477)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -p_1(t) + g[x_2(t)]p_2(t). \quad (8.478)$$

Если  $\pi_1 = p_1(0)$ ,  $\pi_2 = p_2(0)$ , то

$$p_1(t) = \pi_1 = \text{const}; \quad (8.479)$$

$$p_2(t) = -\pi_1 + g[x_2(t)]p_2(t). \quad (8.480)$$

Управление, минимизирующее гамильтониан  $H$ , определяется уравнениями (8.373)—(8.376). Вырожденные управления возникают в том случае, если существует конечный интервал времени  $[t_1, t_2]$ , на котором

$$|p_2(t)| = 1 \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.481)$$

<sup>1</sup> По отношению к функционалу  $\int_0^T [k + |u(t)|] dt$ ,  $0 < k \leq 1$ .

<sup>2</sup> Это те же самые уравнения, что и (7.465).

Предположим, что условие (8.481) выполняется. Тогда

$$\dot{p}_2(t) = 0 \text{ при любом } t \in [t_1, t_2], \quad (8.482)$$

и из уравнения (8.480) получим

$$p_1 = g[x_2(t)] \operatorname{sign}\{p_2(t)\} \text{ при любом } t \in [t_1, t_2], \quad (8.483)$$

откуда следует, что

$$x_2(t) = \operatorname{const} \text{ при любом } t \in [t_1, t_2] \quad (8.484)$$

и

$$\dot{x}_2(t) = 0 \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.485)$$

Из уравнений (8.485) и (8.470) получим

$$u(t) = f[x_2(t)] = \operatorname{const} \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.486)$$

Необходимое условие  $H = 0$  при любом  $t \in [t_1, t_2]$  и уравнения (8.481)—(8.486) дают

$$H = 0 = k \div \operatorname{sign}\{p_2(t)\} \{x_2(t)g[x_2(t)] - f[x_2(t)]\} \quad (8.487)$$

или

$$x_2(t)g[x_2(t)] - f[x_2(t)] = -\operatorname{sign}\{p_2(t)\} \cdot k. \quad (8.488)$$

Уравнение (8.488) можно «решить» и выразить  $x_2(t) = \operatorname{const}$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , через  $k$ . Пусть таким «решением» является

$$x_2(t) = h[-\operatorname{sign}\{p_2(t)\}k] \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.489)$$

Из уравнения (8.489) получим

$$u(t) = f\{h[-\operatorname{sign}\{p_2(t)\}k]\} \text{ при любом } t \in [t_1, t_2]. \quad (8.490)$$

Очевидно, что управление (8.490) может быть оптимальным в течение временного интервала  $[t_1, t_2]$  при условии, что удовлетворяются также и ограничения амплитуды  $|u(t)| \leq 1$ , иначе говоря, если

$$|f\{h[-\operatorname{sign}\{p_2(t)\}k]\}| \leq 1, \quad (8.491)$$

то вырожденное управление (8.490) может оказаться оптимальным.

**Пример 8.5.** Предположим, что в уравнении (8.470)

$$f[x_2(t)] = \frac{1}{3}x_2^3(t). \quad (8.492)$$

Тогда

$$g[x_2(t)] = x_2^2(t). \quad (8.493)$$

Уравнение (8.491) принимает вид

$$x_2^3(t) - \frac{1}{3}x_2^3(t) = -\operatorname{sign}\{p_2(t)\}k, \quad (8.494)$$

а его решением является

$$x_2(t) = \left[ -\frac{3}{2}\operatorname{sign}\{p_2(t)\}k \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (8.495)$$

Из уравнения (8.489) получим

$$u(t) = f[x_2(t)] = \frac{1}{3}x_2^3(t). \quad (8.496)$$

Подставив (8.495) в (8.496), найдем

$$u(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sign}\{p_2(t)\}k. \quad (8.497)$$

Так как  $\text{sign } \{p_2(t)\} = \pm 1$ , то оптимальными могут быть вырожденные управления

$$u(t) = -\frac{1}{2}k \quad (8.498)$$

и

$$u(t) = +\frac{1}{2}k \quad (8.499)$$

при условии, что

$$0 < k \leq 2. \quad (8.500)$$

Эти рассуждения приводят к заключению, что в случае нелинейных систем вырожденные оптимальные управления могут возникать довольно часто, в отличие от линейных систем, где они вообще не встречаются.

**Упражнение 8.44.** Используя методику § 8.10, найти оптимальный закон управления к началу координат для системы

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{3}x_2^3(t) + u(t), \quad |u(t)| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.501)$$

с функционалом

$$J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt, \quad T \text{ не задано.} \quad (8.502)$$

Рассмотрите оба случая: вырожденный ( $0 < k \leq 2$ ) и невырожденный ( $k > 2$ ).

**Упражнение 8.45.** Рассмотрите систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) - x_2(t)|x_2(t)| + u(t), \quad |u(t)| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.503)$$

и функционал  $J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt$ ,  $T$  не задано. Определите, для каких значений  $k$  вырожденные управления могут быть оптимальными. Найдите оптимальное управление к началу координат для вырожденного случая.

**Упражнение 8.46.** Рассмотрите линейную систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) - 2u(t), \quad |u(t)| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.504)$$

и функционал  $J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt$ ,  $T$  не задано.

Найдите оптимальное управление к началу координат. **У к а з а н и е:** оптимальное по быстродействию управление системой (8.504) рассматривалось в § 7.3. Вырожденных управлений в этой задаче не существует. Наиболее общими оптимальными управляющими последовательностями являются  $\{0; +1; 0; -1\}$  и  $\{0; -1; 0; +1\}$ . См. также работу [121].

**Упражнение 8.47.** Рассмотрите систему (8.504) и функционал  $F = \int_0^T |u(t)| dt$ ,  $T$  задано. Найдите оптимальное управление к началу координат. **У к а з а н и е:** воспользуйтесь методикой § 8.6.

**Упражнение 8.48.** Рассмотрите гармонический осциллятор:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t), \quad |u(t)| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.505)$$

и функционал  $F = \int_0^T |u(t)| dt$ ,  $T$  не задано. Считайте, что исходным является состояние  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  и конечным — начало координат  $(0, 0)$ . Покажите, что наибольшая нижняя

граница  $F^*$  количества топлива  $F = \int_0^T |u(t)| dt$  равна  $F^* \geq \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ . Указание: фундаментальная матрица системы (8.505) ортогональна и поэтому

$$\|\xi\| = \left\| \int_0^T \Phi^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) dt \right\| \leq \int_0^T \left\| \Phi^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \right\| dt.$$

Покажите, что, строго говоря, оптимального по расходу топлива управления для данной задачи не существует. Покажите также, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  и управление вида

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= -\operatorname{sign}\{x_2\}, \text{ если } |x_1| \leq \delta; \\ u(t) &= 0 \text{ в остальных случаях,} \end{aligned} \right\} \quad (8.506)$$

переводящее состояние в окрестность начала координат при расходе топлива  $F^* + \varepsilon$  единиц топлива. Указание: оптимальное по быстрдействию управление гармоническим осциллятором рассматривалось в § 7.7.

**Упражнение 8.49.** Рассмотрите гармонический осциллятор (8.505) с функционалом  $F = \int_0^T |u(t)| dt$ ,  $T$  фиксировано. Пользуясь методами § 8.6, найдите оптимальное по расходу топлива управление, переводящее любое исходное состояние  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$ , где

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 4.$$

**Упражнение 8.50.** Рассмотрите гармонический осциллятор (8.505) с функционалом  $J = \int_0^T [k + |u(t)|] dt$ . Начало координат является желаемым конечным состоянием.

Найдите оптимальное управление и линии переключения для исходных состояний  $(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 1$ .

**Упражнение 8.51.** Рассмотрите систему (8.470) с функционалом (8.471). Пусть сила сопротивления удовлетворяет условиям (8.472)–(8.475) и задан график функции  $f[x_2(t)]$  в зависимости от  $x_2(t)$ , но мы не знаем аналитического выражения  $f[x_2(t)]$ . Опишите методику, которая позволит вам найти вырожденные управления, пользуясь только графическими методами.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ  
ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ

9.1. ВВЕДЕНИЕ

Проектирование систем, оптимальных по быстродействию и минимуму расхода топлива, встречает значительные трудности, связанные с установлением оптимального закона управления и с реализацией оптимальных систем с обратной связью. Даже если управляемая система линейна, почти невозможно получить общие аналитические результаты как в случае оптимального быстродействия, так и в случае оптимизации по расходу топлива. Видимо, читатель уже начал сомневаться в том, что вообще существуют системы и критерии, для которых могут быть получены изящные и общие результаты.

В этой главе мы получим аналитические результаты для определенного класса систем с определенным классом критериев, а также рассмотрим линейную систему с переменными параметрами, состояние которой  $\mathbf{x}(t)$ , управление  $\mathbf{u}(t)$  и выход  $\mathbf{y}(t)$  связаны системой уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Наиболее общей формой функционала будет

$$\begin{aligned}J(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \langle [\mathbf{z}(T) - \mathbf{y}(T)], \mathbf{F}[\mathbf{z}(T) - \mathbf{y}(T)] \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \{ \langle [\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)], \mathbf{Q}(t)[\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)] \rangle + \\ &+ \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) \rangle \} dt,\end{aligned}$$

где  $\mathbf{z}(t)$  — желаемый выход.

Предположим, что ограничения на величины компонент управляющего вектора  $\mathbf{u}(t)$  отсутствуют. Сделаем также некоторые предположения относительно матриц  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  и  $\mathbf{R}(t)$ . При этом мы сможем получить аналитическое выражение для оптимального управления и обнаружить, что оптимальная система с обратной связью линейна.

Рассмотрим теперь структуру настоящей главы с тем, чтобы читатель смог получить общее представление о ее содержании.

В § 9.2 приведена постановка оптимальной задачи и обоснован выбор квадратичного функционала  $J(\mathbf{u})$ , при этом особое внимание обращено

на его физический смысл. Физические соображения приведут нас к некоторым математическим предположениям относительно матриц  $F$ ,  $Q(t)$  и  $R(t)$ . Таким образом, с самого начала читатель будет убежден, что имеет дело с задачей оптимизации, имеющей большой смысл с практической точки зрения. В § 9.3 мы приступим к математическому описанию так называемой задачи о регуляторе состояния (т. е. задачи об удержании состояния вблизи нуля). При этом будем действовать обычным способом, используя принцип минимума<sup>1</sup> для получения необходимых условий оптимального управления. Мы обнаружим, что канонические уравнения, связывающие состояние  $x(t)$  с дополнительной переменной  $p(t)$ , линейны. Линейность канонических уравнений позволит сделать вывод, что  $x(t)$  и  $p(t)$  связаны уравнением вида  $p(t) = K(t)x(t)$ , где  $K(t)$  — действительная симметричная матрица. Соображения, связанные с нахождением матрицы  $K(t)$ , приведут нас к закону управления 9.1. Затем покажем, что наши предположения позволят доказать глобальную достаточность локальных необходимых условий. Таким образом, мы сможем доказать существование и единственность оптимального управления.

В § 9.4 обсудим некоторые следствия закона управления 9.1 и способ вычисления матрицы  $K(t)$  при помощи цифровой вычислительной машины.

В § 9.5 установим закон управления 9.2, согласно которому при условии инвариантности системы во времени, в случае постоянных матриц  $Q(t)$  и  $R(t)$  и  $T = \infty$ , оптимальная система с обратной связью должна быть линейна и инвариантна во времени.

В § 9.6 проанализируем очень простой оптимальный регулятор первого порядка и приведем несколько переходных процессов, чтобы читатель смог получить представление о работе и свойствах оптимальных регуляторов.

В § 9.7 приступим к задаче о так называемом регуляторе выхода. В этой задаче речь пойдет об удержании вблизи нуля выхода  $y(t)$ , а не состояния  $x(t)$ . Мы получим закон управления 9.3 и покажем, что задачу о регуляторе выхода можно решить точно также как и задачу о регуляторе состояния § 9.3; определим закон управления 9.4, аналогичный закону управления 9.2, как частный случай закона управления 9.3 для случая инвариантной во времени системы при  $T = \infty$ .

В § 9.8 рассмотрим инвариантные во времени системы с одним входом и одним выходом и обсудим структуру оптимальной системы с обратной связью, анализируя полюса передаточной функции замкнутой системы.

В § 9.9 решим задачу об удержании выхода  $y(t)$  близким к желаемому выходу  $z(t)$ ; эта задача называется задачей слежения. Основные результаты этого параграфа подытожены в законе управления 9.5. Мы обсудим эти результаты с практической точки зрения и обнаружим, что структура обратной связи оптимальной следящей системы идентична структуре оптимального регулятора выхода. Особенностью, отличающей следящую систему от регулятора выхода, является канал прямой связи, который дает сигнал, зависящий от желаемого выхода  $z(t)$ .

В § 9.10 рассмотрим приближенные результаты, справедливые для постоянных систем с постоянными желаемыми выходами и неограниченно возрастающим конечным временем  $T$ . Аппроксимация показывает, что оптимальная система ведет себя почти как линейная, инвариантная во времени система с обратной связью. Недостаток точных результатов для предельного случая  $T = \infty$  вызван неразработанностью теории, гарантирующей существование оптимального решения при  $T \rightarrow \infty$ .

<sup>1</sup> По сути дела, мы используем результаты § 5.7 и 5.8, в частности, следствие 5.2.



В § 9.11 приведем некоторые достаточные условия, накладываемые на желаемый выход  $\mathbf{z}(t)$ , которые позволяют свести задачу слежения к задаче о регуляторе.

В § 9.12 рассмотрим переходные процессы оптимальной следящей системы первого порядка, которая аналогична системе, приведенной в § 9.6. Рисунки иллюстрируют переходные процессы, соответствующие ступенчатым входным сигналам, задержанным ступенькам и синусоидальным сигналам.

Глава завершается § 9.13, который содержит обзор дополнительных результатов, описанных в литературе. На протяжении всей главы (и особенно в § 9.3, 9.5, 9.7 и 9.9) мы основывались на различных работах Калмана [107], [110], [112] и [113]. При этом были опущены многие детали доказательств, которые можно найти в этих работах<sup>1</sup>.

На протяжении всей главы мы пытались проиллюстрировать теорию простыми примерами и обсудить, насколько возможно, практическое значение математических результатов.

## 9.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задана линейная динамическая система с переменными параметрами:  $\mathbf{x}(t)$  — состояние,  $\mathbf{u}(t)$  — управляющий вход и  $\mathbf{y}(t)$  — выход системы. Уравнениями системы являются

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t). \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Пусть  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  — компоненты вектора состояния  $\mathbf{x}(t)$ ;  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  — компоненты управляющего вектора  $\mathbf{u}(t)$  и  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$  — компоненты выходного вектора  $\mathbf{y}(t)$ . Таким образом,  $\mathbf{A}(t)$  — матрица размера  $n \times n$ ,  $\mathbf{B}(t)$  — матрица размера  $n \times r$  и  $\mathbf{C}(t)$  — матрица размера  $m \times n$ . Предположим, далее, что

$$0 < m \leq r \leq n \quad (9.2)$$

и

$$\mathbf{u}(t) \text{ не ограничено.} \quad (9.3)$$

Определим теперь назначение системы с физической точки зрения. Пусть  $\mathbf{z}(t)$  — вектор, имеющий  $m$  компонент  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)$ <sup>2</sup>. Требуется управлять системой (9.1) так, чтобы выходной вектор  $\mathbf{y}(t)$  был «близок» к вектору  $\mathbf{z}(t)$ . Условимся называть вектор  $\mathbf{z}(t)$  желаемым выходом. Далее определим вектор ошибки  $\mathbf{e}(t)$ , приняв

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t). \quad (9.4)$$

Попросту говоря, надо найти такое управление  $\mathbf{u}(t)$ , чтобы ошибка  $\mathbf{e}(t)$  была «малой».

Будем считать, что управление  $\mathbf{u}(t)$  не ограничено по величине; следовательно, возможны случаи, когда  $\mathbf{u}(t)$  очень велико. Для того чтобы избежать таких предельных ситуаций (требующих очень больших усиленных в контуре управления), можно включить требование, учитывающее тот факт, что «большие сигналы дорого стоят». Иначе говоря, мы хотели бы, с одной стороны, сохранять ошибку достаточно малой, а с другой — не использовать «чрезмерно больших» управлений.

Перевод этих физических требований в форму того или иного математического функционала зависит, конечно, от инженера. В этой главе

<sup>1</sup> См. дополнительно [11], [163], [193], [183] и [182], а также литературу, на которую есть ссылки в § 6.17, 6.18, 6.20 и 6.21.

<sup>2</sup> Некоторые или все  $z_i$  могут быть равны нулю. Размерность выхода равна  $m$ .

рассмотрим частный класс функционалов, имеющих квадратичный характер, что вполне соответствует физическим требованиям. Такой выбор функционала может и не быть наилучшим в конкретной ситуации. Тогда инженер должен выработать свой собственный критерий и самостоятельно решить задачу. Чтобы помочь понять смысл функционалов, которые мы будем рассматривать, уточним сначала физический смысл математических понятий.

Строго говоря, рассмотрим функционал

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{e}(T), \mathbf{F}\mathbf{e}(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle \mathbf{e}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) \rangle] dt, \quad (9.5)$$

где

конечное время  $T$  задано;

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F} & \text{ — постоянная положительно полуопределенная матрица} \\ & \text{ размера } m \times m; \\ \mathbf{Q}(t) & \text{ — положительно полуопределенная матрица размера } m \times m; \\ \mathbf{R}(t) & \text{ — положительно определенная матрица размера } r \times r. \end{aligned} \right\} (9.6)$$

Предположения (9.6) будут оставаться неизменными на протяжении всей главы.

Понятия положительно определенной и полуопределенной матриц мы также будем использовать на протяжении всей главы. Напомним (см. § 2.15), что действительная симметричная матрица  $\mathbf{M}$  положительно определена, если  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{M}\mathbf{a} \rangle > 0$  для любого  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  и действительная симметричная матрица  $\mathbf{N}$  положительно полуопределена, если  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{N}\mathbf{b} \rangle \geq 0$  для любого  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ . Отметим, что нулевая матрица, очевидно, положительно полуопределена.

Рассмотрим теперь каждый член функционала  $J(\mathbf{u})$  и установим, насколько правильно он отображает математически физические требования к системе. Начнем это рассмотрение с члена  $L_e = \frac{1}{2} \langle \mathbf{e}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t) \rangle$ , где  $\mathbf{Q}(t)$  положительно полуопределена. Очевидно, что этот член неотрицателен при любых  $\mathbf{e}(t)$  и равен нулю при  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$ . Если ошибка мала при любом  $t \in [t_0, T]$ , то и интеграл от  $L_e$  будет мал. Так как  $L_e = \frac{1}{2} \langle \mathbf{e}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m q_{ij}(t) e_i(t) e_j(t)$ , где  $q_{ij}(t)$  — элементы  $\mathbf{Q}(t)$ , а  $e_i(t)$  и  $e_j(t)$  — компоненты  $\mathbf{e}(t)$ , то очевидно, что стоимость  $L_e$  оценивает большие ошибки намного «дороже», чем малые. Поэтому система «штрафуется» за большие ошибки намного больше, чем за малые<sup>1</sup>.

Перейдем далее к члену  $L_u = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) \rangle$ , где  $\mathbf{R}(t)$  положительно определена. Этот член оценивает стоимость управления и «наказывает» систему за большие управления гораздо сильнее, чем за малые. Так как  $\mathbf{R}(t)$  положительно определена, стоимость управления положительна при любых  $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$ . Этот член часто называют мощностью управления, а  $\int_{t_0}^T L_u dt$  часто называют энергией управления. Причина

<sup>1</sup> Если  $L_e$  заменить на  $\sum_{i=1}^m |q_i(t) e_i(t)|$ , то система будет «штрафовать» одинаково

за большие и малые ошибки. Использовать функционал вида  $\int_{t_0}^T \sum_{i=1}^m q_i(t) e_i(t)$  не следует, так как компенсация больших положительных ошибок большими отрицательными может дать нулевую стоимость (значение функционала), несмотря на большие ошибки.

таких названий в следующем. Предположим, что  $u(t)$  — скаляр, пропорциональный напряжению или току; тогда величина  $u^2(t)$  пропорциональна мощности, а  $\int_{t_0}^T u^2(t) dt$  пропорционален энергии, израсходованной на интервале  $[t_0, T]$ . Требование положительной определенности, а не полуопределенности  $R(t)$ , как мы увидим, является условием существования управления конечной величины. Заметим, что это условие использовалось также в § 6.18.

Наконец, обратимся к члену  $\frac{1}{2} \langle e(T), Fe(T) \rangle$ . Этот член часто называют стоимостью конечного состояния. Его цель — гарантировать «малость» ошибки в конечный момент времени  $T$ . Иначе говоря, этот член должен рассматриваться тогда, когда величина  $e(t)$  в конечный момент времени особенно важна. Если это не так, то можно принять  $F = 0$  и, опираясь на остальную часть функционала, считать, что ошибка в конечный момент времени «не слишком велика».

Может возникнуть вопрос: почему матрицы  $Q(t)$  и  $R(t)$  зависят от времени, а не приняты постоянными? Если развить теорию для зависящих от времени матриц  $Q(t)$  и  $R(t)$ , то функционал  $J(u)$  можно будет использовать для более реалистических задач. Например, предположим, что при  $t = t_0$  состояние  $x(t)$  задано, и, следовательно выход  $y(t_0) = C(t_0)x(t_0)$  известен. Вектор  $z(t_0)$  может оказаться таким, что начальная ошибка  $e(t_0)$  будет очень большой. Система, конечно, «не виновата» в том, что  $e(t_0)$  велика. Поэтому мы можем выбрать матрицу  $Q(t)$  таким образом, чтобы «наказывать» систему за большие начальные ошибки меньше, чем за большие ошибки в дальнейшем. Для этого можно выбрать  $Q(t)$  такой, чтобы при

$$t_0 < t_1 \ll t_2 < T \quad (9.7)$$

для произвольного постоянного вектора  $b$  скалярные произведения  $\langle b, Q(t_1)b \rangle$  и  $\langle b, Q(t_2)b \rangle$  удовлетворяли неравенству

$$\langle b, Q(t_1)b \rangle \ll \langle b, Q(t_2)b \rangle. \quad (9.8)$$

Мы надеемся, что это обсуждение физических свойств функционала  $J(u)$  поможет читателю понять его смысл. Инженер-проектировщик должен решить вопрос о практическом использовании функционала. Тем не менее оказывается, что этот функционал имеет два очень ценных свойства. Во-первых, он удобен математически, и, во-вторых, его минимизация приводит к тому, что оптимальные системы оказываются линейными.

В настоящей главе мы будем рассматривать следующую задачу. Даны линейная система (9.1) и функционал (9.5), удовлетворяющий предположениям (9.2), (9.4) и (9.6). Найти оптимальное управление, т. е. управление, под воздействием которого система (9.1) движется таким образом, чтобы минимизировался функционал (9.5).

Прежде чем пытаться решить эту задачу, получим некоторые очевидные, но полезные результаты. Прежде всего, если  $Q(t) = F = 0$ , то оптимальное управление  $u(t) = 0$ . В этом случае стоимость равна  $\frac{1}{2} \int_{t_0}^T \langle u(t), R(t)u(t) \rangle dt$ , и поскольку время  $T$  мы не задали, стоимость минимизируется в том и только в том случае, если  $u(t) = 0$ . Чтобы исключить этот тривиальный случай, примем на будущее, что  $Q(t)$  и  $F$  одновременно не являются нулевыми матрицами, хотя одна из них и может быть нулевой.

Пусть теперь  $\Phi(t, t_0)$  — фундаментальная матрица линейной системы (9.1) и  $\mathbf{x}(t_0)$  — исходное состояние. Состояние  $\mathbf{x}(t)$  при  $t \in [t_0, T]$  равно

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \left[ \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right], \quad (9.9)$$

и, следовательно, ошибка  $\mathbf{e}(t)$  определяется уравнением

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \left[ \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right] \quad (9.10)$$

в силу уравнений (9.1) и (9.4).

**Лемма 9.1.** Если начальное состояние  $\mathbf{x}(t_0)$  и желаемый выход  $\mathbf{z}(t)$  связаны соотношением

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0), \quad t \in [t_0, T], \quad (9.11)$$

то оптимально управление  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$  и минимальная стоимость  $J^*$  равна нулю.

**Доказательство:** подставляя  $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{0}$  и уравнение (9.11) в выражение (9.10), получим  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$ .

**Лемма 9.2.** Если  $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$ , то стоимость  $J$  положительна.

**Доказательство.** Оно следует из предположения о положительной полуопределенности матриц  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{Q}(t)$  и о положительной определенности матрицы  $\mathbf{R}(t)$ .

**Лемма 9.3.** Если для любого  $\mathbf{u}(t)$  функционал не определен, т. е.  $J(\mathbf{u}) = \infty$ , то оптимального решения не существует.

**Доказательство.** Это очевидно, потому что если, например, два управления дают бесконечную стоимость, то нельзя определить, которое из них лучше.

В заключение советуем читателю еще раз просмотреть материал § 6.17—6.20. Основное отличие этих параграфов от настоящей главы состоит в том, что в гл. 6 мы задавали конечное состояние в виде точки или области цели. В этой же главе конечное состояние полностью неопределенно. Покажем, что это изменение задачи об оптимальном управлении имеет большое практическое значение.

### 9.3. ЗАДАЧА О РЕГУЛЯТОРЕ СОСТОЯНИЯ<sup>1</sup>

В этом параграфе рассматривается так называемая задача о регуляторе состояния. Решение задачи приводит к оптимальной системе с обратной связью, удерживающей компоненты вектора состояния  $\mathbf{x}(t)$  вблизи нуля без слишком больших затрат энергии управления.

Параграф построен следующим образом. Сначала используются необходимые условия, вытекающие из принципа минимума, с помощью которых отыскиваются экстремальные управления. Мы покажем, что:

- 1)  $H$ -минимальное управление оказывается линейной функцией дополнительной переменной;
- 2) канонические уравнения сводятся к системе  $2n$  однородных линейных дифференциальных уравнений;
- 3) из условия трансверсальности дополнительного вектора  $\mathbf{p}(t)$  в конечный момент времени  $T$  получается, что  $\mathbf{p}(T)$  является линейной функцией незаданного конечного состояния  $\mathbf{x}(T)$ .

Руководствуясь вычислительными соображениями, мы покажем, что экстремальное управление есть линейная функция от состояния.

<sup>1</sup> Этот параграф почти целиком опирается на результаты работы [107].

Изменяющаяся со временем матрица, которая связывает экстремальное управление с состоянием, может быть найдена путем решения матричного дифференциального уравнения (уравнения Рикатти в матричном виде). После этого мы покажем, что экстремальное управление является по крайней мере локально оптимальным и что оно единственно. Существование оптимального управления будет установлено на основе того, что решение уравнения Гамильтона—Якоби везде определено.

Рассмотрим линейную систему с переменными параметрами

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (9.12)$$

и функционал

$$J_1 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(T), \mathbf{F}\mathbf{x}(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) \rangle] dt. \quad (9.13)$$

Если принять  $\mathbf{C}(t) = \mathbf{I}$  и  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$ , то  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) = -\mathbf{e}(t)$ , и функционал  $J(\mathbf{u})$  (9.5) сводится к функционалу (9.13). Физический смысл этого состоит в том, что мы хотим удержать состояние вблизи нуля без слишком большой затраты энергии на управление. Будем считать, что предположения (9.6) удовлетворяются.

Покажем, что оптимальное управление есть линейная функция состояния, т. е. имеет вид

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t); \quad t \in [t_0, T], \quad (9.14)$$

где  $\mathbf{G}(t)$  — матрица—функция размера  $r \times n$ .

Предположим, что для любого начального состояния оптимальное управление существует. Для получения необходимых условий оптимального управления и отыскания экстремальных управлений можно воспользоваться принципом минимума. Гамильтониан  $H$  для системы (9.12) и стоимости  $J_1$  (9.13) равен

$$H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) \rangle + \langle \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t) \rangle. \quad (9.15)$$

Дополнительный вектор  $\mathbf{p}(t)$  является решением векторного дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(t)}, \quad (9.16)$$

которое сводится к уравнению

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}'(t)\mathbf{p}(t). \quad (9.17)$$

Вдоль оптимальной траектории должно быть<sup>1</sup>

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}(t)} = \mathbf{0}, \quad (9.18)$$

откуда следует

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}(t)} =: \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}'(t)\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}. \quad (9.19)$$

Из последнего уравнения получим

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{p}(t) \quad (9.20)$$

<sup>1</sup> См. § 5.7 и 5.18.

Предположение относительно положительной определенности  $\mathbf{R}(t)$  при любом  $t \in [t_0, T]$  гарантирует<sup>1</sup> существование  $\mathbf{R}^{-1}(t)$  при  $t \in [t_0, T]$ .

Оптимальное управление должно минимизировать гамильтониан. Необходимое условие  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}(t)} = \mathbf{0}$  дает только экстремум  $H$  по  $\mathbf{u}(t)$ . Чтобы экстремум  $H$  был минимумом по отношению к  $\mathbf{u}(t)$ , матрица  $\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2(t)}$  размера  $r \times r$  должна быть положительно определена. Но из уравнения (9.19) мы имеем

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2(t)} = \mathbf{R}(t). \quad (9.21)$$

Следовательно, поскольку  $\mathbf{R}(t)$  предполагается положительно определенной, управление  $\mathbf{u}(t)$ , соответствующее уравнению (9.20), действительно минимизирует гамильтониан и поэтому является  $H$ -минимальным.

Следующий шаг состоит в том, чтобы найти упрощенные канонические уравнения. Для этого подставим уравнение (9.20) в (9.12) и получим

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{p}(t). \quad (9.22)$$

Уравнения (9.22) и (9.17) являются упрощенными каноническими уравнениями. Определим матрицу  $\mathbf{S}(t)$ , приняв

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t), \quad (9.23)$$

где  $\mathbf{S}(t)$  — симметричная матрица размера  $n \times n$  (почему?). С помощью матрицы  $\mathbf{S}(t)$  уравнения (9.22) и (9.17) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & -\mathbf{S}(t) \\ -\mathbf{Q}(t) & -\mathbf{A}'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix}. \quad (9.24)$$

Последнее уравнение представляет собой систему  $2n$  линейных однородных дифференциальных уравнений с зависящими от времени коэффициентами. Можно найти единственное решение этой системы (см. § 3.20) при условии, что мы знаем  $2n$  начальных условий;  $n$  начальных условий определяются исходным состоянием системы  $\mathbf{x}(t_0)$  при  $t_0$ . Остальные  $n$  граничных условий определяются условиями трансверсальности<sup>2</sup>, в силу которых (поскольку  $\mathbf{x}(T)$  не задано) в конечный момент времени  $T$  дополнительная переменная  $\mathbf{p}(T)$  должна удовлетворять соотношению

$$\mathbf{p}(T) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(T)} \left[ \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(T), \mathbf{F}\mathbf{x}(T) \rangle \right]. \quad (9.25)$$

Таким образом,

$$\mathbf{p}(T) = \mathbf{F}\mathbf{x}(T). \quad (9.26)$$

Пусть  $\mathbf{\Omega}(t, t_0)$  — фундаментальная матрица системы (9.24) размера  $2n \times 2n$ . Если обозначить через  $\mathbf{p}(t_0)$  (неизвестное) начальное значение дополнительной переменной, то решение уравнения (9.24) будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}(t, t_0) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{p}(t_0) \end{bmatrix}. \quad (9.27)$$

Следовательно, при  $t = T$  должно быть

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(T) \\ \mathbf{p}(T) \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}(T, t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix}. \quad (9.28)$$

<sup>1</sup>  $\det \mathbf{M} > 0$  является необходимым условием положительной определенности  $\mathbf{M}$ , а поэтому  $\mathbf{M}$  невырождена (см. теорему 2.4).

<sup>2</sup> См. табл. 5.2.

Разделим далее  $2n \times 2n$  матрицу  $\Omega(T, t)$  на четыре  $n \times n$  матрицы следующим образом:

$$\Omega(T, t) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(T, t) & \Omega_{12}(T, t) \\ \Omega_{21}(T, t) & \Omega_{22}(T, t) \end{bmatrix}. \quad (9.29)$$

Уравнение (9.28) теперь можно записать в виде

$$\mathbf{x}(T) = \Omega_{11}(T, t)\mathbf{x}(t) + \Omega_{12}(T, t)\mathbf{p}(t); \quad (9.30)$$

$$\mathbf{p}(T) = \Omega_{21}(T, t)\mathbf{x}(t) + \Omega_{22}(T, t)\mathbf{p}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(T). \quad (9.31)$$

Из уравнений (9.30) и (9.31) после алгебраических преобразований получим

$$\mathbf{p}(t) = [\Omega_{22}(T, t) - \mathbf{F}\Omega_{12}(T, t)]^{-1} [\mathbf{F}\Omega_{11}(T, t) - \Omega_{21}(T, t)]\mathbf{x}(t) \quad (9.32)$$

при условии, что обратная матрица существует. Уравнение (9.32) говорит о том, что дополнительная переменная  $\mathbf{p}(t)$  и состояние  $\mathbf{x}(t)$  связаны соотношением вида

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{x}(t) \quad (9.33)$$

при любом  $t \in [t_0, T]$ .

Матрица  $\mathbf{K}(t)$  есть матрица размера  $n \times n$  с переменными коэффициентами, которая зависит от конечного времени  $T$  и от матрицы  $\mathbf{F}$ , но не зависит от исходного состояния.

Действительно,

$$\mathbf{K}(t) = [\Omega_{22}(T, t) - \mathbf{F}\Omega_{12}(T, t)]^{-1} [\mathbf{F}\Omega_{11}(T, t) - \Omega_{21}(T, t)]. \quad (9.34)$$

Здесь могут оказаться полезными несколько замечаний. Мы не показали, что матрица  $[\Omega_{22}(T, t) - \mathbf{F}\Omega_{12}(T, t)]$  имеет обратную. Рассмотрим ситуацию при  $t = T$ . Известно, что

$$\Omega(T, T) = \mathbf{I}; \quad (9.35)$$

и поэтому справедливы соотношения

$$\Omega_{11}(T, T) = \Omega_{22}(T, T) = \mathbf{I}; \quad (9.36)$$

$$\Omega_{12}(T, T) = \Omega_{21}(T, T) = \mathbf{0}. \quad (9.37)$$

Таким образом, матрица  $[\Omega_{22}(T, T) - \mathbf{F}\Omega_{12}(T, T)] = \mathbf{I}$  невырождена. Далее,

$$\mathbf{K}(T) = [\Omega_{22}(T, T) - \mathbf{F}\Omega_{12}(T, T)]^{-1} [\mathbf{F}\Omega_{11}(T, T) - \Omega_{21}(T, T)], \quad (9.38)$$

и поэтому из соотношений (9.36) и (9.37)

$$\mathbf{K}(T) = \mathbf{F}. \quad (9.39)$$

Следовательно, уравнение (9.33) справедливо при  $t = T$ . Можно показать<sup>1</sup>, что обратная матрица существует при любом  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq T$  и поэтому выражение (9.33) справедливо.

Обсудим теперь вычисление матрицы  $\mathbf{K}(t)$ . Если матрицы  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{S}(t)$  и  $\mathbf{Q}(t)$  зависят от времени, то в общем случае невозможно получить аналитическое выражение для фундаментальной матрицы  $\Omega(T, t)$  размера  $2n \times 2n$ . Тогда  $\mathbf{K}(t)$  необходимо определить с помощью цифровой вычислительной машины. Если, однако, матрицы  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{S}(t)$  и  $\mathbf{Q}(t)$  инвариантны во времени, то матрицу  $\Omega(T, t)$  можно найти аналитически, с помощью, например, преобразования Лапласа. Но даже и в этом случае вычисление обратной матрицы в уравнении (9.32) является очень трудоемкой задачей, особенно для систем высокого порядка.

<sup>1</sup> См. работу [107].

До сих пор создавалось впечатление, что вычислительные трудности почти непреодолимы. Возникает естественный вопрос: мы показали, что  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t)$ ; можно ли установить дополнительные свойства матрицы  $\mathbf{K}(t)$ , которые дадут нам иные пути ее вычисления, желательно не связанные с вычислением обратной матрицы размера  $n \times n$ ? Ответ на этот вопрос — положительный, и в оставшейся части параграфа мы попытаемся это показать.

Возьмем соотношение  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , продифференцируем его по времени, подставим полученные соотношения в канонические уравнения и установим, что матрица  $\mathbf{K}(t)$  должна удовлетворять некоторому матричному дифференциальному уравнению.

Предположим, что решения канонических уравнений (9.24)  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{p}(t)$  связаны уравнением

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (9.40)$$

Дифференцируя его по времени, получим

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \dot{\mathbf{K}}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}(t) \dot{\mathbf{x}}(t). \quad (9.41)$$

Но из уравнения (9.24) следует

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{S}(t) \mathbf{p}(t); \quad (9.42)$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{A}'(t) \mathbf{p}(t). \quad (9.43)$$

Подставляя соотношение (9.40) в уравнение (9.42), получим выражение

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{S}(t) \mathbf{K}(t)] \mathbf{x}(t). \quad (9.44)$$

Из уравнений (9.44) и (9.41) получим

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = [\dot{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{K}(t) \mathbf{S}(t) \mathbf{K}(t)] \mathbf{x}(t). \quad (9.45)$$

Подставив уравнение (9.40) в (9.43), найдем

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = [-\mathbf{Q}(t) - \mathbf{A}'(t) \mathbf{K}(t)] \mathbf{x}(t). \quad (9.46)$$

Из уравнений (9.45) и (9.46) определим

$$[\dot{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{K}(t) \mathbf{S}(t) \mathbf{K}(t) + \mathbf{A}'(t) \mathbf{K}(t) + \mathbf{Q}(t)] \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (9.47)$$

при любом  $t$  из  $[t_0, T]$ . Так как уравнение (9.47) должно выполняться при любом исходном состоянии, матрица  $\mathbf{K}(t)$  от исходного состояния не зависит, а  $\mathbf{x}(t)$  есть решение однородного уравнения (9.44), то уравнение (9.47) должно быть справедливо при любом значении  $\mathbf{x}(t)$ . Это означает, что матрица  $\mathbf{K}(t)$  должна удовлетворять матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}'(t) \mathbf{K}(t) - \mathbf{K}(t) \mathbf{S}(t) \mathbf{K}(t) + \mathbf{Q}(t) = \mathbf{0}, \quad (9.48)$$

но  $\mathbf{S}(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t)$ , и поэтому уравнение (9.48) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{K}}(t) = -\mathbf{K}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}'(t) \mathbf{K}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t) \mathbf{K}(t) - \mathbf{Q}(t). \quad (9.49)$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

**Лемма 9.4.** Если  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{p}(t)$  — решения канонических уравнений (9.24) и  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t)$  при любых  $t \in [t_0, T]$  и  $\mathbf{x}(t)$ , то матрица  $\mathbf{K}(t)$  должна удовлетворять уравнению (9.49).

Обратимся теперь к граничным условиям при  $t = T$ . Условия трансверсальности [см. уравнение (9.26)] требуют, чтобы

$$\mathbf{p}(T) = \mathbf{F} \mathbf{x}(T), \quad (9.50)$$



но при  $t = T$  имеем также

$$p(T) = K(T)x(T), \quad (9.51)$$

и поэтому

$$[K(T) - F]x(T) = 0 \quad (9.52)$$

при любом<sup>1</sup>  $x(T)$  и, следовательно,

$$K(T) = F, \quad (9.53)$$

т. е. мы получили соотношение (9.39).

Уравнение (9.49) представляет собой матричное дифференциальное уравнение типа Риккати. Для краткости будем называть его уравнением Риккати. Уравнение (9.53) дает граничные условия уравнения Риккати, и поэтому согласно теореме существования и единственности<sup>2</sup> решение уравнения Риккати  $K(t)$  существует и единственно.

На первый взгляд может показаться, что так как  $K(t)$  есть матрица размера  $n \times n$ , то уравнение (9.49) представляет собой систему  $n^2$  дифференциальных уравнений первого порядка. Покажем теперь, что  $K(t)$  есть симметричная матрица.

**Лемма 9.5.** Если  $K(t)$  — решение уравнения Риккати (9.49) и  $K(t) = F$ , то  $K(t)$  симметрична при любом  $t \in [t_0, T]$ , т. е.

$$K(t) = K'(t). \quad (9.54)$$

**Доказательство.** Протранспонируем обе части уравнения (9.49) и найдем, что

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} K(t) \right]' &= -K'(t)A(t) - A'(t)K'(t) + \\ &+ K'(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)K'(t) - Q(t), \end{aligned} \quad (9.55)$$

поскольку  $Q(t)$  и  $B(t)R^{-1}(t)B'(t)$  симметричны. Но для любой матрицы справедливо уравнение

$$\left[ \frac{d}{dt} K(t) \right]' = \frac{d}{dt} [K'(t)]. \quad (9.56)$$

Опираясь на уравнение (9.56), сравним (9.55) с (9.49) и обнаружим, что  $K(t)$  и  $K'(t)$  являются решениями одного и того же дифференциального уравнения. При  $t = T$  имеем граничное условие  $K(T) = F$ . Так как матрица  $F$  симметрична, то  $F = F'$ , но  $K'(t) = F' = F$ , и поэтому

$$K(T) = K'(T) = F. \quad (9.57)$$

Итак,  $K(t)$  и  $K'(t)$  — решения одного и того же дифференциального уравнения при одинаковых граничных условиях. Из единственности решений дифференциальных уравнений следует, что  $K(t) = K'(t)$ .

Так как матрица  $K(t)$  симметрична, уравнение Риккати (9.49) представляет собой систему  $\frac{n(n+1)}{2}$  обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными (зависящими от времени) параметрами.

Управление (9.20) экстремально. Покажем, что оно является единственным оптимальным управлением. Мы установим это в следующем законе управления.

<sup>1</sup> Напомним, что  $x(T)$  не задано.

<sup>2</sup> См. теорему 3.14. См. также работу [107], где приводится доказательство того, что  $K(t)$  определена при любом  $t < T$ .

**Закон управления 9.1** (решение задачи о регуляторе состояния).

Даны линейная система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (9.58)$$

и функционал

$$J_1 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(T), \mathbf{F}\mathbf{x}(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) \rangle] dt; \quad (9.59)$$

$\mathbf{u}(t)$  не ограничено,  $T$  — задано,  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{Q}(t)$  — положительно полуопределенные и  $\mathbf{R}(t)$  — положительно определенная матрицы. Оптимальное управление существует, единственно и определяется уравнением

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t), \quad (9.60)$$

где симметричная матрица  $\mathbf{K}(t)$  размера  $n \times n$  является единственным решением уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}(t) = & -\mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}'(t)\mathbf{K}(t) + \\ & + \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{K}(t) - \mathbf{Q}(t), \end{aligned} \quad (9.61)$$

удовлетворяющим граничному условию

$$\mathbf{K}(T) = \mathbf{F}. \quad (9.62)$$

Состояние оптимальной системы есть тогда решение линейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = & [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(t_0) = & \xi. \end{aligned} \quad (9.63)$$

Покажем сначала, что экстремальное управление  $\mathbf{u}(t)$ , определяемое уравнением (9.60), является по крайней мере локальным минимумом стоимости  $J_1$ . Напомним<sup>1</sup>, что если матрица

$$\left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2(t)} & \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}(t) \partial \mathbf{u}(t)} \\ \hline \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}(t) \partial \mathbf{x}(t)} & \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2(t)} \end{array} \right] \quad (9.64)$$

положительно определена, то управление, при котором  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}(t)} = 0$ , должно быть оптимально, хотя бы локально. Из уравнения (9.15) находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(t)} &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}'(t)\mathbf{p}(t); \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2(t)} &= \mathbf{Q}(t); \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}(t)} &= \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}'(t)\mathbf{p}(t); \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2(t)} &= \mathbf{R}(t); \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}(t) \partial \mathbf{u}(t)} &= \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}(t) \partial \mathbf{x}(t)} = \mathbf{0}. \end{aligned} \right\} \quad (9.65)$$

<sup>1</sup> См. § 5.8.

Подставляя соотношения (9.65) в (9.64), получим матрицу

$$\begin{bmatrix} Q(t) & | & 0 \\ \hline 0 & | & R(t) \end{bmatrix}. \quad (9.66)$$

Так как  $R(t)$  положительно определена, если  $Q(t)$  также положительно определена, то матрица (9.66) положительно определена. Если  $Q(t)$  только положительно полуопределена, то и матрица (9.66) также положительно полуопределена. Так как высшие производные  $H$  равны нулю, то для данной задачи предположение о положительной полуопределенности<sup>1)</sup>  $R(t)$  является достаточно сильным, чтобы гарантировать, что управление  $u(t) = -R^{-1}(t)B'(t)K(t)x(t)$  минимизирует стоимость по крайней мере локально. Итак, мы доказали следующую лемму.

**Лемма 9.6.** Управление  $u(t) = -R^{-1}(t)B'(t)K(t)x(t)$  соответствует минимуму (по крайней мере локальному) стоимости  $J_1$ .

Следующий шаг состоит в доказательстве единственности экстремального управления

$$u(t) = -R^{-1}(t)B'(t)K(t)x(t).$$

Доказательство опирается на то, что решение уравнения Риккати  $K(t)$ , удовлетворяющее граничному условию  $K(T) = F$ , единственно. Мы докажем следующую лемму.

**Лемма 9.7.** Если оптимальное управление существует, то оно единственно и определяется уравнением (9.60).

**Доказательство.** Установлено, что экстремальное управление

$$u(t) = -R^{-1}(t)B'(t)K(t)x(t) \quad (9.67)$$

соответствует минимуму (по крайней мере локальному) стоимости  $J_1$ . Так как матрица  $K(t)$  единственна, то оптимальное (локально) управление является однозначной функцией состояния. Допустим, что существуют два оптимальных управления  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  и две оптимальные траектории  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ ; причем  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ . Тогда [см. уравнение (9.63)]  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  должны быть двумя различными решениями дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]x(t), \quad (9.68)$$

исходящими из одной точки  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ . Но так как матрица  $K(t)$  единственна, то и матрица  $A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)$  также единственна. Поскольку уравнение (9.68) линейно и однородно, его решение, начинающееся из любой исходной точки, единственно. Следовательно,  $x_1(t) = x_2(t)$  и  $u_1(t) = u_2(t)$  при любом  $t \in [t_0, T]$ . Тем самым лемма доказана.

Докажем далее теорему, которую можно использовать при доказательстве существования оптимального управления и для вычисления минимальной стоимости  $J_1^*[x(t), t]$  как функции состояния  $x(t)$  и времени  $t$ .

**Теорема 9.1.** Даны линейная система (9.58) и функционал  $J_1$  (9.59). Обозначим через  $J_1^*$  минимальную величину  $J_1$ . Она равна

$$J_1^*[x(t), t] = \frac{1}{2} \langle x(t), K(t)x(t) \rangle, \quad (9.69)$$

где  $K(t)$  — симметричная матрица размера  $n \times n$ , являющаяся решением уравнения Риккати (9.61) и удовлетворяющая граничному условию

<sup>1</sup> См. следствие 5.2.

$K(T) = F$ . Если оптимальное управление  $u(t) \neq 0$  для всех состояний, то  $K(t)$  есть положительно определенная матрица при любом  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq T$  и  $K(T) = F$  положительно полуопределенна. Так как минимальная стоимость  $J_1^* = \frac{1}{2} \langle x(t), K(t) x(t) \rangle$  определена при всех  $x(t)$  и  $t$ , оптимальное управление существует и минимальная стоимость действительно равна  $J_1^*$ .

**Доказательство.** Мы покажем, что  $J_1^*$  является решением дифференциального уравнения в частных производных Гамильтона—Якоби и что оно удовлетворяет граничным условиям. Существование оптимального управления будет при этом следовать из теоремы 5.12.

Прежде всего заметим, что при  $t = T$  уравнение (9.69) запишется в виде

$$J_1^* [x(T), T] = \frac{1}{2} \langle x(T), Fx(T) \rangle, \quad (9.70)$$

т. е. представляет собой стоимость конечного состояния.

Уравнение Гамильтона—Якоби<sup>1</sup> для системы (9.58) и функционала  $J_1$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} J_1^* [x(t), t] + \min_{u(t)} \left\{ \frac{1}{2} \langle x(t), Q(t) x(t) \rangle + \right. \\ & + \frac{1}{2} \langle u(t), R(t) u(t) \rangle + \left\langle A(t) x(t), \frac{\partial J_1^* [x(t), t]}{\partial x(t)} \right\rangle + \\ & \left. + \left\langle B(t) u(t), \frac{\partial J_1^* [x(t), t]}{\partial x(t)} \right\rangle \right\} = 0. \end{aligned} \quad (9.71)$$

Стоящее в скобках выражение минимизируется управлением

$$u(t) = -R^{-1}(t) B'(t) \frac{\partial J_1^* [x(t), t]}{\partial x(t)}. \quad (9.72)$$

Подставляя соотношение (9.72) в уравнение (9.71), находим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial J_1^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \langle x(t), Q(t) x(t) \rangle + \frac{1}{2} \left\langle R^{-1}(t) B'(t) \frac{\partial J_1^*}{\partial x(t)}, B'(t) \frac{\partial J_1^*}{\partial x(t)} \right\rangle + \\ & + \left\langle A(t) x(t), \frac{\partial J_1^*}{\partial x(t)} \right\rangle - \left\langle B(t) R^{-1}(t) B'(t) \frac{\partial J_1^*}{\partial x(t)}, \frac{\partial J_1^*}{\partial x(t)} \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (9.73)$$

Но если  $J_1^* = \frac{1}{2} \langle x(t), K(t) x(t) \rangle$ , то

$$\frac{\partial J_1^*}{\partial t} = \frac{1}{2} \langle x(t), \dot{K}(t) x(t) \rangle \quad (9.74)$$

и

$$\frac{\partial J_1^*}{\partial x(t)} = K(t) x(t). \quad (9.75)$$

Подставляя соотношения (9.74) и (9.75) в выражение (9.73), получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle x(t), \dot{K}(t) x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t), Q(t) x(t) \rangle + \langle A(t) x(t), K(t) x(t) \rangle - \\ & - \frac{1}{2} \langle B(t) R^{-1}(t) B'(t) K(t) x(t), K(t) x(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (9.76)$$

<sup>1</sup> См. § 5.20.

Но так как матрица  $\mathbf{K}(t)$  симметрична, можно написать

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t), \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t), \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t), \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{A}'(t) \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{K}(t) \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) \rangle \quad (9.77) \end{aligned}$$

Подставив это соотношение в (9.67) и собрав все члены в одно скалярное произведение, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(t), [\dot{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}'(t) \mathbf{K}(t) - \\ & - \mathbf{K}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t) \mathbf{K}(t) + \mathbf{Q}(t)] \mathbf{x}(t) \rangle = 0. \quad (9.78) \end{aligned}$$

Если  $\mathbf{K}(t)$  удовлетворяет уравнению Риккати (9.61), то матрица в скобках будет, очевидно, нулевой матрицей, и поэтому уравнение (9.78) удовлетворяется. Справедливо и обратное утверждение.

Доказывая положительную определенность матрицы  $\mathbf{K}(t)$ , поступим следующим образом. Допустим, что при  $t = t' < T$  матрица  $\mathbf{K}(t)$  не является положительно определенной. Тогда существует  $\mathbf{x}(t')$  такое, что  $\frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(t'), \mathbf{K}(t') \mathbf{x}(t') \rangle \leq 0$ . При этом, очевидно, нарушается лемма 9.2, и поэтому  $\mathbf{K}(t)$  должна быть положительно определена при любом  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ .

Минимальная стоимость  $J_1^* = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \rangle$  есть скалярная функция от точек  $(n+1)$ -мерного пространства, образованного  $n$ -мерным пространством состояний и временем  $t$ . Поверхность, определяемая стоимостью  $J_1^*$ , является гладкой и везде имеет градиент (почему?).

Заметим также, что функция  $J_1^*[\mathbf{x}(t), t] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \rangle$  является решением уравнения Гамильтона—Якоби при любых  $\mathbf{x}(t) \in R_n$  и  $t \in [t_0, T]$ . Можно обратиться к результатам § 5.20, чтобы доказать существование оптимального управления.

Мы полностью доказали закон управления 9.1 и показали, что оптимум существует и что единственное экстремальное управление (9.60) соответствует минимуму функционала  $J_1(\mathbf{u})$ . Оптимальное управление  $\mathbf{u}(t)$  определяется уравнением (9.60).

В следующем параграфе рассмотрим различные аспекты закона управления 9.1.

#### 9.4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ПРИМЕРЫ

В § 9.3 мы установили закон оптимального управления для задачи о регуляторе состояния. В этом параграфе обсудим с физической точки зрения следствия, вытекающие из закона управления 9.1.

**Структура оптимальной системы с обратной связью.** На рис. 9.1 показана структура оптимальной системы с обратной связью. Так как оптимальное управление равно  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t) \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t)$ , то над состоянием  $\mathbf{x}(t)$  производится линейное преобразование  $\mathbf{K}(t)$ , а затем с помощью преобразования  $-\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t)$  получается само управление. Система с обратной связью является, таким образом, линейной системой с зависящими от времени параметрами. Так как  $\mathbf{R}(t)$  и  $\mathbf{B}(t)$  — известные матрицы, то поведение системы определяется матрицей  $\mathbf{K}(t)$ . Матрицу  $\mathbf{K}(t)$  часто называют «матрицей усиления».

Переходный процесс  $\mathbf{x}(t)$  оптимальной системы является решением дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}(t) \mathbf{x}(t). \quad (9.79)$$

где матрица  $\mathbf{G}(t)$  [см. уравнение (9.63)] размера  $n \times n$  определяется как

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t) \mathbf{K}(t). \quad (9.80)$$

На рис. 9.2 показана модель оптимальной системы  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}(t) \mathbf{x}(t)$ .

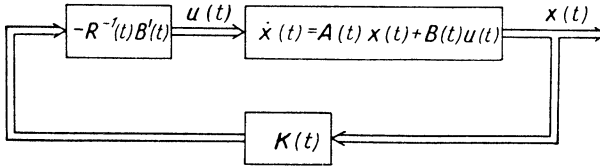


Рис. 9.1. структура оптимальной системы регулирования состояния. «Утолщенные» каналы обозначают, что по ним передаются векторные сигналы

**Вычисление матрицы усиления  $\mathbf{K}(t)$ .** Положительно определенная матрица  $\mathbf{K}(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$  есть решение матричного уравнения Риккати:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}(t) = & -\mathbf{K}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}'(t) \mathbf{K}(t) + \\ & + \mathbf{K}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t) \mathbf{K}(t) - \mathbf{Q}(t) \end{aligned} \quad (9.81)$$

с граничным условием

$$\mathbf{K}(T) = \mathbf{F}. \quad (9.82)$$

Матричное уравнение Риккати нелинейно, и поэтому найти его решение в замкнутой форме, как правило, невозможно. Следовательно, вычислять  $\mathbf{K}(t)$  надо при помощи цифровой вычислительной машины. Такие вычисления могут быть основаны, например, на аппроксимации  $\dot{\mathbf{K}}(t)$ . Напомним, что

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{K}(t + \Delta) - \mathbf{K}(t)}{\Delta}, \quad (9.83)$$

и поэтому уравнение (9.81) можно решить приближенно, используя формулу

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t + \Delta) \simeq & \mathbf{K}(t) + \Delta \{ -\mathbf{K}(t) \mathbf{A}(t) - \\ & - \mathbf{A}'(t) \mathbf{K}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t) \mathbf{K}(t) - \\ & - \mathbf{Q}(t) \}. \end{aligned} \quad (9.84)$$

Уравнение Риккати решают в «обратном времени», используя малые  $\Delta < 0$  и полагая  $\mathbf{K}(T) = \mathbf{F}$ . Такие вычисления с помощью современной цифровой вычислительной машины можно проделать очень быстро. Естественно, что чем меньше величина  $\Delta$ , тем лучше аппроксимация.

Важно понять, что матрица усиления  $\mathbf{K}(t)$  не зависит от состояния, и поэтому, указав  $J_1$ , матрицу  $\mathbf{K}(t)$  можно вычислить до начала работы системы. Проиллюстрируем эти теоретические положения простым примером.

**Пример 9.1.** Рассмотрим систему второго порядка (объект с двойным интегрированием)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.85)$$

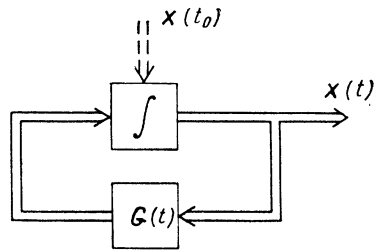


Рис. 9.2. Модель оптимального регулирования состояния (9.79)

с функционалом

$$J_1 = \frac{1}{2} [x_1^2(3) + 2x_2^2(3)] + \frac{1}{2} \int_0^3 [2x_1^2(t) + 4x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)] dt. \quad (9.86)$$

Для системы (9.85) имеем

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (9.87)$$

Для функционала (9.86) имеем

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad R(t) = \frac{1}{2}; \quad t_0 = 0; \quad T = 3. \quad (9.88)$$

Пусть  $K(t)$  — матрица размера  $2 \times 2$ :

$$K(t) = \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix}. \quad (9.89)$$

Тогда оптимальное управление (скаляр) определяется уравнением

$$u(t) = -R^{-1}(t) B'(t) K(t) x(t) = -2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -2 [k_{12}(t)x_1(t) + k_{22}(t)x_2(t)]. \quad (9.90)$$

Уравнение Риккати имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11}(t) & \dot{k}_{12}(t) \\ \dot{k}_{12}(t) & \dot{k}_{22}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (9.91)$$

Граничным условием при  $t = 3$  является

$$\begin{bmatrix} k_{11}(3) & k_{12}(3) \\ k_{12}(3) & k_{22}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (9.92)$$

После перемножения матриц, входящих в уравнение (9.91), получим три дифференциальных уравнения и соответствующие им граничные условия:

$$\begin{aligned} \dot{k}_{11}(t) &= 2k_{12}^2(t) - 2, & k_{11}(3) &= 1; \\ \dot{k}_{12}(t) &= -k_{11}(t) + 2k_{12}(t)k_{22}(t) - 1, & k_{12}(3) &= 0; \\ \dot{k}_{22}(t) &= -2k_{12}(t) + 2k_{22}^2(t) - 4, & k_{22}(3) &= 2. \end{aligned} \quad (9.93)$$

Если решить уравнения (9.93) для  $k_{12}(t)$  и  $k_{22}(t)$ , то мы сможем получить оптимальное управление  $u(t)$  при помощи уравнения (9.90).

Рассмотрим теперь, необходима ли управляемость?<sup>1</sup>

В § 9.3 мы не требовали управляемости системы. Так как уравнением состояния системы является

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (9.94)$$

использование функционала  $J_1$  означает, что мы хотим удержать состояние системы  $x(t)$  вблизи нуля. Управляемость означает, что можем найти управление, способное перевести состояние в нуль (а следовательно, и управление, удерживающее  $x(t)$  вблизи нуля). Является ли управляемость системы (9.49) необходимым условием того, что оптимальное решение выражается законом управления 9.1? Это условие не является необходи-

<sup>1</sup> См. § 4.15 и 4.16.

мым, потому что вклад неуправляемых компонент в функционал всегда конечен, если конечен интервал управления  $[t_0, T]$ . В следующем параграфе мы потребуем управляемости системы, чтобы обеспечить конечность стоимости при  $T \rightarrow \infty$ , а пока покажем, что можно найти оптимальное управление для двух неуправляемых систем.

**Пример 9.2.** Рассмотрим «панболее неуправляемую» систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t), \quad (9.95)$$

где

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{0} \text{ при любом } t \quad (9.96)$$

с функционалом  $J$ . Очевидно, что величина  $\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) \rangle$  не зависит от  $\mathbf{u}(t)$ . Следует ожидать, что оптимальное управление  $\mathbf{u}(t)$  должно быть равно нулю, так как  $\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \rangle$  не будет ничего добавлять к стоимости. Это действительно так, потому что оптимальное управление равно  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t) \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t)$ . Так как  $\mathbf{B}'(t) = \mathbf{0}$ , то и  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ .

**Пример 9.3.** Рассмотрим неуправляемую систему второго порядка

$$\dot{x}_1(t) = ax_2(t) + u(t); \quad (9.97)$$

и функционал

$$\dot{x}_2(t) = bx_2(t)$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^T [x_1^2(t) + hx_2^2(t) + u^2(t)] dt. \quad (9.98)$$

Мы предоставляем читателю проверить, что оптимально управление

$$u(t) = -k_{11}(t) x_1(t) - k_{12}(t) x_2(t) \quad (9.99)$$

и что уравнение Риккати дает три дифференциальных уравнения вида

$$\begin{aligned} \dot{k}_{11}(t) &= k_{11}^2(t) - 1, & k_{11}(T) &= 0; \\ \dot{k}_{12}(t) &= -ak_{11}(t) - bk_{12}(t) + k_{11}(t)k_{12}(t), & k_{12}(T) &= 0; \\ \dot{k}_{22}(t) &= -2ak_{12}(t) - 2bk_{22}(t) - k_{12}^2(t) - h, & k_{22}(T) &= 0. \end{aligned} \quad (9.100)$$

Рассмотрим теперь систему (9.97). Так как управление  $u(t)$  не влияет на переменную  $x_2(t)$ , то оно не оказывает влияния в функционале  $J_1$  на член  $hx_2^2(t)$ . Следует поэтому ожидать, что оптимальное управление не будет зависеть от  $h$ . Это действительно так, потому что управление [см. уравнение (9.99)] зависит только от  $k_{11}(t)$  и  $k_{12}(t)$ ; уравнения относительно  $\dot{k}_{11}(t)$  и  $\dot{k}_{12}(t)$  (9.100) не зависят от  $k_{22}(t)$ , а  $h$  фигурирует только в уравнении относительно  $\dot{k}_{22}(t)$ . Однако, хотя координатой  $x_2(t)$  и нельзя управлять, управление должно зависеть от  $x_2(t)$ . Дело в том, что при  $a \neq 0$  величина  $x_2(t)$  влияет на  $x_1(t)$ . Иначе говоря, если  $a \neq 0$ , то и  $k_{12}(t) \neq 0$ . Если же  $a = 0$ , то управление не должно зависеть от  $x_2(t)$  и поэтому  $k_{12}(t)$  обращается в нуль. Это так, потому что при  $a = 0$

$$\dot{k}_{11}(t) = k_{11}^2(t) - 1 \text{ не зависит от } k_{12}(t) \quad (9.101)$$

и

$$\dot{k}_{12}(t) = k_{12}(t) [k_{11}(t) - b], \quad (9.102)$$

что после интегрирования дает

$$k_{12}(t) = k_{12}(0) \exp \int_0^t [k_{11}(\tau) - b] d\tau. \quad (9.103)$$

Но так как  $k_{12}(T) = 0$  и  $\exp \int_0^T [k_{11}(\tau) - b] d\tau \neq 0$ , то, следовательно,  $k_{12}(0) = 0$

и поэтому

$$k_{12}(t) = 0 \text{ при любом } t \in [t_0, T]. \quad (9.104)$$

Из этих двух примеров видно, что оптимальное управление для неуправляемых систем существует и имеет физический смысл.



**Упражнение 9.1.** Рассмотрите систему (9.97) с функционалом

$$J_1 = \frac{1}{2} [x_1^2(T) + gx_1(T)x_2(T) + mx_2^2(T)] + \frac{1}{2} \int_0^T [x_1^2(t) + nx_1(t)x_2(t) + hx_2^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)] dt. \quad (9.105)$$

Покажите, что оптимальное управление будет функцией только от  $x_1(t)$  в том случае, когда

$$a = g = n = 0. \quad (9.106)$$

Согласуйте математический результат с вашей физической интуицией.

Подчеркнем, что оптимальная система с обратной связью линейна, но имеет переменные параметры, если интервал управления  $[t_0, T]$  конечен. Это справедливо и в том случае, когда система и функционал инвариантны во времени, т. е. если  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  и  $\mathbf{R}(t)$  — постоянные матрицы. Свойство линейности очень полезно, но практическая реализация функций, зависящих от времени, должна осуществляться с помощью цифровой вычислительной машины.

Инженера не удивит необходимость изменять во времени параметры управляющего устройства в системе с переменными параметрами. Однако для системы с постоянными параметрами он предпочел бы иметь управляющее устройство, инвариантное во времени. В гл. 7 и 8 мы видели, что такие устройства можно построить, если время перехода  $T$  наперед не задано. К сожалению, мы не можем не задавать  $T$  для функционала  $J_1(\mathbf{u})$ , так как нам не задано конечно состояние (почему?). В следующем параграфе покажем, что если принять  $T \rightarrow \infty$ , то можно получить инвариантное во времени управляющее устройство для инвариантных во времени системы и функционала.

### 9.5. ЗАДАЧА О РЕГУЛЯТОРЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ИНВАРИАНТНОЙ ВО ВРЕМЕНИ СИСТЕМЫ ПРИ $T = \infty$

Предположим, что  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{R}(t)$  и  $\mathbf{Q}(t)$  — постоянные матрицы, и поэтому как линейная система, так и функционал инвариантны во времени. Примем, что  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$ . Очевидно, что матрица  $\mathbf{K}(t)$  опять-таки будет решением уравнения Риккати, которое теперь удовлетворяет граничному условию  $\mathbf{K}(T) = \mathbf{0}$ .

Возникает вопрос: при каких обстоятельствах матрица  $\mathbf{K}(t)$  будет постоянной? Ясно, что если матрица усиления  $\mathbf{K}(t)$  постоянна, то оптимальная система будет линейной и инвариантной во времени. С практической точки зрения такую оптимальную систему построить очень просто.

Следующий закон управления устанавливает условия, при которых матрица  $\mathbf{K}(t)$  постоянна.

**Закон управления 9.2.** Даны управляемая линейная инвариантная во времени система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (9.107)$$

и функционал

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}\mathbf{u}(t) \rangle] dt, \quad (9.108)$$

где  $\mathbf{u}(t)$  не ограничено, а  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  — положительно определенные матрицы.

Оптимальное управление существует, единственно и определяется уравнением

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}(t), \quad (9.109)$$

где  $\hat{K}$  — постоянная положительно определенная матрица размера  $n \times n$ , являющаяся решением нелинейного матричного алгебраического уравнения

$$-\hat{K}A - A'\hat{K} + \hat{K}BR^{-1}B'\hat{K} - Q = 0. \quad (9.110)$$

При этом оптимальная траектория является решением линейной инвариантной во времени однородной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = G\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) \text{ задано}, \quad (9.111)$$

где  $G$  определяется как

$$G = A - BR^{-1}B'\hat{K}. \quad (9.112)$$

Минимальная стоимость  $J_1^*$  равна

$$\hat{J}_1^*[\mathbf{x}(t)] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(t), \hat{K}\mathbf{x}(t) \rangle. \quad (9.113)$$

Обсудим некоторые отличия закона управления 9.2 от закона 9.1.

Прежде всего мы требуем, чтобы система (9.107) была полностью управляемой. Это означает, что матрица

$$[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] \quad (9.114)$$

должна содержать  $n$  линейно независимых векторов-столбцов<sup>1</sup>. Требование управляемости гарантирует конечность минимальной стоимости. Если бы система была неуправляема и неустойчива, то функционал был бы бесконечен при любых управлениях из-за бесконечности интервала управления. В этом случае отличить оптимальное управление от всех остальных невозможно.

Другим отличием закона управления 9.2 является  $F = 0$ . Таким образом, мы не рассматриваем никакой конечной стоимости типа  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(T), F\mathbf{x}(T) \rangle$ . Конечная стоимость при  $T = \infty$  не имеет практического смысла, поскольку на практике представляет интерес переход системы из одного состояния в другое в течение конечного времени. Мы полагаем  $T \rightarrow \infty$  по следующим причинам. Во-первых, нам желательно гарантировать, что состояние после начального переходного интервала остается в дальнейшем близким к нулю. Во-вторых, мы хотим избежать (довольно произвольного) задания большого конечного времени  $T$ . В-третьих, мы не смогли бы гарантировать, что при  $t > T$  состояние останется близким к нулю.

Рассмотрим теперь матрицу  $K$ . Калман показал<sup>2</sup>, что из предположений об управляемости и из  $F = 0$  следует существование  $\lim_{T \rightarrow \infty} K(t)$ , его единственность, а также равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K(t) = \hat{K}, \quad (9.115)$$

где  $\hat{K}$  — положительно определенная матрица, являющаяся решением алгебраического уравнения (9.110).

Полезна следующая интерпретация матрицы  $\hat{K}$ . Рассмотрим уравнение Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t)A - A'K(t) + K(t)BR^{-1}B'K(t) - Q \quad (9.116)$$

с граничным условием  $K(T) = 0$ . Представьте себе момент времени  $T$

<sup>1</sup> См. § 4.16.

<sup>2</sup> См. [110] или [107].

«начальным» и  $K(T)$  — «начальным условием». Тогда матрицу  $\hat{K}$  можно представлять себе «квазипостоянным» (асимптотическим) решением уравнения Риккати при уменьшении времени. При  $T \rightarrow \infty$  «переход», вызванный «начальным условием»  $K(T) = 0$ , затухает, и квазипостоянный интервал, в течение которого  $K(t) = \hat{K}$ , неограниченно возрастает. Как показано на рис. 9.3,  $K(t) \rightarrow \hat{K}$  для любого конечного времени  $t$ .

Так как оптимальное управление равно  $u(t) = -R^{-1}B'\hat{K}x(t)$ , то оптимальная траектория есть решение однородного уравнения

$$\dot{x}(t) = Gx(t), \quad (9.117)$$

где

$$G = A - BR^{-1}B'\hat{K}. \quad (9.118)$$

**Лемма 9.8.** Собственные значения матрицы  $G = A - BR^{-1}B'\hat{K}$  должны иметь отрицательные действительные части, и поэтому оптимальная система (9.117) устойчива<sup>1</sup>.

**Доказательство.** Предположим, что одно или более

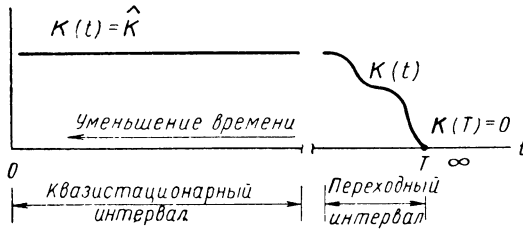


Рис. 9.3. Грубая интерпретация постоянной матрицы  $\hat{K}$ . При  $T \rightarrow \infty$  «переходный период» располагается в бесконечности, и квазипостоянный интервал растягивается на все конечные времена

собственных значений  $G$  имеют неотрицательные вещественные части. В этом случае некоторые из фазовых координат не будут стремиться к нулю, и, следовательно, стоимость  $J_1^*$  будет бесконечна.

Таким образом, матрица  $\hat{K}$  должна быть такой, чтобы собственные значения  $G$  имели отрицательные вещественные части, хотя одно или более собственных значений матрицы  $A$  могут иметь неотрицательные вещественные части. Иначе говоря, если даже управляемая система неустойчива, то оптимальная система должна быть абсолютно устойчива.

Проиллюстрируем эти понятия на простом примере.

**Пример 9.4.** Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = u(t). \end{cases} \quad (9.119)$$

Известно<sup>2</sup>, что эти уравнения являются представлением в пространстве состояний системы, вход и выход которой связаны передаточной функцией

$$\frac{x_1(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2}, \quad (9.120)$$

т. е. эта система представляет собой так называемый объект с двойным интегрированием. Рассмотрим функционал

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + 2bx_1(t)x_2(t) + ax_2^2(t) + u^2(t)] dt, \quad (9.121)$$

где принято, что

$$a - b^2 > 0. \quad (9.122)$$

Для этой задачи имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix}; \quad R = 1. \quad (9.123)$$

Уравнение (9.122) гарантирует положительную определенность  $Q$ .

<sup>1</sup> См. § 3.26.

<sup>2</sup> См., например, § 7.2.

Из уравнений (9.123) и (9.109) находим, что оптимальное управление

$$u(t) = -\hat{k}_{12}x_1(t) - \hat{k}_{22}x_2(t). \quad (9.124)$$

Из уравнений (9.123) и (9.110) находим

$$-\begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} \\ \hat{k}_{12} & \hat{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} \\ \hat{k}_{12} & \hat{k}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} \\ \hat{k}_{12} & \hat{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ 1] \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} \\ \hat{k}_{12} & \hat{k}_{22} \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.125)$$

Выполнив указанные перемножения матриц, получим три алгебраических уравнения

$$\hat{k}_{12}^2 = 1; \quad (9.126)$$

$$-\hat{k}_{11} + \hat{k}_{12}\hat{k}_{22} - b = 0; \quad (9.127)$$

$$-2\hat{k}_{12} - \hat{k}_{22}^2 - a = 0. \quad (9.128)$$

Решения этих уравнений

$$\hat{k}_{12} = \pm 1; \quad (9.129)$$

$$\hat{k}_{11} = \hat{k}_{12}\hat{k}_{22} - b; \quad (9.130)$$

$$\hat{k}_{22} = \pm \sqrt{a + 2\hat{k}_{12}}. \quad (9.131)$$

Чтобы устранить неопределенность знака, мы должны воспользоваться положительной определенностью  $\hat{K}$ , из которой следует

$$\hat{k}_{11} > 0; \quad (9.132)$$

$$\hat{k}_{11}\hat{k}_{22} - \hat{k}_{12}^2 > 0. \quad (9.133)$$

Из последних неравенств вытекает, что

$$\hat{k}_{22} > 0. \quad (9.134)$$

Из уравнений (9.134) и (9.131) получим

$$\hat{k}_{22} = \sqrt{a + 2\hat{k}_{12}}. \quad (9.135)$$

Величина

$$\hat{k}_{12} = +1 \quad (9.136)$$

обеспечивает положительную определенность матрицы  $\hat{K}$ . Чтобы показать это, допустим, что

$$\hat{k}_{12} = -1. \quad (9.137)$$

Тогда из уравнений (9.137) и (9.135) находим

$$\hat{k}_{22} = \sqrt{a - 2}. \quad (9.138)$$

Поскольку  $\hat{k}_{22}$  — действительное число, то должно быть  $a > 2$ .

Из уравнений (9.130), (9.132), (9.137) и (9.138) получим

$$\hat{k}_{11} = -\hat{k}_{22} - b = -\sqrt{a - 2} - b > 0, \quad (9.139)$$

и поэтому выполняется соотношение

$$b < -\sqrt{a - 2} < 0. \quad (9.140)$$

Уравнения (9.133), (9.129), (9.139) и (9.138) дают неравенство

$$-(a - 2) - b\sqrt{a - 2} > 1 \quad (9.141)$$

или эквивалентное ему

$$b^2 > \frac{(a - 1)^2}{a - 2} = \frac{(a - 2 + 1)^2}{a - 2} = a + \frac{1}{a - 2} > a, \quad (9.142)$$

откуда

$$b^2 > a. \quad (9.143)$$

\*

Но неравенства (9.143) и (9.122) противоречат друг другу. Следовательно, величина  $\hat{k}_{12} = -1$  не может сделать матрицу  $\hat{K}$  положительно определенной, и поэтому решением должно быть

$$\left. \begin{aligned} \hat{k}_{12} &= +1; \\ \hat{k}_{22} &= \sqrt{a+2}; \\ \hat{k}_{11} &= \sqrt{a+2} - b. \end{aligned} \right\} \quad (9.144)$$

Итак, оптимальное управление [см. уравнение (9.124)] должно быть равно

$$u(t) = -x_1(t) - \sqrt{a+2} x_2(t). \quad (9.145)$$

Таким образом, для данной задачи  $u(t)$  не зависит от  $b$ .

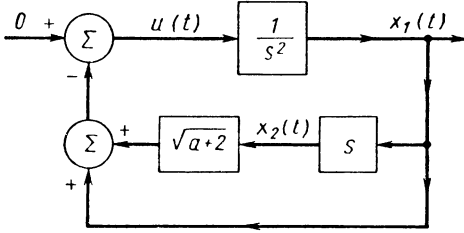


Рис. 9.4. Оптимальный регулятор состояния для системы, рассматриваемой в примере 9.4

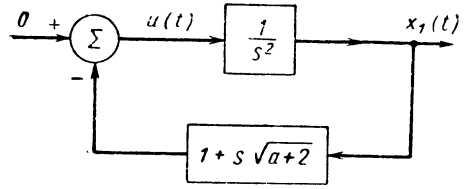


Рис. 9.5. Система с обратной связью, полученная путем преобразования блок-схемы, показанной на рис. 9.4

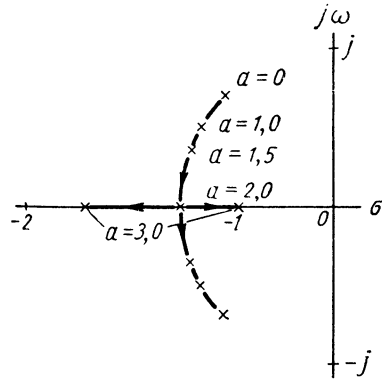
Блок-схема оптимальной системы показана на рис. 9.4. На этой схеме  $x_1(t)$  — выход объекта, обозначенного через  $\frac{1}{s^2}$ . Так как  $x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$ , дифференцирование обозначено блоком  $s$ , через который пропускается сигнал  $x_1(t)$ , в соответствии с обозначением производной в преобразовании Лапласа. На рис. 9.5 показана преобразованная блок-схема, где показано, что оптимальная система содержит в цепи обратной связи компенсирующую цепочку с передаточной функцией  $1 + s\sqrt{a+2}$ . Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\begin{aligned} G^*(s) &= \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{1 + s\sqrt{a+2}}{s^2}} = \\ &= \frac{1}{s^2 + s\sqrt{a+2} + 1}. \end{aligned} \quad (9.146)$$

Таким образом, полюса оптимальной системы с обратной связью располагаются в точках

$$s = -\frac{\sqrt{a+2}}{2} \pm \frac{1}{2} j \sqrt{a-2}. \quad (9.147)$$

Рис. 9.6. Корневой годограф оптимальной системы с обратной связью при изменении  $a$



при изменении  $a$  от 0 до  $\infty$ . При  $a = 0$  полюса располагаются при  $s = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm$

$\pm j \frac{\sqrt{2}}{2}$ , что соответствует случаю [см. уравнение (9.121)], когда сигнал  $x_2(t)$  (т. е. производная от выхода) не «взвешивается» в функционале. С ростом  $a$  полюса оптимальной системы стремятся к действительной оси плоскости  $s$ , что выражается в уменьшении колебательности переходного процесса и его растягивании. При  $a > 2$  оба полюса — действительные отрицательные числа. Итак, чем «сильнее взвешивается» производная выхода, тем меньше колебательность системы.

Теперь следует сделать еще несколько замечаний о решении алгебраических уравнений (9.126)—(9.128). Заметим, что хотя  $\hat{k}_{11}$  и не фигурирует в выражении для оптимального управления, мы, тем не менее, должны его вычислить, чтобы найти такие решения алгебраических уравнений, при которых матрица  $\hat{K}$  положительно определена. Читателю не следует недооценивать трудностей выделения соответствующего решения этих квадратных уравнений. Часто легче решить дифференциальное уравнение Риккати и найти его «квазипостоянное» решение, чем выделить положительно определенное решение алгебраического уравнения (9.110).

### 9.6. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Преыдущие четыре параграфа содержали теорию задачи о регуляторе состояния. Мы иллюстрировали смысл этой теории на простых примерах. В этом параграфе рассмотрим систему первого порядка и проиллюстрируем реакцию оптимальной системы несколькими временными графиками. Хотя система очень проста, результаты иллюстрируют свойства оптимальных систем, и нам кажется, что читатель сумеет глубже понять их поведение.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \quad (9.148)$$

и функционал

$$J_1 = \frac{1}{2} fx^2(T) + \frac{1}{2} \int_0^T [qx^2(t) + ru^2(t)] dt. \quad (9.149)$$

Предположим, что

$$f \geq 0; \quad q > 0; \quad r > 0. \quad (9.150)$$

На основании закона управления 9.1 оптимально управление

$$u(t) = -\frac{1}{r} k(t) x(t), \quad (9.151)$$

где скаляр  $k(t)$  есть решение уравнения Риккати

$$\dot{k}(t) = -2ak(t) + \frac{1}{r} k^2(t) - q \quad (9.152)$$

с граничным условием

$$k(T) = f. \quad (9.153)$$

Из уравнения (9.152) находим

$$\int_{k(t)}^f \frac{dk(\tau)}{\frac{1}{r} k^2(\tau) - 2ak(\tau) - q} = \int_t^T d\tau. \quad (9.154)$$

Это выражение можно проинтегрировать и получить

$$k(t) = r \frac{\beta + a + (\beta - a) \frac{\frac{f}{r} - a - \beta}{\frac{f}{r} - a + \beta} e^{2\beta(t-T)}}{1 - \frac{\frac{f}{r} - a - \beta}{\frac{f}{r} - a + \beta} e^{2\beta(t-T)}}, \quad (9.155)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{q}{r} + a^2}. \quad (9.156)$$

Таким образом, в данном случае мы можем решить уравнение Риккати аналитически.

Оптимальная траектория является решением дифференциального уравнения первого порядка с переменным коэффициентом

$$\dot{x}(t) = \left[ a - \frac{1}{r} k(t) \right] x(t), \quad x(0) \text{ задано.} \quad (9.157)$$

Таким образом,

$$x(t) = x(0) \exp \int_0^t \left[ a - \frac{1}{r} k(\tau) \right] d\tau \quad (9.158)$$

На рис. 9.7 показана структура оптимальной системы. Мы нашли  $k(t)$ , моделируя уравнение Риккати; начальное состояние  $k(0)$  получается из уравнения (9.155) при  $t = 0$ . Для получения оптимального

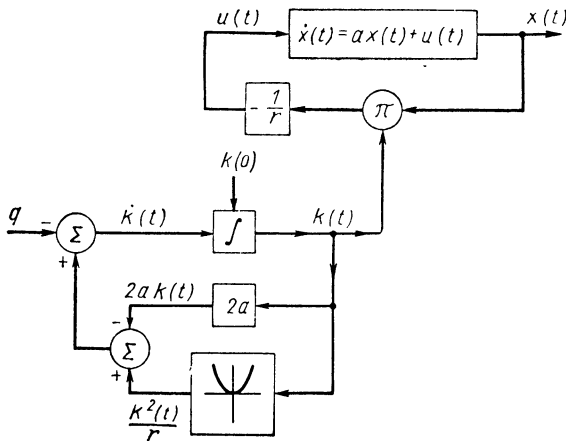


Рис. 9.7. Оптимальный регулятор состояния системы  $\dot{x}(t) = ax(t) + u(t)$ . «Коэффициент усиления»  $k(t)$  получается путем моделирования уравнения (9.152). Начальное значение  $k(0)$  вычислено заранее

с уменьшением  $r$  управление на начальной части интервала управления становится довольно большим; при  $r \rightarrow 0$  оптимальное управление приближается к импульсу при  $t = 0$ .

На рис. 9.8, в показаны решения уравнения Риккати  $k(t)$  с  $r$  в качестве параметра. Заметим, что с уменьшением  $r$ ,  $k(t)$  почти постоянно на начальном участке интервала управления; для малых значений  $r$  временная зависимость  $k(t)$  проявляется лишь в самом конце интервала управления. С ростом  $r$ ,  $k(t)$  становится действительно зависящим от времени коэффициентом усиления.

На рис. 9.9 показано решение уравнения Риккати для различных значений конечного времени  $T$  и двух граничных условий  $k(T) = 0$  и  $k(T) = 1$  (т. е.  $f = 0$  и  $f = 1$ ). Значения остальных констант выбраны  $a = -1$ ,  $q = r = 1$ . На рис. 9.9 показано, что функция  $k(t)$  стремится к одному и тому же «квазипостоянному значению в обратном времени» с ростом  $T$  независимо от конечных условий. Это обстоятельство можно проверить аналитически, используя уравнение (9.156), которое дает (так как  $\beta$  положительно) соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} k(t) = r(\beta + a) = ar + r \sqrt{\frac{q}{r} + a^2}. \quad (9.159)$$

Результаты, изображенные на рис. 9.8 и 9.9, получены при  $a = -1$ , т. е. для устойчивой системы  $\dot{x}(t) = ax(t) + u(t)$ . Предположим, что

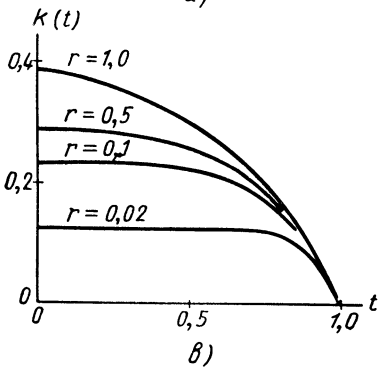
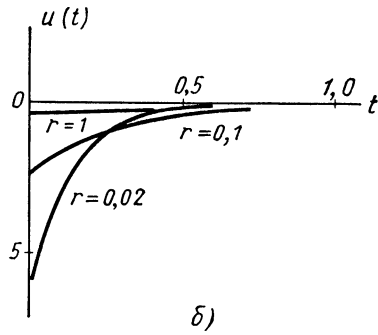
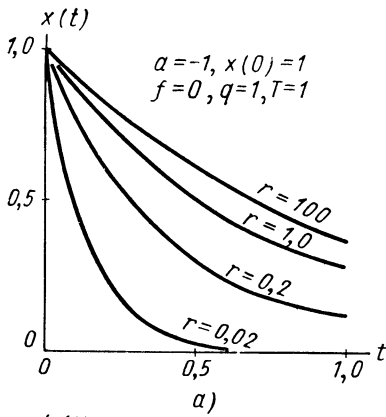


Рис. 9.8. а) Переходный процесс оптимального регулятора при  $a = -1$  (устойчивый случай); б) оптимальное управление; в) решение уравнения Риккати  $k(t)$

Рис. 9.9. Решение  $k(t)$  уравнения Риккати для различных значений конечного времени  $T$

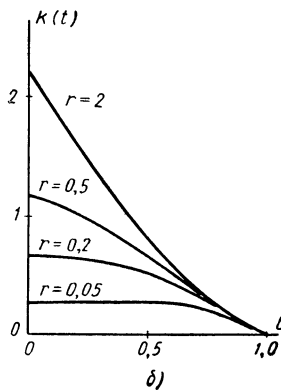
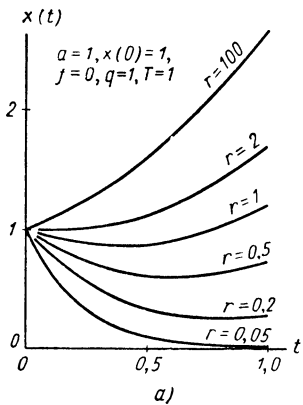
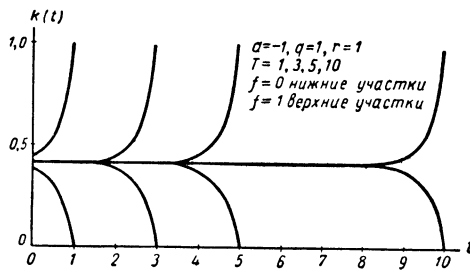


Рис. 9.10. а) Переходный процесс оптимального регулятора при  $a = +1$  (неустойчивый случай); б) решение  $k(t)$  уравнения Риккати при  $a = +1$



$a = +1$  (система неустойчива). На рис. 9.10, *a* показано состояние  $x(t)$  с  $r$  в качестве параметра при значениях  $a = 1$ ,  $x(0) = 1$ ,  $f = 0$  и  $q = 1$ . Реакция системы интересна тем, что она иллюстрирует некоторые особенности поведения оптимальных систем. Прежде всего заметим, что для больших значений  $r$  регулятор состояния плохо регулирует фазовую координату. Дело в том, что для системы «дешевле» иметь большую ошибку на конечном интервале времени, чем использовать большие усилия управления. С уменьшением  $r$  фазовая координата начинает убывать от исходного значения  $x(0)$ , достигает минимума, а затем увеличивается в течение остальной части интервала управления. Такое поведение вызвано тем, что  $k(T) = 0$ , откуда следует, что оптимальное управление стремится к нулю с  $t \rightarrow T$ . На рис. 9.10, *б* показано поведение функции  $k(t)$  с изменением  $r$ . Еще раз отметим, что  $k(t)$  почти постоянно при малых значениях  $r$  в начале интервала управления  $[0, 1]$ .

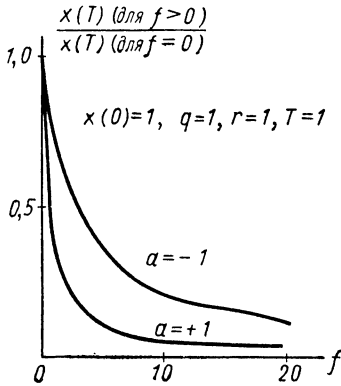


Рис. 9.11. Влияние величины  $f$  на конечное состояние  $x(T)$  оптимального регулятора при  $a = -1$  (устойчивый случай) и  $a = +1$  (неустойчивый случай)

Рассмотрим далее влияние граничного условия  $k(T) = f$  на конечное состояние  $x(T)$  как для устойчивой ( $a = -1$ ), так и для неустойчивой ( $a = +1$ ) систем. На рис. 9.11 показан график отношения

$$\frac{x(T) \text{ (для } f > 0)}{x(T) \text{ (для } f = 0)} \quad (9.160)$$

в зависимости от  $f$  для обоих случаев при значениях  $x(0) = q = r = T = 1$ . Из рис. 9.8, *a* видно, что при  $f = 0$  и  $a = -1$ ,  $x(1) = 0,2184$ ; из рис. 9.10, *a* видно, что при  $f = 0$  и  $a = +1$ ,  $x(1) = 1,2244$ . Как следует из рис. 9.11,

включение конечной стоимости  $\frac{1}{2}fx^2(T)$  приводит к тому, что регулятор для неустойчивой системы оказывается лучше регулятора устойчивой системы, особенно при малых значениях  $f$ . В каждом из случаев  $\lim_{f \rightarrow \infty} x(T) = 0$ , но  $x(T) \neq 0$  ни для какого конечного  $f$ .

Обратимся теперь к случаю  $T = \infty$ . Из закона управления 9.2 находим, что оптимально управление

$$u(t) = -\frac{1}{r}\hat{k}x(t), \quad (9.161)$$

где  $\hat{k}$  — положительный корень алгебраического уравнения

$$\frac{1}{r}\hat{k}^2 - 2a\hat{k} - q = 0, \quad (9.162)$$

поэтому  $\hat{k}$  определяется уравнением

$$\hat{k} = ar + r\sqrt{\frac{q}{r} + a^2}. \quad (9.163)$$

Сравнивая уравнения (9.163) и (9.159), замечаем

$$\hat{k} = \lim_{T \rightarrow \infty} k(t) \text{ для любых } f \geq 0. \quad (9.164)$$

Если  $a = -1$  и  $q = r = 1$ , то  $\hat{k} = -1 + \sqrt{2} \simeq 0,414$ , что действительно является «квазипостоянным» значением  $k(t)$  (см. рис. 9.9). Если

$a = +1$ ,  $q = 1$  и  $r = 0,05$ , то «квазипостоянным» значением  $k(t)$  (см. рис. 9.10б) является  $\hat{k} \approx 0,278$ .

**Упражнение 9.2.** Рассмотрим систему  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  и функционал

$$J_1 = \frac{1}{2} \langle x(T), Fx(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T [\langle x(t), Qx(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle] dt. \quad (9.165)$$

Считайте, что  $F$  положительно определена и удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$-FA - A'F + FBR^{-1}B'F - Q = 0. \quad (9.166)$$

Покажите, что минимальная стоимость равна  $J_1^* = \frac{1}{2} \langle x(t), Fx(t) \rangle$  для любого  $t$  и  $T$  как конечного, так и бесконечного. Покажите, что оптимальное управление является линейной инвариантной функцией состояния. Можете ли вы объяснить, что следует из уравнения (9.166)?

**Упражнение 9.3.** Рассмотрите систему с передаточной функцией

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0}. \quad (9.167)$$

Пусть  $x_1(t) = y(t)$  и  $x_2(t) = \dot{y}(t)$ . Рассмотрите функционал

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x_1^2(t) + qx_2^2(t) + ru^2(t)] dt; \quad q > 0; \quad r > 0. \quad (9.168)$$

Найдите оптимальное управление и постройте блок-схему (подобно рис. 9.5) оптимальной системы. Для каждого из следующих случаев

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 1; \quad (9.169a)$$

$$a_0 = 0; \quad a_1 = -1; \quad (9.169б)$$

$$a_0 = 2; \quad a_1 = 3; \quad (9.169в)$$

$$a_0 = -1; \quad a_1 = 0; \quad (9.169г)$$

$$a_0 = 1; \quad a_1 = 0 \quad (9.169д)$$

а) начертите корневые годографы оптимальной системы с обратной связью при  $r = 1$  и  $r = 0,1$  в зависимости от  $q$ ;

б) начертите корневые годографы оптимальной системы с обратной связью для  $q = 1$  и  $q = 0,1$  в зависимости от  $r$ ;

в) сделайте выводы о характере системы (колебательная, апериодическая и т. д.).  
Следующие упражнения предназначены для читателей, которые могут пользоваться цифровой вычислительной машиной и умеют программировать.

**Упражнение 9.4.** Рассмотрите систему первого порядка  $\dot{x}(t) = (2e^{-t} - 1)x(t) + u(t)$  и функционал

$$\frac{1}{2} \int_0^2 [x^2(t) + u^2(t)] dt. \quad \text{Считайте } x(0) = 0.$$

Начертите оптимальные кривые для  $x(t)$  и  $u(t)$ . Повторите это же упражнение для системы  $\dot{x}(t) = (\sin 10t)x(t) + u(t)$ ;  $x(0) = 0$ .

**Упражнение 9.5.** Рассмотрите систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t); \quad \dot{x}_2(t) = u(t); \quad (9.170)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 1; \quad x_2(0) = 0 \quad (9.171)$$

и функционал

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^T [x_1^2(t) + 0,1 x_2^2(t) + 0,1 u^2(t)] dt. \quad (9.172)$$

Начертите графики  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  в зависимости от  $t$  на интервале  $0 \leq t \leq T$  для  $T = 1$ ;  $T = 2$ ;  $T = 5$ ;  $T = 10$  и  $T = \infty$ . Определите зависящие от времени собственные

значения  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$  оптимальной системы и постройте их временные графики (если необходимо, для вещественной и мнимой частей) на интервале  $0 \leq t \leq 1$  при  $T = 1$  и сравните их с собственными значениями оптимальной системы при  $T = \infty$ .

**Упражнение 9.6.** Рассмотрите систему третьего порядка

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t); \\ x_3(t) &= -ax_3(t) + u(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.173)$$

при  $x_1(0) = 1$ ;  $x_2(0) = x_3(0) = 0$ . Функционал

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + 0,1x_2^2(t) + 0,1u^2(t)] dt. \quad (9.174)$$

Найдите оптимальное управление. Нарисуйте переходной процесс  $x_1(t)$  оптимальной системы при  $a = 0,1$ ;  $a = 1$ ;  $a = 10$  и  $a = 100$ . Сравните полученное  $x_1(t)$  с  $x_1(t)$  из примера 9.5 при  $T = \infty$ . Ваши выводы?

### 9.7. ЗАДАЧА О РЕГУЛЯТОРЕ ВЫХОДА

До сих пор мы имели дело с задачей уменьшения составляющих вектора состояния  $\mathbf{x}(t)$ . В этом параграфе мы рассмотрим задачу о том, как сделать малыми составляющие выходного вектора  $\mathbf{y}(t)$ , а в следующем — кратко исследуем задачу о регуляторе выхода для систем с одним входом и одним выходом.

В этом параграфе покажем, что если управляемая динамическая система наблюдаема, то задачу о регуляторе выхода можно свести к задаче о регуляторе состояния. По сути дела, понятие наблюдаемости позволит нам установить единственность оптимального управления.

Рассмотрим линейную систему с переменными параметрами

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t), \end{aligned} \right\} \quad (9.175)$$

где состояние  $\mathbf{x}(t)$  —  $n$ -мерный вектор-столбец; управление  $\mathbf{u}(t)$  —  $r$ -мерный вектор-столбец; выход  $\mathbf{y}(t)$  —  $m$ -мерный вектор-столбец;

$$0 < m \leq r \leq n. \quad (9.176)$$

Рассмотрим функционал

$$J_2 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{y}(T), \mathbf{F}\mathbf{y}(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [ \langle \mathbf{y}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{y}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) \rangle ] dt. \quad (9.177)$$

Предположим, что

система (9.175) полностью наблюдаема<sup>1</sup>;

управление  $\mathbf{u}(t)$  не ограничено;

$\mathbf{R}(t)$  положительно определена;

$\mathbf{Q}(t)$  положительно полуопределена;

$\mathbf{F}$  положительно полуопределена;

$T$  задано.

Мы хотим найти оптимальное управление, т. е. управление, минимизирующее стоимость  $J_2$ .

Использование функционала  $J_2$  обнаруживает наше желание сделать, а затем удержать близким к нулю выход  $\mathbf{y}(t)$ , не расходуя слишком много энергии на управление. Из наличия конечной стоимости  $\frac{1}{2} \langle \mathbf{y}(T),$

<sup>1</sup> См. § 4.15, определения 4.14 и § 4.17.

$Fy(T)$  следует, что при  $F \neq 0$  мы хотим также гарантировать малую величину выхода в конце интервала управления.

Решим эту задачу, называемую задачей о регуляторе выхода, сведя ее к задаче, которая аналогична задаче о регуляторе состояния, а затем воспользуемся результатами § 9.3, чтобы установить закон оптимального управления.

Подставим  $y(t) = C(t)x(t)$  в уравнение (9.177) и получим соотношение

$$J_2 = \frac{1}{2} \langle x(T), C'(T)FC(T)x(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle x(t), C'(t)Q(t)C(t)x(t) \rangle + \langle u(t), R(t)u(t) \rangle] dt. \quad (9.179)$$

Сравнивая стоимость  $J_2$  (9.179) с  $J_1$  (9.13), найдем, что они идентичны, с той лишь разницей, что матрицы  $F$  и  $Q(t)$  выражения (9.13) заменены матрицами  $C'(T)FC(T)$  и  $C'(t)Q(t)C(t)$  соответственно в уравнении (9.179). Если мы сможем показать, что матрицы  $C'(T)FC(T)$  и  $C'(t)Q(t)C(t)$  положительно полуопределены, когда  $F$  и  $Q(t)$  положительно полуопределены, то соответствие между  $J_1$  и  $J_2$  будет полным.

**Лемма 9.9.** Если  $F$  и  $Q(t)$  положительно полуопределены и если система (9.175) полностью наблюдаема, то матрицы  $C'(T)FC(T)$  и  $C'(t)Q(t)C(t)$  положительно полуопределены.

**Доказательство.** Прежде всего, поскольку  $F$  и  $Q(t)$  симметричны, матрицы  $C'(T)FC(T)$  и  $C'(t)Q(t)C(t)$  также симметричны. Если система (9.175) наблюдаема, то  $C'(t)$  не может быть равна нулю ни при каком  $t \in [t_0, T]$ . Если  $Q(t)$  положительно полуопределена, то  $\langle y(t), Q(t)y(t) \rangle \geq 0$  для любого  $y(t)$ ; следовательно, если  $y(t) = C(t)x(t)$ , то  $\langle C(t)x(t), Q(t)C(t)x(t) \rangle \geq 0$  для всех  $C(t)x(t)$ . Но наблюдаемость предполагает, что каждый выход  $y(t)$  получается при единственном состоянии  $x(t)$ , и поэтому  $\langle x(t), C'(t)Q(t)C(t)x(t) \rangle \geq 0$  при любом  $x(t)$ , а следовательно, матрица  $C'(t)Q(t)C(t)$  положительно полуопределена. Аналогично доказывается положительная полуопределенность  $C'(T)FC(T)$ .

Воспользуемся теперь результатами § 9.3, чтобы установить следующий закон управления.

**Закон управления 9.3 (решение задачи о регуляторе выхода).** Даны линейная наблюдаемая система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t); \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.180)$$

и функционал

$$J_2 = \frac{1}{2} \langle y(T), Fy(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle y(t), Q(t)y(t) \rangle + \langle u(t), R(t)u(t) \rangle] dt. \quad (9.181)$$

Считаем, что управление  $u(t)$  не ограничено,  $F$  и  $Q(t)$  положительно полуопределенные,  $R(t)$  положительно определена,  $T$  фиксировано (задано).

Оптимальное управление существует, единственно и равно

$$u(t) = -R^{-1}(t)B'(t)K(t)x(t), \quad (9.182)$$

где положительно определенная симметричная матрица  $K$  размера  $n \times n$  есть решение уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) = & -K(t)A(t) - A'(t)K(t) + \\ & + K(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t) - C'(t)Q(t)C(t) \end{aligned} \quad (9.183)$$

с граничным условием

$$K(T) = C'(T)FC(T). \quad (9.184)$$

Оптимальное состояние является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]x(t), \quad (9.185)$$

где  $x(t_0)$  задано.

Минимальная стоимость  $J_2^*$  равна

$$J_2^*[x(t), t] = \frac{1}{2} \langle x(t), K(t)x(t) \rangle \quad (9.186)$$

для любых  $x(t)$  и  $t$ .

Прокомментируем некоторые выводы из закона управления 9.3.

Структура оптимального регулятора выхода показана на рис. 9.12. Заметим, что оптимальное управление является функцией состояния, а не выхода  $y(t)$ . Это обстоятельство может разочаровать читателя,

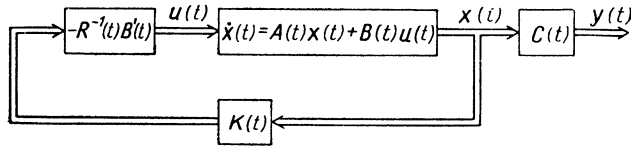


Рис. 9.12. Структура оптимального регулятора выхода. Матрица усиления  $K(t)$  является решением уравнения Риккати (9.183)

поскольку он мог ожидать, что оптимальное управление является функцией от выхода, а не от состояния. Так как размерность вектора состояния в общем случае выше размерности выхода, это означает, что оптимальная система получается сложной. Однако наблюдаемость системы гарантирует, что мы можем вычислить состояние, зная выход. Если бы система не была наблюдаемой, то вычислить состояние по выходу было бы нельзя, и поэтому оптимально управлять системой было бы невозможно.

Поразмыслив, читатель убедится в том, что оптимальное управление «обязано» быть функцией состояния, которое в каждый момент времени содержит всю информацию, необходимую для предсказания будущих значений как самого состояния, так и выхода. Последнее становится очевидным благодаря тому, что оптимальное управление должно использовать всю информацию наиболее «эффективным» образом. Заметим также, что минимальная стоимость  $J_2^*$  является функцией состояния [см. уравнение (9.186)], а не выхода. Один только выход не может определять минимальную стоимость (хотя стоимость  $J_2$  и была выражена через  $y(t)$ ), потому что выход, в общем случае, не содержит всей информации, определяющей будущее процесса.

Обратимся теперь к матрице  $K(t)$ , являющейся решением уравнения Риккати (9.183). Сравнивая (9.183) с (9.61), легко заметить, что в обоих уравнениях члены, включающие  $K(t)$ , одинаковы. Различаются эти выражения тем, что матрица  $Q(t)$  в уравнении (9.61) заменена матрицей  $C'(t)Q(t)C(t)$  в уравнении (9.183). Естественно, что решения  $K(t)$

для задач о регуляторе состояния и о регуляторе выхода будут различны. Тем не менее, поскольку  $K(t)$  является для обеих задач решением уравнения Риккати, все замечания § 9.4 относительно вычисления  $K(t)$  остаются в силе.

Наконец, заметим, что, как и в § 9.3, управляемости линейной системы (9.180) не требуется, если  $T$  конечно<sup>1</sup>.

Сделаем теперь частные выводы для случая линейных инвариантных во времени систем и функционалов при  $T = \infty$ . Воспроизводя результаты § 9.5, получим следующий закон управления.

**Закон управления 9.4.** Дана управляемая и наблюдаемая линейная инвариантная во времени система

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{9.187}$$

и функционал

$$\hat{J}_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\langle \mathbf{y}(t), \mathbf{Q}\mathbf{y}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}\mathbf{u}(t) \rangle] dt.\tag{9.188}$$

Пусть  $\mathbf{u}(t)$  не ограничено, а матрицы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  положительно определены.

Оптимальное управление существует, единственно и равно

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\hat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{x}(t),\tag{9.189}$$

причем постоянная матрица  $\mathbf{K}$  размера  $n \times n$  симметрична, положительно определена и является решением нелинейного инвариантного во времени алгебраического матричного уравнения

$$-\hat{\mathbf{K}}\mathbf{A} - \mathbf{A}'\hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\hat{\mathbf{K}} - \mathbf{C}'\mathbf{Q}\mathbf{C} = 0.\tag{9.190}$$

В этом случае состояние оптимальной системы является решением линейного инвариантного во времени однородного уравнения [при заданном  $\mathbf{x}(0)$ ]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\hat{\mathbf{K}}]\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{G}\mathbf{x}(t).\tag{9.191}$$

Минимальная стоимость  $J_2^*$  равна

$$\hat{J}_2^* = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}(t) \rangle.\tag{9.192}$$

Собственные значения матрицы

$$\mathbf{G} = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\hat{\mathbf{K}}]\tag{9.193}$$

имеют отрицательные вещественные части.

Напомним, что система (9.187) управляема в том и только в том случае, когда матрица

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\tag{9.194}$$

содержит  $n$  линейно-независимых векторов-столбцов. Система (9.187) наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица

$$[\mathbf{C}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}' \mid (\mathbf{A}')^2\mathbf{C}' \mid \dots \mid (\mathbf{A}')^{n-1}\mathbf{C}']\tag{9.195}$$

содержит  $n$  линейно-независимых векторов-столбцов.

<sup>1</sup> См. замечания относительно управляемости в § 9.4.

**Пример 9.5.** Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t); \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (9.196)$$

Эта система уже рассматривалась в примере 9.4. Ее передаточная функция равна  $\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2}$ . Рассмотрим функционал

$$\hat{J}_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [y^2(t) + ru^2(t)] dt. \quad (9.197)$$

Используя закон управления 9.4, найдем, что оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = -\frac{1}{r} [\hat{k}_{12}x_1(t) + \hat{k}_{22}x_2(t)]. \quad (9.198)$$

Матричное алгебраическое уравнение (9.190) дает в этом случае три уравнения

$$\frac{1}{r} \hat{k}_{12}^2 = 1; \quad (9.199)$$

$$-\hat{k}_{11} + \frac{1}{r} \hat{k}_{12} \hat{k}_{22} = 0; \quad (9.200)$$

$$-2\hat{k}_{12} + \frac{1}{r} \hat{k}_{22}^2 = 0. \quad (9.201)$$

Так как  $\hat{K}$  положительно определена, должны иметь место неравенства

$$\hat{k}_{11} > 0; \quad \hat{k}_{22} > 0; \quad \hat{k}_{11} \hat{k}_{22} - \hat{k}_{12}^2 > 0. \quad (9.202)$$

Таким образом, правильными решениями уравнений (9.199)–(9.201) являются

$$\left. \begin{aligned} \hat{k}_{12} &= r^{\frac{1}{2}}; \\ \hat{k}_{22} &= r^{\frac{3}{4}} \sqrt{2}; \\ \hat{k}_{11} &= r^{\frac{1}{4}} \sqrt{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.203)$$

Подставляя значения (9.203) в уравнение (9.198), найдем, что оптимально управление

$$\begin{aligned} u(t) &= -r^{-\frac{1}{2}} x_1(t) - r^{-\frac{1}{4}} \sqrt{2} x_2(t) = \\ &= -r^{-\frac{1}{2}} y(t) - r^{-\frac{1}{4}} \sqrt{2} \dot{y}(t). \end{aligned} \quad (9.204)$$

Блок-схема оптимальной системы (в обозначениях преобразования Лапласа) показана на рис. 9.13. Оптимальное управление получается пропуском сигнала  $y(t)$  через цепь обратной связи с передаточной функцией

$$F(s) = r^{-\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{4}} \sqrt{2}s. \quad (9.205)$$

Передаточная функция  $G^*(s)$  оптимальной системы с обратной связью равна

$$G^*(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{r^{-\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{4}} \sqrt{2}s}{s^2}} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2} r^{-\frac{1}{4}} s + r^{-\frac{1}{2}}}. \quad (9.206)$$

Полюса оптимальной передаточной функции системы с обратной связью  $G^*(s)$  равны

$$s = -\frac{\sqrt{2}}{2} r - \frac{1}{4} (1 \pm j). \quad (9.207)^1$$

На рис. 9.14 показан корневой годограф замкнутой системы в зависимости от  $r$ . Годограф представляет собой прямую, угол которой с осью  $j\omega$  составляет  $45^\circ$ . Примечательным свойством этой системы является то, что коэффициент затухания<sup>2</sup> оптимальной системы

$$\xi = 0,707 \quad (9.208)$$

при любом значении  $r$ . Изменение  $r$  увеличивает или уменьшает коэффициент усиления системы; при  $r$  малом коэффициент усиления большой и наоборот.

**Упражнение 9.7.** Рассмотрите линейную систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t);$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t)$$

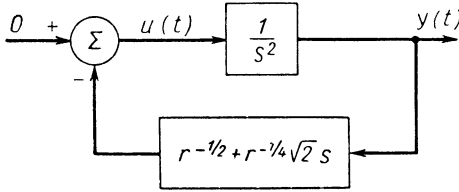


Рис. 9.13. Оптимальный регулятор выхода с обратной связью для объекта с двойным интегрированием

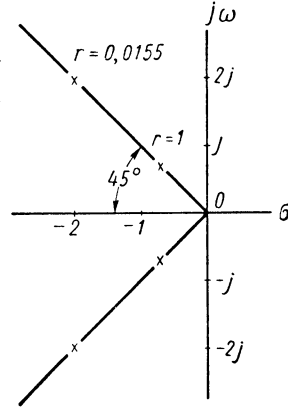


Рис. 9.14. Корневой годограф замкнутой системы рис. 9.13 при изменениях  $r$ . Отмечены положения полюсов для  $r = 0,0155$  и  $r = 1$

и функционал стоимости  $J_2$  (9.181). Найдите оптимальное управление и минимальное значение  $J_2$ . Строго сформулируйте все сделанные вами предположения.

**Упражнение 9.8.** Рассмотрите систему  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ ;  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$  и функционал

$$J_2 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{y}(T), \mathbf{F}\mathbf{y}(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T [\langle \mathbf{y}(t), \mathbf{Q}\mathbf{y}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}\mathbf{u}(t) \rangle] dt,$$

где  $T$  фиксировано и  $T < \infty$ . Можете ли вы найти условия, при которых  $\mathbf{K}(t) = \text{const}$  для всего  $t \in [0, T]$ ? У к а з а н и е: см. упражнение 9.2.

## 9.8. ЗАДАЧА О РЕГУЛЯТОРЕ ВЫХОДА ДЛЯ СИСТЕМЫ С ОДНИМ ВХОДОМ И ОДНИМ ВЫХОДОМ

В этом параграфе мы применим результаты предыдущего параграфа к системам с одним входом  $u(t)$  и одним выходом  $y(t)$ . Основными целями будут:

- 1) показать структуру оптимальной системы с обратной связью;
- 2) привести уравнения, которые надо решать.

Мы будем рассматривать системы, передаточные функции которых содержат только полюса, и отметим особенности, характерные для систем с нулями и полюсами.

<sup>1</sup>  $j = \sqrt{-1}$ .

<sup>2</sup> Коэффициент затухания — понятие, хорошо знакомое специалистам по управлению. Если пара комплексных полюсов (или собственных значений) равна  $s = -\alpha_n \pm j\omega_n$  и  $\alpha_n \geq 0$ ,  $\omega_n \geq 0$ , то коэффициент затухания  $\xi$  определяется как  $\xi = \sin \arctg \frac{\omega_n}{\alpha_n}$ .



Рассмотрим систему, которая описывается линейным инвариантным во времени дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка:

$$\{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0\}y(t) = u(t). \quad (9.209)$$

Передаточная функция этой системы равна

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (9.210)$$

Определим состояние <sup>1</sup>  $\mathbf{x}(t)$  системы (9.209), приняв

$$x_i(t) = \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} y(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.211)$$

Тогда уравнениями состояния системы (9.209) будут

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (9.212)$$

Уравнение выхода имеет вид

$$y(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}. \quad (9.213)$$

Уравнение (9.212) можно записать в векторном виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad (9.214)$$

а уравнение (9.213) можно представить в виде

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (9.215)$$

где  $\mathbf{C}$  — матрица размера  $1 \times n$  (вектор-строка).

Пусть

$$\hat{J}_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [y^2(t) + ru^2(t)] dt \quad (9.216)$$

— рассматриваемый функционал стоимости. Используем теперь закон управления 9.4. Если мы обозначим через  $\hat{k}_{ij}$  элементы матрицы  $\hat{\mathbf{K}}$ , то оптимальное управление будет равно

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{r} [\hat{k}_{1n}x_1(t) + \hat{k}_{2n}x_2(t) + \dots + \hat{k}_{nn}x_n(t)] = \\ &= -\frac{1}{r} \left[ \sum_{j=1}^n \hat{k}_{jn}x_j(t) \right] = -\frac{1}{r} \left[ \sum_{j=1}^n \hat{k}_{jn} \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} y(t) \right]. \end{aligned} \quad (9.217)$$

Структура оптимальной системы с обратной связью показана на рис. 9.15, где использованы обозначения преобразования Лапласа. Выход  $y(t)$  подается на корректирующее устройство в цепи обратной связи с передаточной функцией

$$F(s) = \hat{k}_{nn}s^{n-1} + \dots + \hat{k}_{2n}s + \hat{k}_{1n}, \quad (9.218)$$

<sup>1</sup> См. § 4.9.

на выходе которого получается оптимальное управление. Передаточная функция  $G^*(s)$  замкнутой оптимальной системы равна

$$G^*(s) = \frac{G(s)}{1 + \frac{1}{r} G(s) F(s)} = \frac{1}{s^n + \left(a_{n-1} + \frac{\hat{k}_{nn}}{r}\right) s^{n-1} + \dots + \left(a_1 + \frac{\hat{k}_{2n}}{r}\right) s + \left(a_0 + \frac{\hat{k}_{1n}}{r}\right)}. \quad (9.219)$$

Полюсами (или собственными значениями) замкнутой оптимальной системы являются  $n$  решений алгебраического уравнения

$$s^n + \left(a_{n-1} + \frac{\hat{k}_{nn}}{r}\right) s^{n-1} + \dots + \left(a_1 + \frac{\hat{k}_{2n}}{r}\right) s + \left(a_0 + \frac{\hat{k}_{1n}}{r}\right) = 0. \quad (9.220)$$

Значения  $\hat{k}_{1n}, \dots, \hat{k}_{nn}$  надо найти из уравнения

$$-\hat{K}A - A'\hat{K} + \frac{1}{r} \hat{K}bb'\hat{K} - C'C = 0, \quad (9.221)$$

где  $A$  — матрица, входящая в уравнение (9.212),

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

и  $C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ .

Расположение полюсов замкнутой системы будет, естественно, зависеть от величины весового коэффициента  $r$ , входящего в функционал

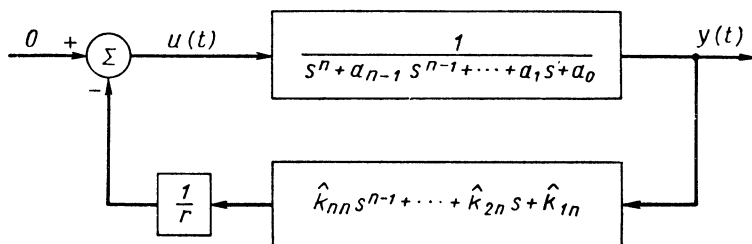


Рис. 9.15. Оптимальный регулятор (с обратной связью) выхода объекта. Передаточная функция объекта содержит только полюса

(9.216). Калман показал, что асимптотическое поведение полюсов  $G^*(s)$  можно описывать следующим образом. При  $r \rightarrow 0$  полюса оптимальной замкнутой системы стремятся к устойчивой конфигурации Баттерворта<sup>1</sup>. Как и ранее, можно нарисовать годограф полюсов замкнутой системы в зависимости от  $r$ . Заметим, что величина коэффициента обратной связи является (нелинейной) функцией параметра  $r$ . Чем меньше величина  $r$ , тем больше коэффициент и наоборот.

С практической точки зрения проектировать корректирующее устройство  $F(s)$  [см. рис. 9.15 и уравнение (9.218)] следует приблизительно. Причина состоит в том, что передаточная функция  $F(s)$  содержит только

<sup>1</sup> Фильтры Баттерворта описаны в работе [209].

нули. Субоптимальную систему можно получить, заменив  $F(s)$  цепочкой с передаточной функцией

$$\tilde{F}(s) = \frac{F(s)}{Q(s)},$$

где корни  $Q(s)$  расположены возможно дальше влево от корней  $F(s)$ .

Эта теория применима и к системе, передаточная функция которой содержит  $m$  нулей и  $n$  полюсов,  $m < n$ . Предлагаем читателю самостоятельно проверить данное положение.

Проиллюстрируем теорию при помощи простого примера.

**Пример 9.6.** Рассмотрим систему<sup>1</sup>, выход  $y(t)$  которой связан со входом  $u(t)$  уравнением

$$\ddot{y}(t) = \dot{u}(t) + \beta u(t). \quad (9.222)$$

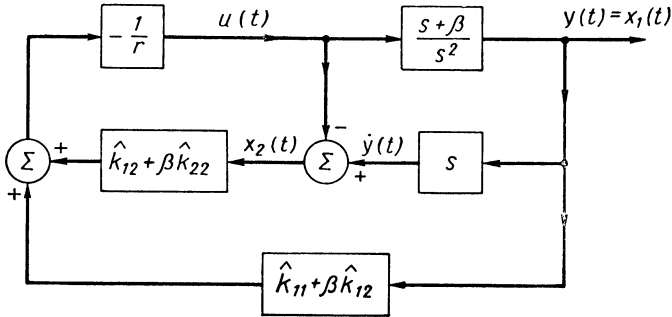


Рис. 9.16. Оптимальный регулятор выхода (с обратной связью) для объекта с передаточной функцией  $\frac{s + \beta}{s^2}$

Система имеет передаточную функцию

$$\frac{y(s)}{u(s)} = H(s) = \frac{s + \beta}{s^2}. \quad (9.223)$$

Определим переменные состояния (фазовые координаты), положив

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= y(t); \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) - u(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.224)$$

Уравнения системы

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= \beta u(t); \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.225)$$

Мы хотим найти управление, которое минимизирует стоимость  $\hat{J}_2$  (9.216). На основании закона управления 9.4 найдем

$$u(t) = -\frac{1}{r} [(\hat{k}_{11} + \beta \hat{k}_{12}) x_1(t) + (\hat{k}_{12} + \beta \hat{k}_{22}) x_2(t)]. \quad (9.226)$$

Из уравнения (9.190) получим следующие алгебраические уравнения

$$\left. \begin{aligned} \hat{k}_{11}^2 + 2\beta \hat{k}_{11} \hat{k}_{12} + \beta^2 \hat{k}_{12}^2 - r &= 0; \\ \beta \hat{k}_{11} \hat{k}_{22} + \beta \hat{k}_{12}^2 + \beta^2 \hat{k}_{12} \hat{k}_{22} + \hat{k}_{11} \hat{k}_{12} - r \hat{k}_{11} &= 0; \\ \hat{k}_{12}^2 + 2\beta \hat{k}_{12} \hat{k}_{22} + \beta^2 \hat{k}_{22}^2 - 2r \hat{k}_{12} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.227)$$

На рис. 9.16 показана блок-схема оптимальной системы (в обозначениях преобразования Лапласа). Так как  $x_2(t) = \dot{y}(t) - u(t)$ , переменную состояния (фазовую координату)

<sup>1</sup> Оптимальное по быстродействию управление таким объектом рассматривалось в § 7.12.

$x_2(t)$  получим, вычитая управление  $u(t)$  из  $\dot{y}(t)$ . Блок-схему на рис. 9.16 можно упростить при помощи обычных преобразований.

Из уравнения (9.227) находим

$$\left. \begin{aligned} (\hat{k}_{11} + \beta \hat{k}_{12})^2 &= r; \\ (\hat{k}_{12} + \beta \hat{k}_{22})^2 &= 2r\hat{k}_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (9.228)$$

Так как  $\hat{k}_{11} > 0$ ;  $\hat{k}_{22} > 0$ ;  $\hat{k}_{11}\hat{k}_{22} - \hat{k}_{12}^2 > 0$ , получим

$$\hat{k}_{11} + \beta \hat{k}_{12} = \sqrt{r}; \quad (9.229)$$

$$\hat{k}_{12} + \beta \hat{k}_{22} = \sqrt{2r\hat{k}_{12}}. \quad (9.230)$$

Из уравнений (9.229), (9.230) и (9.227) видно, что  $\hat{k}_{12}$  есть решение алгебраического уравнения четвертого порядка, пытаться решать которое мы здесь не будем.

Интересный случай возникает при  $\beta = 0$ , т. е. когда система неуправляема. Чтобы проиллюстрировать отсутствие смысла при попытке использовать закон управления 9.4, подставим, не раздумывая,  $\beta = 0$  в уравнение (9.227) и получим

$$\hat{k}_{11}^2 = r; \quad (9.231)$$

$$\hat{k}_{11}\hat{k}_{12} = r\hat{k}_{11}; \quad (9.232)$$

$$\hat{k}_{12}^2 = 2r\hat{k}_{12}. \quad (9.233)$$

Так как  $\hat{k}_{11} > 0$  и  $r > 0$ , из уравнения (9.231) следует, что

$$\hat{k}_{11} - \sqrt{r} > 0. \quad (9.234)$$

Уравнение (9.232) приводит к выводу

$$\hat{k}_{12} = r, \quad (9.235)$$

а уравнение (9.233) — к соотношению

$$\hat{k}_{12} = 0 \quad \text{или} \quad \hat{k}_{12} = 2r. \quad (9.236)$$

Очевидно, что соотношения (9.235) и (9.236) противоречат друг другу. Такой невероятный ответ возникает потому, что мы попытались применить закон управления 9.4 к неуправляемой системе.

**Упражнение 9.9.** Для каждой из следующих систем, где  $y(t)$  — выход и  $u(t)$  — управление, функционал стоимости задан как

$$\hat{J}_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [y^2(t) + ru^2(t)] dt. \quad (9.237)$$

Для каждой из систем найдите оптимальное управление, полюса оптимальной системы и нарисуйте годограф полюсов в зависимости от  $r$ :

а)  $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t)$ ;    б)  $\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) = u(t)$ ;

в)  $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$ ;

г)  $\ddot{y}(t) - y(t) = u(t)$ ;    д)  $\ddot{y}(t) + y(t) = u(t)$ ;

е)  $\dddot{y}(t) = u(t)$ ;

ж)  $\dddot{y}(t) + \ddot{y}(t) = u(t)$ .

Есть ли что-либо общее в годографах полюсов систем второго порядка [с а) по г)]?

**Упражнение 9.10.** Рассмотрите систему, выход  $y(t)$  и вход  $u(t)$  которой связаны дифференциальным уравнением

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \alpha \dot{u}(t) + u(t) \quad (9.238)$$

с функционалом (9.237). Найдите и нарисуйте годограф полюсов оптимальной замкнутой системы в зависимости от  $r$  и  $\alpha$ . Что происходит при  $\alpha = 1$ ?

### 9.9. ЗАДАЧА СЛЕЖЕНИЯ<sup>1</sup>

В предыдущих параграфах мы рассмотрели задачи о регуляторах состояния и выхода. В этом параграфе обратим внимание на задачу слежения. Напомним, что физические положения этой задачи подробно обсуждались в § 9.2, где приведена ее формулировка. Повторим ее еще раз в данном параграфе. Здесь будем поступать точно так же, как и в § 9.3. Для определения экстремальных управлений воспользуемся принципом минимума. Покажем, что:

1)  $H$ -минимальное управление есть линейная функция от дополнительной переменной;

2) упрощенные канонические уравнения линейны, но неоднородны (так как желаемый выход войдет в вынуждающий член);

3) дополнительная переменная  $p(t)$  связана с состоянием  $x(t)$  выражением вида

$$p(t) = K(t)x(t) - g(t);$$

4) матрица  $K(t)$  есть решение уравнения Риккати, а  $g(t)$  — решение линейного дифференциального уравнения, в которое входит желаемый выход.

Доказательства существования и единственности мы предоставим читателю и сосредоточим свое внимание на обсуждении свойств оптимальной следящей системы.

Предположим, что нам задана линейная наблюдаемая система с состоянием  $x(t)$ , выходом  $y(t)$  и управлением  $u(t)$ , описываемая уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t); \\ y(t) &= C(t)x(t). \end{aligned} \right\} \quad (9.239)$$

Пусть вектор  $z(t)$  — желаемый выход и предположим, что размерность  $z(t)$  равна размерности выхода  $y(t)$ . Наша цель — управлять системой таким образом, чтобы «держаться» выход  $y(t)$  «близким» к  $z(t)$  без «слишком больших» затрат управляющей энергии. Определим сперва вектор ошибки  $e(t)$ , положив

$$e(t) = z(t) - y(t). \quad (9.240)$$

Функционал  $J_3$ , который будем минимизировать, имеет вид

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2} \langle e(T), Fe(T) \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle e(t), Q(t)e(t) \rangle + \langle u(t), R(t)u(t) \rangle] dt. \end{aligned} \quad (9.241)$$

Как обычно, предполагается, что  $T$  задано;  $R(t)$  положительно определена, а  $Q(t)$  и  $F$  положительно полуопределены.

Ошибку можно выразить как функцию от  $z(t)$  и  $x(t)$ :

$$e(t) = z(t) - C(t)x(t). \quad (9.242)$$

Подставив (9.242) в функционал (9.241), выразим  $J_3$  в функции от  $x(t)$ ,  $u(t)$  и  $z(t)$ . Мы можем теперь использовать принцип минимума и получить необходимые условия. Наш подход очень похож на методику, изложенную в § 9.3, и поэтому многие доказательства опущены или рекомендуются читателю как упражнения.

<sup>1</sup> Эта задача рассматривается в работе [112].

Гамильтониан для задачи слежения записывается в виде

$$H = \frac{1}{2} \langle [z(t) - C(t)x(t)], Q(t)[z(t) - C(t)x(t)] \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle u(t), R(t)u(t) \rangle + \langle A(t)x(t), p(t) \rangle + \langle B(t)u(t), p(t) \rangle. \quad (9.243)$$

Условие  $\frac{\partial H}{\partial u(t)} = 0$  дает уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = 0 = R(t)u(t) + B'(t)p(t), \quad (9.244)$$

откуда получим

$$u(t) = -R^{-1}(t)B'(t)p(t). \quad (9.245)$$

Так как  $R(t)$  положительно определена, управление (9.245) минимизирует  $H$  и поэтому является  $H$ -минимальным.

Условие  $\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)}$  дает

$$\dot{p}(t) = -C'(t)Q(t)C(t)x(t) - A'(t)p(t) + C'(t)Q(t)z(t). \quad (9.246)$$

Из уравнений (9.245) и (9.239) получим соотношение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)p(t). \quad (9.247)$$

Для упрощения выкладок обозначим

$$S(t) = B(t)R^{-1}(t)B'(t); \quad (9.248)$$

$$V(t) = C'(t)Q(t)C(t); \quad (9.249)$$

$$W(t) = C'(t)Q(t). \quad (9.250)$$

Комбинируя уравнения (9.246) и (9.247), получим упрощенные канонические уравнения

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -S(t) \\ -V(t) & -A'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ W(t)z(t) \end{bmatrix}. \quad (9.251)$$

Это — система  $2n$  линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Вектор  $W(t)z(t)$  выступает как «вынуждающая функция». При  $t = t_0$  начальное состояние дает  $n$  граничных условий

$$x(t_0) = \xi. \quad (9.252)$$

При  $t = T$  условие трансверсальности дает еще  $n$  граничных условий

$$p(T) = \frac{\partial}{\partial x(T)} \left[ \frac{1}{2} \langle e(T), Fe(T) \rangle \right] = \\ = C'(T)FC(T)x(T) - C'(T)Fz(T). \quad (9.253)$$

Пусть  $\Phi(t, t_0)$  — фундаментальная матрица системы (9.251) размера  $2n \times 2n$ . Можно записать

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ p(T) \end{bmatrix} = \Phi(T, t_0) \left\{ \begin{bmatrix} x(t_0) \\ p(t_0) \end{bmatrix} + \int_{t_0}^T \Phi^{-1}(\tau, t_0) \begin{bmatrix} 0 \\ W(\tau)z(\tau) \end{bmatrix} d\tau \right\}. \quad (9.254)$$

Если подставить выражение (9.253) для  $p(T)$  в уравнение (9.254) и действовать далее, как и в § 9.3, то окажется, что  $x(t)$  и  $p(t)$  связаны линейным уравнением

$$p(t) = K(t)x(t) - g(t). \quad (2.255)$$

Так же, как и в § 9.3, установим свойства  $n \times n$  матрицы  $K(t)$  и  $n$ -мерного вектора-столбца  $g(t)$ , поскольку дополнительные свойства  $K(t)$  и  $g(t)$  могут быть полезны с вычислительной точки зрения. Продифференцируем уравнение (9.255):

$$\dot{p}(t) = \dot{K}(t)x(t) + K(t)\dot{x}(t) - \dot{g}(t). \quad (9.256)$$

Из уравнений (9.247), (9.248) и (9.255) получим

$$\dot{x}(t) = [A(t) - S(t)K(t)]x(t) + S(t)g(t), \quad (9.257)$$

и поэтому уравнение (9.256) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) = & [K(t) + K(t)A(t) - K(t)S(t)K(t)]x(t) + \\ & + K(t)S(t)g(t) - \dot{g}(t). \end{aligned} \quad (9.258)$$

Из уравнений (9.246), (9.249), (9.250) и (9.255), находим

$$\dot{p}(t) = [-V(t) - A'(t)K(t)]x(t) + A'(t)g(t) + W(t)z(t). \quad (9.259)$$

Поскольку оптимальное решение существует, уравнения (9.258) и (9.259) должны выполняться для любых  $x(t)$ ,  $z(t)$  и  $t$ . Следовательно,

1) матрица  $K(t)$  размера  $n \times n$  должна удовлетворять матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A'(t)K(t) + K(t)S(t)K(t) - V(t); \quad (9.260)$$

2)  $n$ -мерный вектор-столбец  $g(t)$  должен удовлетворять векторному дифференциальному уравнению

$$\dot{g}(t) = [K(t)S(t) - A'(t)]g(t) - W(t)z(t). \quad (9.261)$$

Граничные условия получаются следующим образом. Из уравнения (9.255)

$$p(T) = K(T)x(T) - g(T), \quad (9.262)$$

а из уравнения (9.253)

$$p(T) = C'(T)FC(T)x(T) - C'(T)Fz(T). \quad (9.263)$$

Поскольку два последних уравнения должны быть справедливы при любых  $x(T)$  и  $z(T)$ , получим

$$K(T) = C'(T)FC(T) \quad (2.264)$$

и

$$g(T) = C'(T)Fz(T). \quad (9.265)$$

Таким образом, граничные условия дифференциальных уравнений (9.260) и (9.261) полностью определены в (заданный) конечный момент времени  $T$ ; поэтому их можно решить и получить  $K(t)$  и  $g(t)$  для любого  $t \in [t_0, T]$ .

Если подставить уравнение (9.255) в (9.245), то можно выразить экстремальное управление как функцию от  $K(t)$  и  $g(t)$ . Экстремальная траектория будет тогда решением уравнения (9.257), начинающимся из заданного начального состояния  $x(t_0) = \xi$ .

Теперь мы уверены в том, что оптимальное управление существует и что экстремальное управление единственно. Итак, можно сформулировать следующий закон управления.

**Закон управления 9.5 (решение задачи слежения).** Дана линейная наблюдаемая система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t); \\ y(t) &= C(t)x(t). \end{aligned} \right\} \quad (9.266)$$

Заданы желаемый выход  $z(t)$ , ошибка  $e(t) = z(t) - y(t)$  и функционал

$$J_3 = \frac{1}{2} \langle e(T), Fe(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle e(t), Qe(t) \rangle + \langle u(t), R(t)u(t) \rangle] dt, \quad (9.267)$$

где  $u(t)$  не ограничено,  $T$  задано,  $R(t)$  — положительно определена, а  $F$  и  $Q(t)$  — положительно полуопределенные матрицы.

Оптимальное управление существует, единственно и равно

$$u(t) = R^{-1}(t) B'(t) [g(t) - K(t)x(t)]. \quad (9.268)$$

Действительная, симметричная, положительно определенная матрица  $K(t)$  размера  $n \times n$  есть решение матричного дифференциального уравнения типа Риккати:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A'(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t) - C'(t)Q(t)C(t) \quad (9.269)$$

с граничным условием

$$K(T) = C'(T)FC(T). \quad (9.270)$$

Вектор  $g(t)$  (из  $n$  компонент) есть решение линейного векторного дифференциального уравнения

$$\dot{g}(t) = -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]'g(t) - C'(t)Q(t)z(t) \quad (9.271)$$

с граничным условием

$$g(T) = C'(T)Fz(T). \quad (9.272)$$

Оптимальная траектория есть решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]x(t) + B(t)R^{-1}(t)B'(t)g(t), \quad (9.273)$$

начинающееся из (известного) исходного состояния  $x(t_0) = \xi$ . Минимальное значение  $J_3^*$  стоимости  $J_3$  равно

$$J_3^* = \frac{1}{2} \langle x(t), K(t)x(t) \rangle - \langle g(t), x(t) \rangle + \varphi(t), \quad (9.274)$$

где

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{1}{2} [\langle z(t), Q(t)z(t) \rangle - \langle g(t), B(t)R^{-1}(t)B'(t)g(t) \rangle];$$

$$\varphi(T) = \langle z(T), K(T)z(T) \rangle$$

и определена для любых  $x(t)$  и  $t \in [t_0, T]$ .

**Упражнение 9.11.** Покажите, что предположения относительно  $R(t)$ ,  $Q(t)$  и  $F$  гарантируют, что экстремальное управление (9.268) дает (по крайней мере) локальный минимум  $J_3$ . У к а з а н и е: см. уравнения (9.64)—(9.66).

**Упражнение 9.12.** Получите уравнение (9.274) из уравнения Гамильтона—Якоби. У к а з а н и е: см. теорему 9.1.

**Упражнение 9.13.** Покажите, что оптимальное управление существует и что управление  $u(t)$  (9.268) оптимально и единственно.

Обсудим теперь некоторые выводы из закона управления 9.5. Во-первых, рассмотрим «матрицу усиления»  $K(t)$ . Отметим, что уравнение Риккати (9.269) и граничные условия (9.270) не зависят от желаемого выхода  $z(t)$ . Это означает, что «матрица усиления»  $K(t)$  полностью определяется заданием системы, стоимости и конечного времени  $T$ . Сравнение уравнений (9.269) и (9.270) с (9.183) и (9.184) (см. закон управления 9.3,



решение задачи о регуляторе выхода) обнаруживает их идентичность. Поэтому структура обратной связи оптимальной следящей системы та же самая, что и системы оптимального регулятора выхода. Этот факт становится еще более очевидным при сравнении уравнений (9.273) и (9.185). В обоих уравнениях матрица системы  $[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]$  одна и та же. Таким образом, собственные значения замкнутой оптимальной следящей системы тождественны собственным значениям замкнутой оптимальной системы для регулятора выхода и не зависят от желаемого выхода  $z(t)$ . Рискую повториться, подчеркнем, что «матрица усиления»  $K(t)$  является функцией только матриц

$$A(t), B(t), C(t), F, Q(t), R(t)$$

и конечного времени  $T$ .

Основное отличие оптимальной следящей системы от оптимального регулятора выхода заключается в векторе  $g(t)$  [сравните уравнение (9.268) с (9.182)]. Вектор  $g(t)$  можно представлять себе вынуждающей функцией системы [см. уравнение (9.273)]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]x(t) + \\ & + B(t)R^{-1}(t)B'(t)g(t). \end{aligned} \quad (9.275)$$

Таким образом,  $g(t)$  «стремится уравновесить» регулирующие «особенности» системы.

Рассмотрим теперь более детально дифференциальное уравнение относительно  $g(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) = & -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]'g(t) - \\ & - C'(t)Q(t)z(t). \end{aligned} \quad (9.276)$$

Граничное условие при  $t = T$  есть  $g(T) = C'(T)Fz(T)$ . Прежде всего отметим, что система (9.276) является сопряженной по отношению к системе (9.275). Таким образом, если  $\Phi(t, t_0)$  — фундаментальная матрица системы (9.275), а  $\Psi(t, t_0)$  — фундаментальная матрица системы (9.276), то

$$\Psi'(t, t_0)\Phi(t, t_0) = I. \quad (9.277)$$

Другим следствием сопряженности является то, что собственные значения матрицы  $-[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]'$  равны собственным значениям матрицы  $[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]'$  со знаком минус. Таким образом, динамическое поведение системы (9.275) также не зависит от желаемого выхода  $z(t)$ . По этой причине желаемый выход  $z(t)$  можно представлять себе в виде возмущающей функции, производящей сигнал  $g(t)$  (9.276).

Пусть  $\Psi(t, t_0)$  — фундаментальная матрица системы (9.276). Непосредственно получим

$$\begin{aligned} C'(T)Fz(t) = & g(T) = \\ = & \Psi(T, t) \left[ g(t) - \int_t^T \Psi^{-1}(\tau, t) C'(\tau) Q(\tau) z(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (9.278)$$

или для любого  $t \in [t_0, T]$

$$g(t) = \Psi^{-1}(T, t)g(T) + \int_t^T \Psi^{-1}(\tau, t) C'(\tau) Q(\tau) z(\tau) d\tau. \quad (9.279)$$

Из последнего соотношения следует: для того чтобы вычислить  $g(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , мы должны знать  $z(\tau)$  для всего промежутка  $\tau \in [t, T]$ .

Иначе говоря, чтобы вычислить настоящее (текущее) значение  $\mathbf{g}(t)$ , мы должны знать будущие значения желаемого выхода  $\mathbf{z}(t)$ . Так как оптимальное управление выражается уравнением

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)[\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{g}(t)], \quad (9.280)$$

то это означает, что текущее значение оптимального управления зависит от будущих значений желаемого выхода.

Здесь разочаровавшийся инженер может отказаться от идей оптимального управления, поскольку оно требует знания будущего и в общем случае <sup>1</sup> нереализуемо. Тем не менее легко видеть, что оптимальное управление <sup>2</sup> должно быть функцией будущих значений  $\mathbf{z}(t)$ . Дело в том, что оптимальное управление использует всю доступную информацию. Очевидно, формулировка нашей задачи управления не включала требования реализуемости.

Зададимся теперь вопросом: существует ли простой путь учета реализуемости в математической формулировке оптимальной задачи? Положительного ответа на поставленный вопрос дать нельзя. Для подтверждения этого обозначим через  $t$  настоящее, через  $[t_0, t)$  — прошлое и через  $(t, T]$  — будущее время. Настоящее управление  $\mathbf{u}(t)$  может влиять только на будущую реакцию системы и, очевидно, не может изменить прошлого. Прошлые поведение системы подытожено в ее настоящем состоянии  $\mathbf{x}(t)$ . Так как настоящее состояние  $\mathbf{x}(t)$  определяет часть будущего переходного процесса, настоящее управление  $\mathbf{u}(t)$  должно быть функцией настоящего состояния  $\mathbf{x}(t)$ . Но действие этого управления  $\mathbf{u}(t)$  должно минимизировать будущие ошибки. Эти будущие ошибки зависят от последующих значений  $\mathbf{z}(\tau)$ ,  $\tau \in (t, T]$ . Таким образом, мы приходим к выводу, что настоящее оптимальное управление  $\mathbf{u}(t)$  должно зависеть от  $\mathbf{z}(\tau)$  для всех  $\tau \in (t, T]$ . Иначе говоря, если мы точно не знаем будущего, нельзя ждать, что в настоящем мы будем действовать строго оптимально.

После уточнения этого обстоятельства можно двигаться дальше в двух направлениях. Можно или использовать предсказанное значение будущего желаемого выхода, или сформулировать задачу вероятностным образом (т. е. минимизировать функцию ожидаемой ошибки). Если использовать «наилучшие» детерминированные предположения, то оптимальная система будет настолько «хорошей», насколько «хороши» эти предположения.

Если, напротив, сформулировать стохастически детерминированную задачу, то получится система оптимальная «в среднем». Это не гарантирует, что в каждом отдельном эксперименте реакция системы будет удовлетворительной.

Смирившись с тем, что мы должны знать желаемый выход априори обсудим вычислительные аспекты определения  $\mathbf{K}(t)$  и  $\mathbf{g}(t)$ . Так как матрица  $\mathbf{K}(t)$  не зависит от  $\mathbf{z}(t)$ , ее можно вычислить заранее для любого  $t \in [t_0, T]$ . Знание  $\mathbf{K}(t)$  и  $\mathbf{z}(t)$  позволит нам рассчитать  $\mathbf{g}(t)$  назад во времени для любого  $t \in [t_0, T]$ . Мы можем или хранить

<sup>1</sup> Есть, конечно, много случаев, когда будущие значения  $\mathbf{z}(t)$  известны. Например, управление антенной для получения телеметрической информации со спутника Земли, который находился до этого на орбите достаточно долго для того, чтобы его орбита была измерена с высокой степенью точности. Известно, что спутник, появившись из-за горизонта в 4 ч. 13 м. утра, скроется в 4 ч. 27 м. Очевидно, что  $\mathbf{z}(t)$  в этом случае известно и оптимальная система для слеящего радиолокатора реализуема. Антенна должна начать двигаться раньше 4 ч. 13 м. и двигаться в соответствии с траекторией спутника в момент его выхода из-за горизонта.

<sup>2</sup> Дальнейшие утверждения применимы ко всем слеящим системам, а не ограничиваются лишь системами, рассматриваемыми в данном параграфе.

$g(t)$  на магнитной ленте, или вычислить начальное значение  $g(t_0)$  по формуле

$$g(t_0) = \Psi^{-1}(T, t_0) C'(T) Fz(T) + \int_{t_0}^T \Psi^{-1}(\tau, t_0) C'(\tau) Q(\tau) z(\tau) d\tau. \quad (9.281)$$

Затем это вычисленное значение  $g(t_0)$  можно использовать в качестве начального условия системы (9.271) и получить решение  $g(t)$  «в прямом» времени. На рис. 9.17 показана динамическая система, производя-

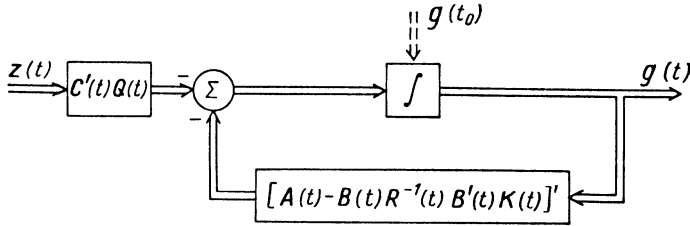


Рис. 9.17. Моделирование системы, вырабатывающей  $g(t)$ . Предполагается, что  $g(t_0)$  и  $K(t)$  вычислены заранее

щая  $g(t)$ , если  $g(t_0)$  было вычислено заранее. На рис. 9.18 показана полная структурная схема оптимальной системы. Векторные каналы обратной связи, охватывающие интеграторы, подчеркивают свойство сопряженности двух динамических систем.

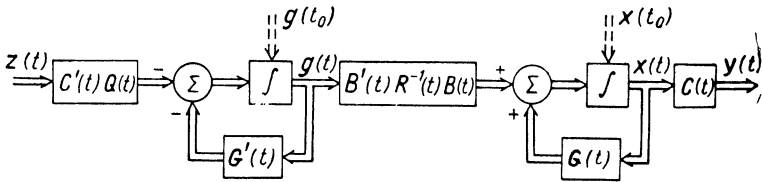


Рис. 9.18. Модель оптимальной следящей системы на основе уравнений (9.274) и (9.276). Матрица  $G(t) = A(t) - B(t)R^{-1}(t) \cdot B'(t)K(t)$ . Считается, что  $g(t_0)$  и  $K(t)$  рассчитаны заранее

Поскольку преобразование (9.281) линейно, легко доказать следующую теорему.

**Теорема 9.2.** Пусть

$$g_\beta(t_0) = \Psi^{-1}(T, t_0) C'(T) Fz_\beta(T) + \int_{t_0}^T \Psi^{-1}(\tau, t_0) C'(\tau) Q(\tau) z_\beta(\tau) d\tau, \quad (9.282)$$

$$\beta = 1, 2, \dots, N$$

Если

$$z(\tau) = \sum_{\beta=1}^N \gamma_\beta z_\beta(\tau), \quad \tau \in [t_0, T], \quad (9.283)$$

где  $\gamma_\beta$  — любые постоянные числа, то начальное значение вектора  $g(t_0)$ , соответствующее сигналу  $z_{[t_0, T]}$ , равно

$$g(t_0) = \sum_{\beta=1}^N \gamma_\beta g_\beta(t_0). \quad (9.284)$$

**Доказательство.** Теорема доказывается подстановкой соотношения (9.283) в уравнение (9.281) и использованием уравнения (9.282).

Из теоремы следует: предположим, нам известно, что желаемые выходные сигналы  $z(t)$  всегда являются линейными комбинациями известных сигналов  $z_{\beta}(t)$ . В этом случае можно заранее рассчитать начальные значения векторов  $g_{\beta}(t)$  и получить  $g(t_0)$  с помощью уравнения (9.283) при условии отсутствия проблемы устойчивости.

В следующем параграфе обсудим некоторые приближительные соотношения для инвариантных во времени систем при неограниченном возрастании конечного времени  $T$ .

Выполнив следующие упражнения, можно получить некоторые дополнительные теоретические результаты.

**Упражнение 9.14.** Рассмотрите линейную наблюдаемую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \omega(t); \\ y(t) &= C(t)x(t), \end{aligned} \quad (9.285)$$

где  $\omega(t)$  — известный возмущающий вектор.

Пусть  $z(t)$  — желаемый выход,  $e(t) = z(t) - y(t)$ . Рассмотрите функционал  $J_3$  [уравнение (9.267)]. Покажите, что оптимально управление

$$u(t) = R^{-1}(t)B'(t)[h(t) - K(t)x(t)], \quad (9.286)$$

где  $K(t)$  — решение уравнения Риккати (9.269) с граничным условием (9.270), а вектор  $h(t)$  — решение линейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]'h(t) - \\ &- C'(t)Q(t)z(t) + K(t)\omega(t) \end{aligned} \quad (9.287)$$

с граничным условием

$$h(T) = C'(T)Q(T)z(T). \quad (9.288)$$

Из уравнения Гамильтона—Якоби найдите минимальную стоимость. Предположите теперь, что  $z(t) = 0$  при любом  $t \in [t_0, T]$ . Можно ли получить  $h(t)$ , не зная возмущения  $\omega(t)$  на всем интервале  $t \in [t, T]$ ?

**Упражнение 9.15.** Рассмотрите линейную наблюдаемую систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \omega(t); \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) + v(t), \end{aligned} \right\} \quad (9.289)$$

где  $\omega(t)$  и  $v(t)$  — известные возмущающие векторы.

Пусть  $z(t)$  — желаемый выход;  $e(t) = z(t) - y(t)$  и функционал  $J_3$  (9.267). Найдите оптимальное управление и уравнение минимальной стоимости.

## 9.10. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ, ИНВАРИАНТНЫХ ВО ВРЕМЕНИ

В этом параграфе мы рассмотрим задачу слежения для линейных инвариантных во времени систем, для случая, когда желаемый выход — постоянный вектор, а время неограниченно возрастает. Все результаты будут приближенными и справедливыми лишь для очень больших значений конечного времени  $T$ . К сожалению, на данный момент времени нет теории, рассматривающей предельный случай  $T = \infty$ .

Рассмотрим наблюдаемую и управляемую линейную инвариантную во времени систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \right\} \quad (9.290)$$

Пусть  $\hat{z}$  — постоянный вектор, представляющий собой желаемый выход, и поэтому ошибка равна

$$e(t) = \hat{z} - y(t) = \hat{z} - Cx(t). \quad (9.291)$$

Рассмотрим функционал

$$\hat{J}_3 = \frac{1}{2} \int_0^T [\langle \mathbf{e}(t), \mathbf{Q}\mathbf{e}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}\mathbf{u}(t) \rangle] dt, \quad (9.292)$$

полагая, что постоянные матрицы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  положительно определены. Очевидно, что если  $T$  задано и конечно, то для решения этой задачи можно воспользоваться законом управления 9.5.

Известно<sup>1</sup>, что при  $T \rightarrow \infty$  «матрица усиления»  $\mathbf{K}(t)$  уравнения Риккати (9.269) стремится к постоянной положительно определенной матрице  $\hat{\mathbf{K}}$ . Напомним, что эта матрица  $\hat{\mathbf{K}}$  является положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения

$$-\hat{\mathbf{K}}\mathbf{A} - \mathbf{A}'\hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\hat{\mathbf{K}} - \mathbf{C}'\mathbf{Q}\mathbf{C} = 0. \quad (9.293)$$

Пусть время  $T$  велико, но конечно. Пусть  $T_1$  и  $T_2$  — два других очень больших значения времени, причем

$$0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T \ll \infty. \quad (9.294)$$

Представим матрицу  $\hat{\mathbf{K}}$  в виде решения уравнения (9.269), получаемого при решении уравнения Риккати в «обратном» времени. Так как  $T_2 \ll T$ , аппроксимируем матрицу  $\mathbf{K}(t)$  матрицей  $\hat{\mathbf{K}}$  для всех  $t \in [0, T_2]$ :

$$\mathbf{K}(t) \approx \hat{\mathbf{K}}; \quad t \in [0, T_2]. \quad (9.295)$$

Используя эту аппроксимацию и закон управления 9.5, из уравнения (9.273) найдем

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\hat{\mathbf{K}})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{g}(t), \quad t \in [0, T_2], \quad (9.296)$$

а из уравнения (9.271) получим

$$\dot{\mathbf{g}}(t) \approx (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\hat{\mathbf{K}})'\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}'\mathbf{Q}\hat{\mathbf{z}}, \quad t \in [0, T_2]. \quad (9.297)$$

Обозначим через  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{W}$  матрицы

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\hat{\mathbf{K}}; \quad \mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'; \quad \mathbf{W} = \mathbf{C}'\mathbf{Q}. \quad (9.298)$$

Тогда уравнения (9.296) и (9.297) можно записать:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{G}\mathbf{x}(t) + \mathbf{S}\mathbf{g}(t); \quad t \in [0, T_2]; \quad (9.299)$$

$$\dot{\mathbf{g}}(t) \approx -\mathbf{G}'\mathbf{g}(t) - \mathbf{W}\hat{\mathbf{z}}; \quad t \in [0, T_2]. \quad (9.300)$$

Известно (см. закон управления 9.4), что собственные значения  $\mathbf{G}$  имеют отрицательные вещественные части. Поэтому собственные значения  $-\mathbf{G}'$  имеют положительные вещественные части. Следовательно, система (9.300) неустойчива. Тем не менее, поскольку  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  ( $\hat{J}_3$  не содержит стоимости конечного состояния) то и  $\mathbf{g}(T) = \mathbf{0}$ , и вектор

$$\mathbf{g}(T_2) = \int_{T_2}^T \Psi^{-1}(\tau, T_2) \mathbf{C}'\mathbf{Q}\hat{\mathbf{z}} d\tau \neq \mathbf{0} \quad (9.301)$$

конечен.

<sup>1</sup> По закону управления 9.4 в § 9.7.

Для приближенной системы (9.300) фундаментальная матрица равна  $e^{-G'(t-t_0)}$ , и поэтому имеем

$$\mathbf{g}(T_2) \approx e^{-G'(T_2-t)} \left[ \mathbf{g}(t) - \int_t^{T_2} e^{G'(\tau-t)} \mathbf{W}\hat{\mathbf{z}} d\tau, \right. \\ \left. t \in [0, T_2], \right. \quad (9.302)$$

или, эквивалентно,

$$\mathbf{g}(t) \approx e^{G'T_2} e^{-G't} \mathbf{g}(T_2) + \int_t^{T_2} e^{G'(\tau-t)} \mathbf{W}\hat{\mathbf{z}} d\tau, \quad (9.303) \\ t \in [0, T_2].$$

Так как желаемый выход  $\hat{\mathbf{z}}$  — постоянный вектор, находим

$$\int_t^{T_2} e^{G'(\tau-t)} \mathbf{W}\hat{\mathbf{z}} d\tau = \left( \int_t^{T_2} e^{G'\tau} d\tau \right) e^{-G't} \mathbf{W}\hat{\mathbf{z}} = \\ = -(\mathbf{G}')^{-1} \mathbf{W}\hat{\mathbf{z}} + (\mathbf{G}')^{-1} e^{G'T_2} e^{-G't} \mathbf{W}\hat{\mathbf{z}}. \quad (9.304)$$

При выводе уравнения (9.304) мы воспользовались следующими положениями:

1. Обратная матрица  $(\mathbf{G}')^{-1}$  существует, потому что все собственные значения  $\mathbf{G}'$  имеют отрицательные вещественные части.

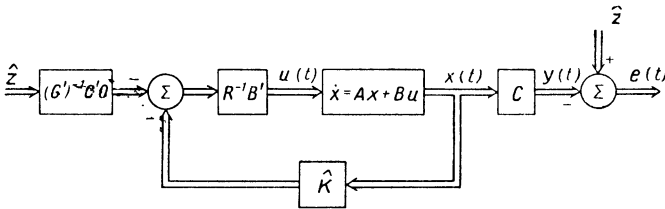


Рис. 9.19. Структура близкой к оптимальной инвариантной во времени системы для случая, когда желаемым выходом является постоянный вектор  $\hat{\mathbf{z}}$ . Матрица  $\mathbf{G} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\hat{\mathbf{K}}$

2. Свойством коммутативности матриц  $(\mathbf{G}')^{-1}$  и  $e^{G't}$  (докажите, что эти матрицы обладают свойством коммутативности).

Подставим теперь уравнение (9.304) в (9.303), тогда получим

$$\mathbf{g}(t) \approx -(\mathbf{G}')^{-1} \mathbf{W}\hat{\mathbf{z}} + e^{G'T_2} [(\mathbf{G}')^{-1} e^{-G't} \mathbf{W}\hat{\mathbf{z}} + e^{-G't} \mathbf{g}(T_2)] \quad (9.305)$$

при любом  $t \in [0; T_2]$ .

Выберем  $T_1$  таким, чтобы

$$0 \ll T_1 \ll T_2 \quad (9.306)$$

и

$$t \in [0, T_1]. \quad (9.307)$$

Так как собственные значения  $\mathbf{G}'$  имеют отрицательные действительные части, то

$$e^{G'T_2} \approx \mathbf{0} \quad (9.308)$$

и

$$\mathbf{g}(t) \approx -(\mathbf{G}')^{-1} \mathbf{W}\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{g}}, \quad t \in [0, T_1]. \quad (9.309)$$

Из уравнения (9.309) следует, что  $\mathbf{g}(t) \approx \hat{\mathbf{g}}$ , т. е. при малых  $t$  вектор  $\mathbf{g}(t)$  приблизительно постоянен. Эти аппроксимации тем лучше, чем

больше значения  $T$ ,  $T_2$  и  $T_1$ . Строгой теории для предельного случая  $T = \infty$  в настоящее время нет. Однако указанным аппроксимациям можно вполне доверять, если конечное время достаточно велико. На рис. 9.19 показана структура полученной следящей системы при принятых допущениях.

### 9.11. ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ, СВОДИМЫЕ К ЗАДАЧАМ О РЕГУЛЯТОРЕ ВЫХОДА

В § 9.10 указано, что предельный случай  $T = \infty$  в литературе строго еще не рассмотрен. Напомним, однако, что предельный случай хорошо исследован как для задачи об оптимальном регуляторе состояния, так и для задачи об оптимальном регуляторе выхода. Возникает вопрос: существуют ли задачи слежения, эквивалентные задачам о регуляторе выхода? Ответ на этот вопрос можно дать положительный.

В данном параграфе сформулируем необходимые условия относительно желаемого выхода, выполнение которых позволит нам преобразовать задачу слежения в задачу о регуляторе выхода. Изложим основные идеи применительно к системе с одним входом и одним выходом.

Обозначим через  $L(D)$  дифференциальный оператор:

$$L(D) = \{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0\};$$

$$D = \frac{d}{dt}. \quad (9.310)$$

Пусть  $y(t)$  — скалярный выход, а  $u(t)$  — скалярный вход системы, описываемой соотношением

$$L(D)y(t) = u(t). \quad (9.311)$$

Пусть  $z(t)$  — желаемый выход и

$$e(t) = z(t) - y(t) \quad (9.312)$$

— ошибка. Задача об оптимальном слежении состоит в отыскании управления, минимизирующего стоимость  $\hat{J}_3$ , заданную как

$$\hat{J}_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [qe^2(t) + ru^2(t)] dt, \quad q \gg 0, r \gg 0. \quad (9.313)$$

Теорию § 9.9 нельзя использовать для решения этой задачи. Попытаемся найти условия для  $z(t)$ , которые достаточны, чтобы гарантировать возможность решения задачи. Это можно сделать, преобразовав задачу слежения в задачу о регуляторе выхода.

Чтобы получить дополнительные условия для  $z(t)$ , применим оператор  $L(D)$  к обеим частям уравнения (9.312), тогда получим

$$L(D)e(t) = L(D)[z(t) - y(t)] = L(D)z(t) - L(D)y(t).$$

Пусть функция  $z(t)$  дифференцируема (по крайней мере)  $n$  раз и удовлетворяет уравнению

$$L(D)z(t) = \{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0\}z(t) = 0. \quad (9.314)$$

Из уравнений (9.311) и (9.314) получим

$$L(D)e(t) = -u(t) \text{ для любого } t. \quad (9.315)$$

Последнее уравнение можно рассматривать как связь между входом и выходом линейной инвариантной во времени системы с «входом»  $u(t)$  и «выходом»  $e(t)$ . Так как система (9.315) управляема и наблюдаема (почему?), то можно, воспользовавшись законом управления 9.4, найти

управление, минимизирующее стоимость  $\hat{J}_3$  (9.313). Итак, если определить фазовые координаты  $x_i(t)$ , положив  $x_i(t) = D^{i-1}e(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то систему (9.315) можно привести к виду, соответствующему закону управления 9.4. Таким образом, оптимальное управление будет линейной комбинацией ошибки и ее  $(n - 1)$  производной по времени.

Приведем два примера, иллюстрирующих эти идеи. В каждом случае задача слежения сводима к задаче о регуляторе выхода, потому что  $z(t)$  удовлетворяет уравнению (9.314).

**Пример 9.7.** Предположим, что система (9.311) имеет вид

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t). \quad (9.316)$$

Тогда сигнал  $z(t)$  определяется уравнением

$$z(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{-2t} \quad (9.317)$$

(где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — произвольные постоянные), причем

$$L(D)z(t) = \ddot{z}(t) + 3\dot{z}(t) + 2z(t) = 0 \quad (9.318)$$

для любого  $t$ .

**Пример 9.8.** Пусть система (9.311) имеет вид

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) = u(t), \quad (9.319)$$

тогда сигнал  $z(t)$  определяется уравнением

$$z(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1}, \quad (9.320)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  — произвольные постоянные, причем

$$L(D)z(t) = \frac{d^n}{dt^n} z(t) = 0 \quad (9.321)$$

для любого  $t$ .

Следующие упражнения иллюстрируют различные аспекты оптимальных задач слежения.

**Упражнение 9.16.** Объясните результаты этого параграфа при помощи понятий, основанных на передаточной функции системы. Каков физический смысл уравнения (9.314)?

**Упражнение 9.17.** Пусть  $L(D)$  и  $M(D)$  — линейные инвариантные во времени дифференциальные операторы ( $m < n$ ):

$$L(D) = \{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0\}; \quad (9.322)$$

$$M(D) = \{b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0\}. \quad (9.323)$$

Рассмотрите линейную управляемую и наблюдаемую систему

$$L(D)y(t) = M(D)u(t). \quad (9.324)$$

Пусть  $z(t)$  — желаемый выход и  $e(t) = z(t) - y(t)$ . Определите нетривиальные достаточные условия для  $z(t)$ , при которых минимизация стоимости (9.313) может быть выполнена при помощи теории систем регулирования выхода.

**Упражнение 9.18.** Данное упражнение требует использования ЦВМ. Рассмотрите систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); & x_1(0) &= 0; \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t); & x_2(0) &= 0; \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.325)$$

и

$$z(t) = \hat{z} = \text{const}; \quad t \in [0, T]; \quad e(t) = \hat{z} - y(t).$$

Необходимо минимизировать стоимость

$$J_3 = \frac{1}{2} \int_0^T [e^2(t) + ru^2(t)] dt. \quad (9.326)$$

Пользуясь законом управления 9.5, определите оптимальное управление. Обозначим через  $k_{11}(t)$ ,  $k_{12}(t)$  и  $k_{22}(t)$  элементы матрицы усиления  $K(t)$  размера  $2 \times 2$ , а через  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  — компоненты вектора  $g(t)$ .



Задано:

а)  $f = 0$ ;  $r = 0,1$ ;  $\hat{z} = 1$ . Начертите графики  $e(t)$ ,  $k_{11}(t)$ ,  $k_{12}(t)$ ,  $k_{22}(t)$ ,  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  в зависимости от  $t$  для  $T = 1; 2; 5; 10$  и  $20$ ;

б)  $f = 0$ ;  $\hat{z} = 1$ ;  $T = 2$ . Повторите пункт а) для  $r = 10; 1; 0,1; 0,02$  и  $0,001$ ;

в)  $r = 0,1$ ;  $\hat{z} = 1$ ;  $T = 2$ . Повторите пункт а) для  $f = 0; 1; 5; 10; 50$  и  $100$ ;

г) можете ли вы найти такое  $z(t)$ , для которого задача слежения сводится к задаче о регуляторе? Является ли таковым  $z(t) = \hat{z}$ ?

Упражнение 9.19. Повторите упражнение (9.18), заменив систему (9.325) системой

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); & x_1(0) &= 0; \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + u(t); & x_2(0) &= 0; \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (9.327)$$

### 9.12. АНАЛИЗ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В § 9.6 мы привели некоторые переходные процессы для регулятора, описываемого дифференциальным уравнением первого порядка. В этом параграфе приведем вычисленные переходные процессы для следящей системы (первого порядка), иллюстрирующие некоторые из свойств оптимальных следящих систем. Рассмотрим ту же систему, что и в § 9.6:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + u(t); \\ y(t) &= x(t). \end{aligned} \right\} \quad (9.328)$$

Желаемый выход равен  $z(t)$ , ошибка равна  $e(t) = z(t) - y(t) = z(t) - x(t)$ .

Стоимость выражается функционалом

$$J_3 = \frac{1}{2} f e^2(T) + \frac{1}{2} \int_0^T [q e^2(t) + r u^2(t)] dt, \quad (9.329)$$

где

$$f \geq 0; \quad q > 0; \quad r > 0. \quad (9.330)$$

Используя закон управления 9.5, находим, что оптимальное управление равно

$$u(t) = \frac{1}{r} [g(t) - k(t)x(t)]. \quad (9.331)$$

Скаляр  $k(t)$  является решением уравнения Риккати первого порядка:

$$\dot{k}(t) = -2ak(t) + \frac{1}{r} k^2(t) - q \quad (9.332)$$

с граничным условием

$$k(T) = f. \quad (9.333)$$

Скаляр  $g(t)$  является решением линейного уравнения первого порядка:

$$\dot{g}(t) = -\left[ a - \frac{1}{r} k(t) \right] g(t) - z(t) \quad (9.334)$$

с граничным условием

$$g(T) = fz(T). \quad (9.335)$$

На рис. 9.20,  $a$  показана реакция оптимальной системы на скачок на входе. При расчете  $r$  было выбрано в качестве параметра;  $a = -1$  (устойчивый случай),  $x(0) = 0$ ;  $f = 0$ ;  $q = 1$ ;  $T = 1$  и  $z(t) = +1$  для всех  $t$  из  $[0, 1]$ . Мы видим, что система лучше отслеживает скачок при уменьшении  $r$ . Отметим также, что в конце интервала управления ошибка начинает увеличиваться. Такое поведение вызвано тем, что  $f = 0$ . Так как  $f = 0$ ,  $g(T) = k(T) = 0$ , и поэтому  $u(T) = 0$ . Поскольку с ростом  $t$  управление убывает, а система устойчива, состояние начинает стремиться к 0.

На рис. 9.20, б показано поведение  $g(t)$ ;  $t \in [0, 1]$ . Отметим, что с уменьшением  $r$ ,  $g(t)$  остается почти постоянной в начале интервала управления, а затем убывает до нуля (так как  $f = 0$ ). Мы не приводим графиков  $k(t)$ , потому что  $k(t)$  не зависит от  $z(t)$  и его поведение было приведено на рис. 9.10, б.

На рис. 9.20, в показано, как ведет себя оптимальное управление. Заметим, что  $u(t)$  убывает до нуля. Этим определяется увеличение ошибки при  $t$ , близком к  $T$  (см. рис. 9.20, а).

На рис. 9.21, а, б и в показаны переходные процессы оптимальной системы при  $a = 0$  («чистый» интегратор);  $x(0) = 0$ ;  $f = 0$ ;  $T = 1$ ;  $g = 1$ ;  $z(t) = 1$ ;  $t \in [0, T]$ . Заметим, что увеличения ошибки при  $t \rightarrow T$

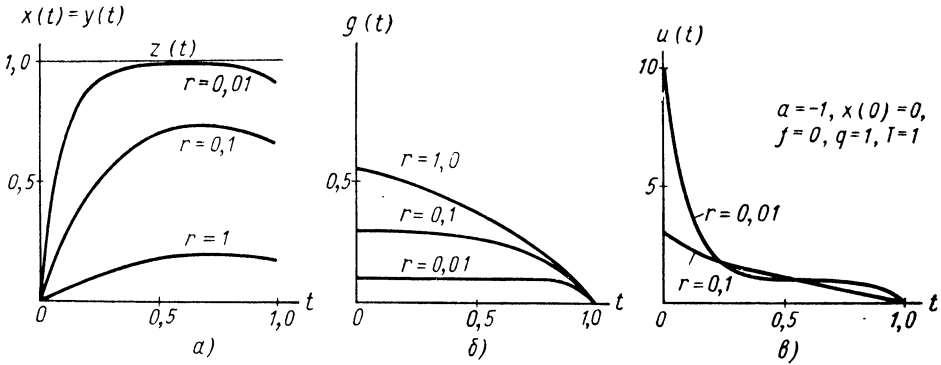


Рис. 9.20. а) Реакция оптимальной системы при  $a = -1$  (устойчивый случай) и  $z(t) = 1$ ; б) функция  $g(t)$  при  $a = -1$  и  $z(t) = 1$ ; в) оптимальное управление при  $a = -1$  и  $z(t) = 1$

не наблюдается, хотя оптимальное управление и убывает до нуля. Это происходит благодаря интегрирующим свойствам системы.

На рис. 9.22, а, б и в показаны переходные процессы оптимальной системы при  $a = +1$  (неустойчивый случай);  $x(0) = 0$ ;  $f = 0$ ;  $q = 1$ ;  $T = 1$  и  $z(t) = +1$ ;  $t \in [0, T]$ . Так как система неустойчива, то выход превосходит желаемый выход при  $t$ , близких к  $T$  (почему?). Отметим также, что при  $r = 0,01$  оптимальное управление  $u(t)$  меняет знак для того, чтобы противодействовать неустойчивости системы. Благодаря этому ошибка остается малой.

Рис. 9.23, а иллюстрирует противоречивую природу оптимальной системы. Мы вычислили переходные процессы для  $a = 0$ ;  $f = 0$ ;  $q = 1$  и  $T = 5$ . Желаемый выход равен

$$z(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 2,5; \\ 1 & 2,5 \leq t \leq 5,0. \end{cases} \quad (9.336)$$

Исходное состояние  $x(0) = 1$ . При  $r = 0,01$  на временном интервале  $[0; 1,5]$  система работает как обычный стабилизатор. Однако система «знает», что при  $t = 2,5$  «придет» ступенька, и поэтому начиная примерно с  $t = 2$ , выход возрастает. Таким образом, с момента прихода импульса ( $t > 2,5$ ) ошибка оказывается малой. При  $r = 1$  происходит то же самое. На рис. 9.23, б показано поведение  $g(t)$  для  $z(t)$ , определяемого уравнением (9.336).

На рис. 9.24 показана реакция оптимальной системы для случая, когда желаемый выход  $z(t)$  — синусоидальный сигнал. Реакция рассчитывалась для значений  $a = 0$ ;  $f = 0$ ;  $q = 1$ ;  $x(0) = 1$  и  $T = 5$ , где  $z(t)$  было принято равным

$$z(t) = 2 \sin(4t); \quad t \in [0; 5]. \quad (9.337)$$

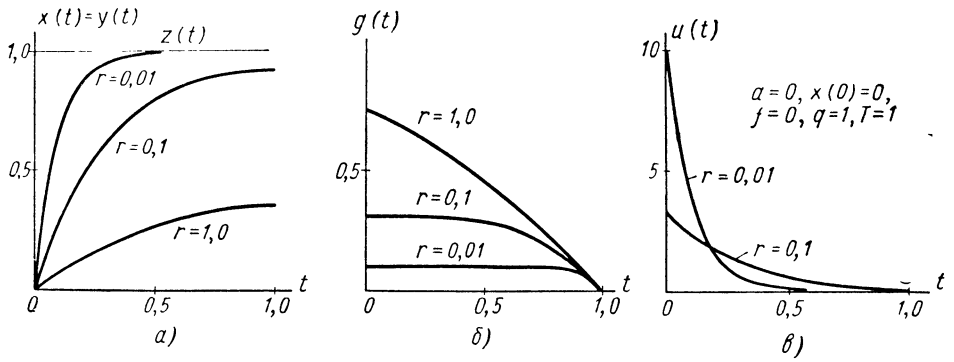


Рис. 9.21. а) Реакция оптимальной системы при  $a = 0$  (для интегратора) и  $z(t) = 1$ ; б) функция  $g(t)$  при  $a = 0$  и  $z(t) = 1$ ; в) оптимальное управление при  $a = 0$  и  $z(t) = 1$

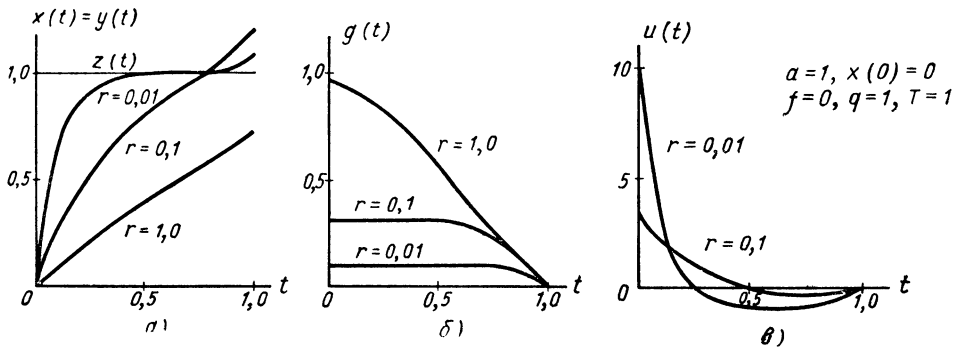


Рис. 9.22. а) Реакция оптимальной системы при  $a = +1$  (неустойчивый случай) и  $z(t) = 1$ ; б) функция  $g(t)$  при  $a = +1$  и  $z(t) = 1$ ; в) оптимальное управление при  $a = +1$  и  $z(t) = 1$

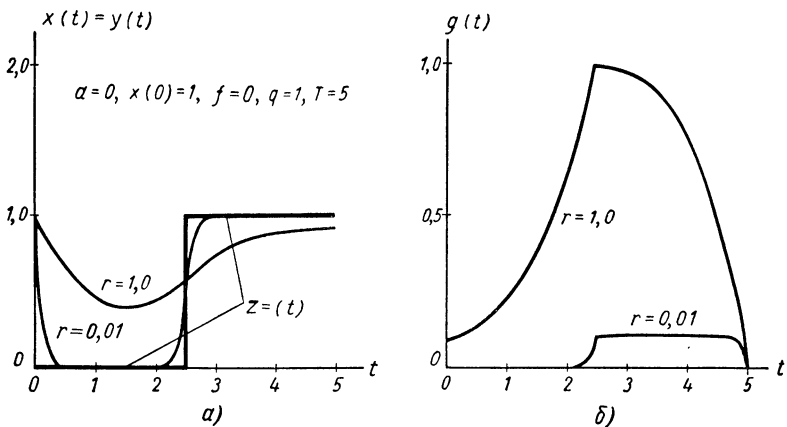


Рис. 9.23. а) Реакция оптимальной системы при  $a = 0$  и  $z(t)$ , представляющем собой задержанный единичный скачок б) функция  $g(t)$  при  $a = 0$  и  $z(t)$ , представляющем собой задержанный единичный скачок

Для малых значений  $r$  после начального переходного участка выход синусоидален и заметный фазовый сдвиг отсутствует. С ростом  $r$  система ведет себя как стабилизатор «среднего» уровня, теряя способность отслеживать входной сигнал.

$$a = 0, x(0) = 1, q = 1, f = 0, T = 5$$

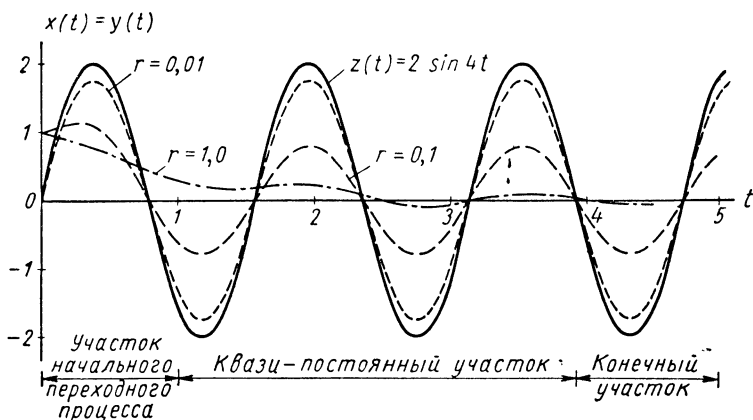


Рис. 9.24. Реакция оптимальной системы при  $a = 0$  и  $z(t) = 2 \sin(4t)$

На рис. 9.25 показаны ошибка  $e(t)$ , оптимальное управление  $u(t)$  и функция  $g(t)$  для  $a = -1$ ;  $x(0) = 0$ ;  $f = 0$ ;  $q = 1$ ;  $r = 0,1$ ;  $T = 10$  и

$$z(t) = \hat{z} = 1,0; \quad t \in [0; 10]. \quad (9.338)$$

Используем результаты, приведенные на рис. 9.25, для проверки соотношений, полученных в § 9.10. Заметим, что на квазипостоянном участке

$$\left. \begin{aligned} u(t) &\approx 0,91; \\ e(t) &\approx 0,09; \\ g(t) &\approx 0,31. \end{aligned} \right\} \quad (9.339)$$

Так как  $T = 10$  велико, находим, что  $k(t) = \hat{k}$ , где  $\hat{k}$  — положительное решение алгебраического уравнения (при  $r = 0,1$ ;  $a = -1$ ;  $q = 1$ ), т. е.

$$10\hat{k}^2 + 2\hat{k} - 1 = 0, \quad (9.340)$$

откуда

$$\hat{k} = 0,23. \quad (9.341)$$

Матрицы  $G$ ,  $S$  и  $W$  [уравнение (9.298)] представляют собой скалярные величины, равные

$$\left. \begin{aligned} G &= -1 - 10\hat{k} = -3,3; \\ S &= 10; \\ W &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (9.342)$$

Из уравнения (9.309) следует, что  $g(t) \approx -(G')^{-1}W\hat{z}$ , и поэтому для данной задачи

$$g(t) \approx -(-3,3)^{-1} \times 1 \times 1 = 0,315. \quad (9.343)$$

Это приближенное значение  $g(t)$  согласуется с данными рис. 9.25 и уравнением (9.339).

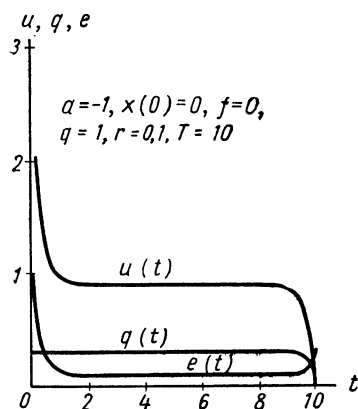


Рис. 9.25. Иллюстрация квазипостоянных величин при  $a = -1$  и  $z(t) = +1, t \in [0, 10]$

Если принять, что  $T$  неограниченно возрастает, то и «квазипостоянный» интервал, показанный на рис. 9.25, будет неограниченно возрастать. Так как и  $u(t)$ , и  $e(t)$  на этом интервале постоянны и не равны нулю, то легко видеть, что  $\lim_{T \rightarrow \infty} J_3^* = \infty$ , и поэтому, строго говоря, оптимального решения не существует.

Закончим этот параграф замечанием о «взвешивании» ошибки в зависимости от управления. В общем случае для того, чтобы получить хорошую следящую систему, ошибку следует оценивать раз в 50—100 «дороже», чем управление. Такой метод проб играет важную роль в практике и, без сомнения, будет развит дальше по мере накопления опыта в отношении поведения оптимальных систем.

### 9.13. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Поскольку оптимальная система с обратной связью линейна, то теория и выводы предыдущих параграфов этой главы математически изящны и практически весьма полезны. В этом параграфе прокомментируем некоторые дополнительные результаты, которые можно найти в литературе.

Рассмотрим системы регулирования с одним входом и одним выходом, которые мы изучали в § 9.8. Проектирование корректирующих устройств (последовательных или параллельных) было основной задачей обычной теории регулирования. Проектирование исполнительных устройств основывалось на переходном процессе и частотных характеристиках замкнутой системы. Возникает естественный вопрос, можно ли перевести свойства оптимальной инвариантной во времени системы с обратной связью на «язык» частотных характеристик.

Работа [114] содержит строгое изложение частотных свойств линейной системы, оптимальной по отношению к некоторой квадратичной функции стоимости. В ней рассматривается так называемая «обратная задача»<sup>1</sup> и, в частности, показано, что традиционный критерий «качества» (а именно, максимальное перерегулирование, высокий коэффициент усиления и плоская частотная характеристика) соответствует свойствам оптимального регулятора выхода.

Прежде чем приобрел популярность подход к системам с точки зрения пространства состояний, оптимальные системы проектировались при помощи преобразований Лапласа и Фурье. Преобразование из временной области в частотную можно произвести при помощи теоремы Парсеваля. Эта точка зрения изложена в гл. 2 работы [172] и в гл. 2 работы [42]. К сожалению, в настоящее время нет работ, содержащих строгое изложение этого вопроса и имеющих ценность как с методологической, так и с вычислительной точек зрения.

В работе [163] рассматривается проектирование оптимальных линейных систем методами динамического программирования. В ней содержатся примеры применения теории к нетривиальным практическим задачам.

Сконцентрируем теперь внимание на ослаблении некоторых из предположений, которые мы сделали на протяжении настоящей главы. Рассмотрим, например, линейную инвариантную во времени систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (9.344)$$

и функционал

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^T [\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \rangle + \langle u(t), \mathbf{R}u(t) \rangle] dt \quad (9.345)$$

<sup>1</sup> Обратная задача состоит в следующем: заданы система и закон управления; требуется установить, какой функционал минимизируется.

Одним из предположений было то, что матрица  $R$  является положительно определенной. Допустим, что в уравнении (9.345) мы приняли

$$R = 0 \quad (9.346)$$

и требуем, чтобы матрица  $Q$  была положительно определенной. Если  $R = 0$ , мы не «штрафуем» систему за расходование управляющей энергии. Оптимальное управление в этом случае будет пытаться перевести состояние системы в нуль как можно быстрее. Поскольку никаких ограничений на величину  $u(t)$  мы не накладываем, оптимальное управление оказывается импульсным. Импульсный характер управления «порожден» тем, что математическая постановка задачи не учитывает реальных ограничений управления. Чтобы показать это, запишем гамильтониан  $H$  для системы (9.344) и стоимости (9.345) при  $R = 0$ :

$$H = \frac{1}{2} \langle x(t), Qx(t) \rangle + \langle Ax(t), p(t) \rangle + \langle Bu(t), p(t) \rangle. \quad (9.347)$$

Так как гамильтониан  $H$  линеен относительно  $u(t)$  и  $u(t)$  не ограничено, легко видеть, что минимум  $H$  достигается при  $u(t) \rightarrow \pm\infty$  (если  $p(t) \neq 0$ ). Очевидно, что для получения разумного практического решения мы должны наложить ограничения на компоненты управляющего вектора.

Если сформулировать задачу с ограничениями величины управления, то решения уже не будут простыми и линейными (даже при  $R \neq 0$ ). В таких задачах оптимальное управление оказывается или строго непрерывным (с интервалами, в течение которых некоторые из управляющих переменных постоянны), или кусочно-постоянным.

Очень часто оптимальное управление оказывается вырожденным. В работе [211] рассматривается система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad (9.348)$$

где (скалярное) управление ограничено по величине  $|u(t)| \leq m$  и минимизируется функционал вида  $\frac{1}{2} \int_0^T \langle x(t), Qx(t) \rangle dt$ . В работе приводятся условия для  $A$ ,  $Q$  и  $b$ , при выполнении которых оптимальное управление вырождено. В остальных случаях оптимальное управление релейно.

В заключение мы хотим подчеркнуть, что любое нарушение предположений, сделанных в этой главе [в особенности неограниченности  $u(t)$ ], приводит в общем случае к более сложному решению и к системе с нелинейной обратной связью.

## ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ УПРАВЛЕНИЯ ГИПЕРСФЕРОЙ

### 10.1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 9 мы рассматривали оптимальное управление линейными системами по квадратичным функционалам и вывели аналитические выражения для оптимального управления в предположении, что управление не ограничено по величине. В этой главе получим аналитические выражения оптимального управления для одного класса нелинейных систем и разнообразных критериев в предположении, что управление ограничено по величине.

На протяжении всей главы будем предполагать, что вектор управления  $\mathbf{u}(t)$  ограничен гиперсферой. Иначе говоря, будем считать, что компоненты  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  вектора управления  $\mathbf{u}(t)$  ограничены соотношением

$$\|\mathbf{u}(t)\| = \sqrt{u_1^2(t) + \dots + u_r^2(t)} \leq m$$

для любого  $t$ .

Цель настоящей главы состоит в том, чтобы:

1. Проиллюстрировать минимизацию гамильтониана при ограничениях управления вида  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$ .

2. Показать, что оптимальные управления можно найти при помощи стандартных методов функционального анализа (таких как неравенство Шварца), не прибегая к принципу минимума.

3. Продемонстрировать на конкретных примерах ценность теории оптимального управления на стадии предварительного проектирования.

Рассмотрим теперь краткое содержание главы. В § 10.2 кратко обсудим физические и математические следствия ограничения  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$ .

В § 10.3 сформулируем задачу об оптимальном управлении и покажем, что при ограничении  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$  получается оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t)$ , компоненты  $u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_r^*(t)$  которого оказываются непрерывными, а не кусочно-непрерывными функциями времени.

В § 10.4 для одного класса нелинейных систем выведем очень простое выражение для оптимального управления. В § 10.5 обсудим предположения и методику, использованные в § 10.4.

В § 10.6 рассмотрим оптимальное управление классом систем, называемых системами с инвариантной нормой, по отношению к различным критериям. Для каждого из критериев оптимальное управление определяется при помощи неравенства Шварца.

В § 10.7 результаты § 7.7, 7.9 и 10.6 используем для того, чтобы показать ценность теории оптимального управления на стадии предварительного проектирования системы. Рассмотрим оптимальное по быстродействию управление скоростью вращающегося тела. Основные ограничения (скорость расхода топлива и свобода выбора места расположения реактивных двигателей) образуют три области ограничений, накладываемых на управляющий вектор. Мы вычислим переходные процессы в системе для каждой из областей ограничений и сделаем интересные выводы, которые могут оказаться полезными проектировщику систем управления.

Завершает главу § 10.8, который содержит некоторые замечания и рекомендации по дальнейшему изучению литературы в области оптимального управления.

Хотим предостеречь читателя, что класс систем, рассматриваемых в настоящей главе, является весьма специальным, и поэтому применимость полученных результатов ограничена. Однако способы, которые мы опишем, интересны, так как они показывают, что инженер, проектирующий системы управления, должен учитывать возможность существования «прямых методов» решения данной задачи, которые можно использовать вместо или в сочетании с необходимыми условиями принципа минимума.

## 10.2. ОБСУЖДЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ $\| \mathbf{u}(t) \| \leq m$

Во всех рассмотренных нами задачах об оптимальном управлении по быстродействию и по минимуму расхода топлива мы считали компоненты  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  управляющего вектора  $\mathbf{u}(t)$  ограниченными по величине:

$$|u_j(t)| \leq m, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (10.1)$$

Из этих ограничений величины управляющего вектора вытекает:

1) управляющий вектор должен принадлежать гиперкубу в  $r$ -мерном пространстве.

2) каждая компонента управляющего вектора независима от всех остальных. Например, тот факт, что в некоторый момент времени  $u_1(t) = +m$  не оказывает никакого влияния на величины остальных компонент  $u_2(t), \dots, u_r(t)$ , которые могут иметь любое значение, совместимое с уравнением (10.1).

Предположим теперь, что компоненты управляющего вектора  $\mathbf{u}(t)$  ограничены по величине соотношением

$$\sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t) + \dots + u_r^2(t)} = \|\mathbf{u}(t)\| \leq m. \quad (10.2)$$

Норма  $\|\mathbf{u}(t)\|$  есть эвклидова длина вектора  $\mathbf{u}(t)$ . Из этого ограничения следует:

1) управляющий вектор должен принадлежать гиперсфере (радиуса  $m$ ) в  $r$ -мерном пространстве;

2) компоненты управляющего вектора оказываются зависимыми. Например, если в некоторый момент времени  $t'$  имеет  $u_1(t') = m$ , то  $u_2(t') = u_3(t') = \dots = u_r(t') = 0$ .

Ограничение  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$  возникает довольно часто в том случае, когда управляющий вектор  $\mathbf{u}(t)$  представляет собой силу тяги реактивного двигателя, поворачиваемого в пространстве. Очень часто такое ограничение может быть искусственным и использоваться вместо ограничения  $|u_j(t)| \leq m$ . В этом случае гиперкуб аппроксимируют вписанной в него гиперсферой. Очевидно, что если  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$ , то и все компоненты  $u_j(t)$  вектора  $\mathbf{u}(t)$  автоматически удовлетворяют ограничению  $|u_j(t)| \leq m$ .



В этой главе мы увидим, что замена ограничений по гиперкубу ограничениями по гиперсфере приводит к решениям, которые являются «гладкими». Например, законы управления, оптимального по быстродействию и по минимуму расхода топлива, не определяются в этом случае с помощью линий переключения.

### 10.3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УПРАВЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНОМ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

В этом параграфе сформулируем задачу об оптимальном быстродействии при ограничении  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$  таким образом, чтобы читатель смог получить представление о структуре управляющего устройства для такого рода ограничений. Рассмотрим следующую задачу:

Дана система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad (10.3)$$

в которой управление ограничено соотношением

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq m \text{ для любого } t. \quad (10.4)$$

Задан начальный момент времени  $t_0$  и исходное состояние  $\mathbf{x}(t_0)$ .

Найти управление, переводящее систему (10.3) в начало координат  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  за минимально возможное время.

Начнем с использования принципа минимума. Гамильтониан данной задачи выражается уравнением

$$H = 1 + \langle \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), t], \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t) \rangle. \quad (10.5)$$

Дополнительный вектор  $\mathbf{p}(t)$  является решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i(t)} = -\sum_{j=1}^n p_j(t) \frac{\partial g_j[\mathbf{x}(t), t]}{\partial x_i(t)}, \quad (10.6)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Пусть  $\mathbf{p}^*(t)$  — решение уравнения (10.6), соответствующее оптимальной траектории  $\mathbf{x}^*(t)$  и оптимальному управлению  $\mathbf{u}^*(t)$ ,  $\|\mathbf{u}^*(t)\| \leq m$ . По принципу минимума необходимо, чтобы

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \leq H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (10.7)$$

откуда

$$\begin{aligned} 1 + \langle \mathbf{g}[\mathbf{x}^*(t), t], \mathbf{p}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{B}(t)\mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle &\leq \\ &\leq 1 + \langle \mathbf{g}[\mathbf{x}^*(t), t], \mathbf{p}^*(t) \rangle + \langle \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{p}^*(t) \rangle. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Из последнего неравенства получим соотношение

$$\langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{B}'(t)\mathbf{p}^*(t) \rangle \leq \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{B}'(t)\mathbf{p}^*(t) \rangle. \quad (10.9)$$

Уравнение (10.9) означает, что независимо от  $\mathbf{p}^*(t)$  оптимальное по быстродействию управление должно минимизировать скалярное произведение

$$\langle \mathbf{u}^*(t), \mathbf{B}'(t)\mathbf{p}^*(t) \rangle. \quad (10.10)$$

Оптимальное по быстродействию управление должно быть равно

$$\mathbf{u}^*(t) = -m \frac{\mathbf{B}'(t)\mathbf{p}^*(t)}{\|\mathbf{B}'(t)\mathbf{p}^*(t)\|}, \text{ если } \|\mathbf{B}'(t)\mathbf{p}^*(t)\| \neq 0. \quad (10.11)$$

Если, однако,

$$\|\mathbf{B}'(t)\mathbf{p}^*(t)\| = 0, \quad (10.12)$$

то  $\mathbf{B}'(t) \mathbf{p}^*(t) = \mathbf{0}$ , и уравнение (10.9) справедливо при всех  $\mathbf{u}(t)$ . Это — известный вырожденный случай, и поэтому, если выполняется условие (10.12), то никакой информации относительно  $\mathbf{u}^*(t)$  из уравнения (10.9) получить нельзя.

На рис. 10.1 показана геометрическая интерпретация уравнения (10.11). Пусть при  $t = t_1$   $n$ -мерный вектор  $\mathbf{p}^*(t_1) \neq \mathbf{0}$  и  $\mathbf{B}'(t) \neq \mathbf{0}$ . Матрица  $\mathbf{B}'(t_1) \neq \mathbf{0}$  соответствует линейному преобразованию  $n$ -мерного пространства дополнительного вектора в  $r$ -мерное пространство переменных управления. Таким образом, вектор  $\mathbf{p}^*(t_1)$  преобразуется в вектор  $\mathbf{B}'(t_1) \mathbf{p}^*(t_1)$ . Для минимизации скалярного произведения  $\langle \mathbf{u}(t_1), \mathbf{B}'(t_1) \mathbf{p}^*(t_1) \rangle$  вектор  $\mathbf{u}^*(t_1)$  должен быть направлен противоположно вектору  $\mathbf{B}'(t_1) \mathbf{p}^*(t_1)$  и быть возможно больше по величине, откуда  $\|\mathbf{u}^*(t_1)\| = m$ . Такое же положение имеет место в любой момент времени  $t$ .

Итак, из уравнения (10.11) следует, что оптимальное по быстродействию управление должно быть направлено противоположно вектору  $\mathbf{B}'(t) \mathbf{p}^*(t)$  и иметь максимальную возможную величину, т. е.  $\|\mathbf{u}^*(t)\| = m$ .

Если подставить уравнение (10.11) в (10.3) (опустив для удобства значок \*), то получим

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), t] - m \mathbf{B}(t) \frac{\mathbf{B}'(t) \mathbf{p}(t)}{\|\mathbf{B}'(t) \mathbf{p}(t)\|}. \quad (10.13)$$

Уравнения (10.13) и (10.6) являются каноническими уравнениями для данной задачи. Для конкретной системы мы можем решить канонические уравнения и найти оптимальное управление при условии, что оно существует и единственно.

Очень важной особенностью оптимального управления

$$\mathbf{u}^*(t) = - \frac{m \mathbf{B}'(t) \mathbf{p}^*(t)}{\|\mathbf{B}'(t) \mathbf{p}^*(t)\|}$$

является непрерывность по времени его компонент  $u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, \dots, u_r^*(t)$ . Это непосредственно следует из непрерывности  $\mathbf{p}^*(t)$  (почему?) и  $\mathbf{B}'(t)$ . Данное свойство прямо противоположно кусочной постоянности компонент оптимального по быстродействию управляющего вектора в случае ограничения его гиперкубом<sup>1</sup>. Если  $\mathbf{u}^*(t)$  — непрерывная векторная функция, то и  $\mathbf{x}^*(t)$  также непрерывна. Это означает, что оптимальная по быстродействию траектория не имеет «углов», и поэтому не следует ожидать в фазовом пространстве никаких линий «переключения». Оптимальное по быстродействию управление оказывается нелинейной, но «гладкой» функцией от состояния системы.

Далее на конкретном примере проиллюстрируем все эти понятия, а также вычислительные трудности, которые могут возникнуть.

**Пример 10.1.** Рассмотрим оптимальное по быстродействию управление системой

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (10.14)$$

<sup>1</sup> См. теорему 6.2.

с ограничением

$$\sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} \leq 1. \quad (10.15)$$

Предположим, что  $(\xi_1, \xi_2)$  — начальное и  $(0, 0)$  — конечное состояния. Гамильтониан для этой задачи равен

$$H = 1 - x_1(t) p_1(t) - 2x_2(t) p_2(t) + [u_1(t) + u_2(t)] p_1(t) + u_2(t) p_2(t). \quad (10.16)$$

Управление, минимизирующее гамильтониан, выражается уравнением

$$u(t) = - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} \right\|}. \quad (10.17)$$

Выполнив указанные операции, найдем

$$u_1(t) = - \frac{p_1(t)}{\sqrt{p_1^2(t) + [p_1(t) + p_2(t)]^2}}; \quad (10.18)$$

$$u_2(t) = - \frac{p_1(t) + p_2(t)}{\sqrt{p_1^2(t) + [p_1(t) + p_2(t)]^2}}.$$

Дополнительные переменные являются решениями дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= - \frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = p_1(t); \\ \dot{p}_2(t) &= - \frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = 2p_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

Обозначим через  $\pi_1$  и  $\pi_2$  (неизвестные) начальные значения дополнительных переменных, соответствующие исходному состоянию  $(\xi_1, \xi_2)$ . Решения уравнений (10.19) тогда запишутся:

$$\left. \begin{aligned} p_1(t) &= \pi_1 e^t; \\ p_2(t) &= \pi_2 e^{2t}. \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

Подставим уравнения (10.20) и (10.18) в систему (10.14). Поскольку уравнения линейны, то, проинтегрировав их, получим, что  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  определяются уравнениями

$$x_1(t) = e^{-t} \left( \xi_1 - \int_0^t e^\tau \frac{2\pi_1 e^\tau + \pi_2 e^{2\tau}}{\sqrt{2\pi_1^2 e^{2\tau} + \pi_2^2 e^{4\tau} + 2\pi_1 \pi_2 e^{3\tau}}} d\tau \right); \quad (10.21)$$

$$x_2(t) = e^{-2t} \left( \xi_2 - \int_0^t e^\tau \frac{\pi_1 e^\tau + \pi_2 e^{2\tau}}{\sqrt{2\pi_1^2 e^{2\tau} + \pi_2^2 e^{4\tau} + 2\pi_1 \pi_2 e^{3\tau}}} d\tau \right), \quad (10.22)$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — начальные значения переменных состояния (фазовых координат) при  $t = 0$ . Пусть  $t^*$  — минимальное время, требующееся для перевода исходного состояния  $(\xi_1, \xi_2)$  в  $(0, 0)$ . Подставим

$$x_1(t^*) = x_2(t^*) = 0; \quad t = t^* \quad (10.23)$$

в уравнения (10.21) и (10.22) и, таким образом, установим связь между  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $t^*$ . Можно получить дополнительное соотношение для  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $t^*$ , воспользовавшись тем, что  $H = 0$  для всех  $t \in [0, t^*]$ , в том числе  $H = 0$  и при  $t = t^*$ . Итак, подставляя соотношения (10.23), (10.20) и (10.18) в уравнение (10.16), получим

$$\sqrt{2\pi_1^2 e^{2t^*} + \pi_2^2 e^{4t^*} + 2\pi_1 \pi_2 e^{3t^*}} = 1. \quad (10.24)$$

Если бы можно было вычислить интегралы, входящие в уравнения (10.21) и (10.22) то тогда для экстремального управления можно было бы получить аналитическое выражение. В ряде случаев это возможно, но в общем случае их надо вычислять при помощи вычислительной машины. В следующем параграфе рассмотрим класс систем, для которых легко получить аналитическое выражение управления, оптимального по быстрдействию.

Этот пример показывает, что отыскание экстремальных управлений сводится к вычислению некоторых интегралов. Аналитические трудности возникают из-за того, что интегралы получаются очень громоздкими. Таким образом, аналитически решить задачу с двумя заданными граничными точками, как правило, невозможно.

#### 10.4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

В § 10.3 мы сформулировали задачу об оптимальном быстродействии с целью проиллюстрировать применение принципа минимума в случае, когда управление ограничено по величине соотношением  $\|u(t)\| \leq m$  для любого  $t$ . В этом параграфе получим аналитическое выражение оптимального по быстродействию управления для одного класса нелинейных систем. Этот класс нелинейных систем весьма ограничен, однако выражение для оптимального управления оказывается исключительно простой функцией состояния и получается непосредственно, без помощи принципа минимума.

Полученные результаты важны с теоретической точки зрения. Оказывается, что существует (по крайней мере) одна практическая система, попадающая в эту категорию. Позднее мы ее детально исследуем.

Сначала рассмотрим следующую задачу:

**Задача 10.1.** Дана система

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t] + u(t); \quad x(t_0) = \xi. \quad (10.25)$$

Предположим:

- а) система управляема;
- б) управляющий вектор  $u(t)$  и вектор состояния  $x(t)$  имеют одинаковую размерность  $n$ ;
- в) управление  $u(t)$  ограничено по величине соотношением

$$\|u(t)\| = \sqrt{u_1^2(t) + \dots + u_n^2(t)} \leq m \quad (10.26)$$

при любом  $t \geq t_0$ .

- г) вектор-функция  $f[x(t), t]$  обладает свойством

$$\langle f[x(t), t], x(t) \rangle = h[\|x(t)\|, t] \quad (10.27)$$

для любых  $x(t)$  и  $t \geq t_0$ . Функция  $h[\|x(t)\|, t]$  — некоторая скалярная функция от нормы  $\|x(t)\|$  [т. е. от эвклидовой длины вектора состояния  $x(t)$  и от времени  $t$ ].

Найти управление  $u^*(t)$ , переводящее систему (10.25) из любого заданного исходного состояния  $x(t_0) = \xi$  в начало координат  $0$  пространства состояний (фазового пространства) за наименьшее возможное время.

Прежде чем рассматривать физическую трактовку задачи, сделаем некоторые тривиальные, но очень важные выводы.

**Лемма 10.1.** Пусть  $u(t)$  — управление, уменьшающее норму  $\|x(t)\|$  решения  $x(t)$  системы (10.25)

$$\text{от } \|x(t_0)\| = \|\xi\| \text{ до } \|x(t^*)\| = 0$$

за минимально возможное время  $t^*$ . Тогда  $u(t) = u^*(t)$ , т. е. управление  $u(t)$  оптимально по быстродействию.

**Доказательство.** Это очевидно, потому что  $x(t^*) = 0$  только в том случае, когда  $\|x(t^*)\| = 0$ .

На протяжении всей этой главы будем иметь дело с производной по времени от длины вектора. Поэтому полезно доказать следующую лемму.

<sup>1</sup> Этот параграф основан на результатах работы [11].

**Лемма 10.2.** Пусть  $\boldsymbol{w}(t)$  — вектор с компонентами  $w_1(t), w_2(t) \dots, w_n(t)$ , тогда

$$\frac{d}{dt} \|\boldsymbol{w}(t)\| = \frac{\langle \dot{\boldsymbol{w}}(t), \boldsymbol{w}(t) \rangle}{\|\boldsymbol{w}(t)\|} = \left\langle \dot{\boldsymbol{w}}(t), \frac{\boldsymbol{w}(t)}{\|\boldsymbol{w}(t)\|} \right\rangle. \quad (10.28)$$

**Доказательство.** Уравнение (10.28) получено прямым вычислением:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\boldsymbol{w}(t)\| &= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^n w_i^2(t) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n w_i^2(t) \right]^{-\frac{1}{2}} 2 \sum_{i=1}^n \dot{w}_i(t) w_i(t) = \\ &= \frac{\langle \dot{\boldsymbol{w}}(t), \boldsymbol{w}(t) \rangle}{\|\boldsymbol{w}(t)\|}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Пусть теперь  $\boldsymbol{x}(t)$  — решение уравнения (10.25). Из уравнений (10.28) и (10.25) находим, что скорость изменения  $\|\boldsymbol{x}(t)\|$  можно найти из соотношения

$$\frac{d}{dt} \|\boldsymbol{x}(t)\| = \frac{\langle \dot{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{x}(t) \rangle}{\|\boldsymbol{x}(t)\|} = \frac{\langle \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), t], \boldsymbol{x}(t) \rangle}{\|\boldsymbol{x}(t)\|} + \frac{\langle \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t) \rangle}{\|\boldsymbol{x}(t)\|}. \quad (10.30)$$

По предположению г) задачи 10.1 и, в частности, путем подстановки соотношения (10.27) в уравнение (10.30), получим

$$\frac{d}{dt} \|\boldsymbol{x}(t)\| = \frac{h[\|\boldsymbol{x}(t)\|, t]}{\|\boldsymbol{x}(t)\|} + \left\langle \boldsymbol{u}(t), \frac{\boldsymbol{x}(t)}{\|\boldsymbol{x}(t)\|} \right\rangle. \quad (10.31)$$

Уравнение (10.31) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее поведение нормы  $\boldsymbol{x}(t)$ ,  $\|\boldsymbol{x}(t)\|$  как функции от управления  $\boldsymbol{u}(t)$ . Введем обозначения в уравнение (10.31):

$$y(t) = \|\boldsymbol{x}(t)\|; \quad (10.32)$$

$$a[y(t), t] = \frac{h[\|y(t)\|, t]}{\|y(t)\|}; \quad (10.33)$$

$$v(t) = \left\langle \boldsymbol{u}(t), \frac{\boldsymbol{x}(t)}{\|\boldsymbol{x}(t)\|} \right\rangle, \quad (10.34)$$

тогда получим

$$\dot{y}(t) = a[y(t), t] + v(t), \quad (10.35)$$

где

$$y(t_0) = \|\boldsymbol{x}(t_0)\| = \|\xi\| > 0.$$

Наша цель — решить задачу 10.1. Заметим, однако, что перевод любого исходного состояния в нуль за минимальное время эквивалентен уменьшению длины исходного состояния до нуля за минимальное время и наоборот. Из леммы 10.1 следует, что управление, уменьшающее до нуля длину исходного вектора состояния за минимальное время, является также и решением задачи 10.1. Уравнение (10.35) является дифференциальным уравнением первого порядка. Следовательно, если мы найдем  $v(t)$ , переводящее систему (10.35) из любого исходного состояния  $y(t_0) > 0$  в нуль за минимальное время, и сможем связать это  $v(t)$  с вектором  $\boldsymbol{u}(t)$  при помощи уравнения (10.34), то такая процедура даст нам оптимальное управление  $\boldsymbol{u}^*(t)$ . Это — путь, которому мы будем следовать.

Чтобы сформулировать задачу об оптимальном быстрейшем действии для системы

$$\dot{y}(t) = a[y(t), t] + v(t), \quad y(t_0) > 0, \quad (10.36)$$

мы должны наложить ограничения на величину  $v(t)$ . Они получаются следующим образом. Так как  $v(t) = \left\langle \mathbf{u}(t), \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\rangle$ , то из неравенства Шварца<sup>1</sup> следует

$$|v(t)| = \left| \left\langle \mathbf{u}(t), \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\rangle \right| \leq \|\mathbf{u}(t)\| \left\| \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\| \leq m, \quad (10.37)$$

потому что  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$  и  $\frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}$  — вектор единичной длины.

Таким образом, скаляр  $v(t)$  ограничен по величине соотношением

$$|v(t)| \leq m. \quad (10.38)$$

Но задачу об оптимальном по быстродействию управлении системой первого порядка мы уже решили в § 7.10. Используя результаты § 7.10 и соотношение  $y(t) = \|\mathbf{x}(t)\| \geq 0$ , получим, что функция

$$v^*(t) = -m \quad (10.39)$$

переводит любое исходное  $y(t_0) > 0$  в нуль за минимальное время (если это возможно). Следовательно, оптимальный по быстродействию управляющий вектор  $\mathbf{u}^*(t)$  должен удовлетворять соотношению

$$\left\langle \mathbf{u}^*(t), \frac{\mathbf{x}^*(t)}{\|\mathbf{x}^*(t)\|} \right\rangle = v^*(t) = -m, \quad (10.40)$$

где  $\mathbf{x}^*(t)$  — состояние оптимальной системы в момент времени  $t$ .

Сразу получим, что оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t)$  определяется уравнением

$$\mathbf{u}^*(t) = -m \frac{\mathbf{x}^*(t)}{\|\mathbf{x}^*(t)\|} \quad (10.41)$$

и состояние  $\mathbf{x}^*(t)$  есть решение дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] - m \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}, \quad (10.42)$$

начинающееся из известного исходного состояния  $\mathbf{x}(t_0) = \xi$  (при условии, что решение существует).

Очевидно, что оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t)$  (10.41) единственно. Это вытекает из единственности решения уравнения (10.42) и того обстоятельства, что существует одно и только одно  $\mathbf{u}^*(t)$ , удовлетворяющее уравнению (10.40).

Представим эти результаты в виде следующего закона управления.

**Закон управления 10.1** (решение задачи 10.1). Оптимальное по быстродействию управление, являющееся решением задачи 10.1, равно

$$\mathbf{u}^*(t) = -m \frac{\mathbf{x}^*(t)}{\|\mathbf{x}^*(t)\|} \quad (10.43)$$

при любом  $t \geq t_0$ . Управление  $\mathbf{u}^*(t)$  единственно (при условии, что оно существует).

Из уравнения (10.43) следует, что оптимальное управление должно быть максимально возможным ( $\|\mathbf{u}^*(t)\| = m$ ) и направлено противоположно состоянию  $\mathbf{x}^*(t)$ .

В следующем параграфе рассмотрим физический смысл предположений задачи 10.1 и закона управления 10.1.

<sup>1</sup> Напомним, что неравенство Шварца устанавливает  $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$  (см. § 2.12).

## 10.5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В § 10.4 мы сформулировали задачу об оптимальном быстродействии (задача 10.1) и нашли ее решение (закон управления 10.1). В этом параграфе обсудим способ, которым был получен закон управления 10.1, и важность предположений, принятых при формулировке задачи 10.1.

Читатель, вероятно, заметил, что наш метод решения отличается от стандартных шагов, вытекающих из принципа минимума и описанных в § 10.3. Основная идея § 10.4 состояла в том, чтобы рассматривать дифференциальное уравнение относительно эвклидовой нормы  $\|\mathbf{x}(t)\|$  [см. уравнения (10.30) и (10.31)] и найти управление, обращающее  $\|\mathbf{x}(t)\|$  в нуль за минимальное время. Предположения, сделанные при формулировке задачи 10.1, состояли в следующем:

1. Однородная часть уравнения (10.31)  $\frac{h[\|\mathbf{x}(t)\|, t]}{\|\mathbf{x}(t)\|}$  не зависит от компонент  $x_i(t)$  состояния  $\mathbf{x}(t)$ , а является функцией только  $\|\mathbf{x}(t)\|$ .

2. «Управление»  $v(t) = \left\langle \mathbf{u}(t), \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\rangle$  ограничено по величине неравенством  $|v(t)| \leq m$ . Таким образом, ограничения «управления» не зависят от состояния и времени.

Если внимательно рассмотреть уравнение (10.31), то можно обнаружить, что оптимальное по быстродействию управление  $\mathbf{u}(t) = -m \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}$  обладает следующим свойством: скорость изменения

$\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|$  нормы  $\|\mathbf{x}(t)\|$  при таком управлении «наименьшая»<sup>1</sup> из всех возможных для каждого момента времени  $t$  и каждого состояния  $\mathbf{x}(t)$ .

Проверить это очень легко. Пусть  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  — допустимый управляющий вектор, отличный от оптимального:

$$\|\hat{\mathbf{u}}(t)\| \leq m, \quad \hat{\mathbf{u}}(t) \neq -\frac{m\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}. \quad (10.44)$$

С помощью неравенства Шварца из уравнений (10.44), (10.31) и (10.40) получим

$$\left\langle \hat{\mathbf{u}}(t), \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\rangle > -m. \quad (10.45)$$

Эти результаты можно трактовать следующим образом: «Локально-оптимальное» управление, т. е. управление, локально вызывающее наискорейшее убывание нормы  $\|\mathbf{x}(t)\|$ , оказывается оптимальным глобально и наоборот. Конечно, последнее заключение справедливо только для задачи 10.1 и не является общим свойством всех систем, оптимальных по быстродействию.

Проиллюстрируем это на примере системы, которая удовлетворяет некоторым, но не всем предположениям задачи 10.1.

**Пример 10.2.** Рассмотрим управляющую систему (гармонический осциллятор)

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t); \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t). \quad (10.46)$$

Будем считать, что скалярное управление  $u(t)$  ограничено по величине

$$|u(t)| \leq 1. \quad (10.47)$$

<sup>1</sup> «Наименьшая» в смысле наибольшая по модулю отрицательная величина.

Применим методику § 10.4 и найдем  $\frac{d}{dt} \| \mathbf{x}(t) \|$  для системы (10.46):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \| \mathbf{x}(t) \| &= \frac{x_2(t) x_1(t) - x_1(t) x_2(t)}{\| \mathbf{x}(t) \|} + \frac{x_2(t) u(t)}{\| \mathbf{x}(t) \|} := \\ &= u(t) \frac{x_2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}}. \end{aligned} \quad (10.48)$$

Уравнение (10.27) для системы (10.46) удовлетворяется, потому что  $h[\| \mathbf{x}(t), t \|] = 0$  для любых  $\mathbf{x}(t)$  и  $t$ . Таким образом, предположения а и г задачи 10.1 удовлетворяются, а предположения б и в — нет.

Попытаемся теперь найти «локально-оптимальное» управление. Другими словами, мы хотим найти управление  $u'(t)$ , которое делает  $\frac{d}{dt} \| \mathbf{x}(t) \|$  наиболее отрицательной в каждый из моментов времени. Из уравнения (10.28) с учетом уравнения (10.47) находим, что это «локально-оптимальное» управление выражается в виде

$$u'(t) = - \operatorname{sign} \left\{ \frac{x_2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}} \right\} = - \operatorname{sign} \{ x_2(t) \}. \quad (10.49)$$

Это управление не идентично глобально-оптимальному управлению  $u^*(t)$ . Напомним, что мы нашли последнее в § 7.7 [см. уравнение (7.283) при  $\omega = -1$ ]. Глобально-оптимальное управление  $u^*(t) = -1$ , когда состояние находится выше линии переключения  $\gamma$  и  $u = +1$  для всех состояний ниже линии переключения  $\gamma$  (см. рис. 7.41). Так как линия переключения  $\gamma$  (см. рис. 7.41) не совпадает с осью  $x_1$ , то «локально-оптимальное» управление  $u'(t)$  не идентично глобально-оптимальному управлению  $u^*(t)$ , которое является единственным. Заштрихованная на рис. 10.2 область представляет собой множество состояний, для которых «локально-оптимальное» управление  $u'(t) = - \operatorname{sign} \{ x_2(t) \}$  отличается от глобально-оптимального по быстрдействию управления  $u^*(t)$ . На рис. 10.2 показаны истинно оптимальная по быстрдействию траектория  $T_1$  и траектория  $T_2$ , произведенная управлением  $u'(t)$ . Траектории идентичны до точки  $Q$ . После нее неоптимальная траектория  $T_2$  проходит ближе к началу координат, чем траектория  $T_1$ , пока траектории не достигнут оси  $x_1$ . Однако к тому моменту, когда начальное состояние по траектории  $T_2$  попадает в точку  $P$ , то же начальное состояние уже достигнет начала координат по траектории  $T_1$ . В идеальном случае траектория  $T_2$  закончится в точке  $p$ , но в любой практической системе из-за неидеальности реле состояние  $p$  постепенно достигнет начала координат вдоль зигзагообразной траектории, показанной на рис. 10.2. Грубо говоря, управление  $u'(t)$  «близоруко», потому что оно не учитывает будущих результатов текущего управления (и поэтому оптимально только локально). Для состояний, достаточно удаленных от начала координат, траектории, соответствующие  $u^*(t)$  и  $u'(t)$ , почти идентичны. Превосходство  $u^*(t)$  обнаруживается лишь вблизи от начала координат.

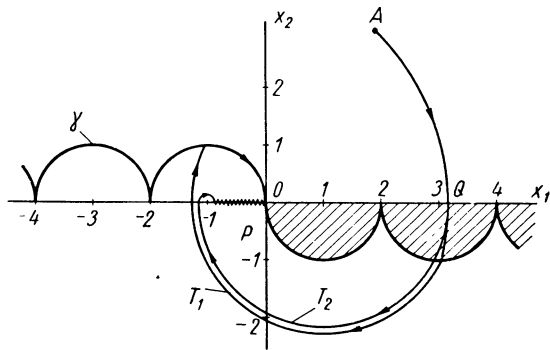


Рис. 10.2. Траектория  $T_1$  оптимальна по быстрдействию. Траектория  $T_2$  получается при помощи управления  $u'(t) = - \operatorname{sign} \{ x_2(t) \}$

Нахождение оптимального по быстрдействию управления путем сведения системы  $n$ -го порядка к системе первого порядка не представляло никаких трудностей. Но найти оптимальное управление при помощи принципа минимума исключительно сложно. Чтобы убедиться в этом, следуя методике § 10.3 [уравнение (10.11)], найдем, что оптимальное по быстрдействию управление должно быть равно

$$\mathbf{u}^*(t) = -m \frac{\mathbf{p}^*(t)}{\| \mathbf{p}^*(t) \|}, \quad (10.50)$$



где  $\mathbf{p}^*(t)$  — дополнительный вектор, соответствующий оптимальным по быстродействию управлению  $\mathbf{u}^*(t)$  и траектории  $\mathbf{x}^*(t)$ . Канонические уравнения для задачи 10.1 имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i^*(t) &= f_i[\mathbf{x}^*(t), t] - \frac{p_i^*(t)}{\|\mathbf{p}^*(t)\|}; \\ \dot{p}_i^*(t) &= - \sum_{j=1}^n p_j^*(t) \frac{\partial f_j[\mathbf{x}^*(t), t]}{\partial x_i^*(t)} \end{aligned} \right\} \quad (10.51)$$

для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Поскольку оптимальное по быстродействию управление равно

$$\mathbf{u}^*(t) = -m \frac{\mathbf{x}^*(t)}{\|\mathbf{x}^*(t)\|}, \quad (10.52)$$

то на основании уравнений (10.50) и (10.52) решения канонических уравнений должны удовлетворять соотношению

$$\frac{\mathbf{p}^*(t)}{\|\mathbf{p}^*(t)\|} = \frac{\mathbf{x}^*(t)}{\|\mathbf{x}^*(t)\|}. \quad (10.53)$$

Сложно даже проверить, что уравнение (10.53) справедливо, не говоря уже о том, что исключительно трудно, если не невозможно, вывести уравнение (10.53), решая уравнения (10.51).

**Упражнение 10.1.** Пользуясь предположениями, принятыми в задаче 10.1, убедитесь, что решения  $\mathbf{p}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$ , связанные соотношением (10.53), удовлетворяют уравнениям (10.51).

Прямой метод § 10.4 позволяет сделать еще одно упрощение. Если попытаться решить задачу 10.1 при помощи принципа минимума, то можно найти экстремальное управление. Как отмечалось в гл. 6, нужно еще доказать существование оптимального управления, и лишь убедившись, что экстремальное управление единственно, можно сделать вывод о том, что найденное экстремальное управление оптимально по быстродействию. Так как мы имеем дело с нелинейной системой с переменными параметрами, проверить единственность исключительно трудно. Подчеркнем, что все эти вопросы в изложенном решении задачи 10.1 мы опустили.

Наконец, обсудим практическую реализацию оптимального управления  $\mathbf{u}^*(t)$ . Так как  $i$ -я компонента  $u_i^*(t)$  равна

$$u_i^*(t) = -m \frac{x_i^*(t)}{\|\mathbf{x}^*(t)\|}, \quad (10.54)$$

то надо измерять компоненты вектора состояния  $x_i^*(t)$  и делить каждую компоненту на  $\sqrt{x_1^{*2}(t) + \dots + x_n^{*2}(t)}$ . В работе [199] описана схема, которую можно использовать для приблизительного вычисления квадратного корня из суммы квадратов произвольного числа переменных. Таким образом, получение оптимального по быстродействию управления не требует слишком сложной с практической точки зрения системы.

В следующем параграфе рассмотрим управление так называемыми «системами с инвариантной нормой». Системы с инвариантной нормой образуют класс нелинейных (или линейных) систем вида  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{u}(t)$ , где  $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$  обладает свойством:  $\langle \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t], \mathbf{x}(t) \rangle = 0$  для любых  $\mathbf{x}(t)$  и  $t$ . Таким образом, системы с инвариантной нормой представляют собой особый класс систем того же типа, что и системы, рассмотренные в задаче 10.1.

**Упражнение 10.2.** Исследуйте оптимальное по быстродействию управление к началу координат для системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{B}[\mathbf{x}(t), t] \mathbf{u}(t), \|\mathbf{u}(t)\| \leq m. \quad (10.55)$$

Считайте, что система (10.55) удовлетворяет всем предположениям задачи 10.1. Кроме того, примите, что матрица  $\mathbf{B}(t)$  размера  $n \times n$  ортогональна для любых  $\mathbf{x}(t)$  и  $t$ . Покажите, что оптимальное по быстродействию управление к началу координат равно

$$\mathbf{u}^*(t) = -m \mathbf{B}'[\mathbf{x}^*(t), t] \frac{\mathbf{x}^*(t)}{\|\mathbf{x}^*(t)\|}. \quad (10.56)$$

У к а з а н и е: см. § 2.14.

**Упражнение 10.3.** Рассмотрите задачу 10.1 и покажите, что при заданном исходном состоянии  $\mathbf{x}(t_0) = \xi$  оптимальным по быстродействию управлением к области

$$S = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = r\} \quad (10.57)$$

будет

$$\mathbf{u}^*(t) = \begin{cases} -m \frac{\mathbf{x}^*(t)}{\|\mathbf{x}^*(t)\|}, & \text{если } r < \|\xi\|; \\ +m \frac{\mathbf{x}^*(t)}{\|\mathbf{x}^*(t)\|}, & \text{если } r > \|\xi\|. \end{cases} \quad (10.58)$$

**Упражнение 10.4.** Рассмотрите линейную систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [k\mathbf{I} + \mathbf{S}] \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t), \|\mathbf{u}(t)\| \leq m, \quad (10.59)$$

где  $k$  — произвольная постоянная;  $\mathbf{I}$  — единичная матрица и  $\mathbf{S}$  — косо-симметричная матрица:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{S}'; \quad (10.60)$$

а) покажите, что эта система удовлетворяет всем предположениям задачи 10.1;

б) если  $\mathbf{x}(0) = \xi$  — исходное состояние, то его можно перевести в начало координат лишь при условии

$$\|\xi\| < \frac{m}{k}, \text{ если } k > 0. \quad (10.61)$$

При  $k \leq 0$  любое состояние можно перевести в начало координат;

в) при  $k < \frac{m}{\|\xi\|}$  минимальное время  $t^*$ , требующееся для перевода  $\xi$  в  $\mathbf{0}$ , равно

$$t^* = -\frac{1}{k} \log \left( 1 + \frac{k \|\xi\|}{m} \right); \quad (10.62)$$

г) найдите оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t) = -m \frac{\mathbf{x}^*(t)}{\|\mathbf{x}^*(t)\|}$ , решив канонические уравнения. У к а з а н и е: фундаментальная матрица системы (10.59) равна  $e^{[k\mathbf{I} + \mathbf{S}]t} = e^{kt} \Phi(t)$ , где  $\Phi(t)$  — ортогональная матрица;

д) покажите, что время  $t^*$  (10.62) является решением управления Гамильтона—Якоби при любом  $\mathbf{x}$ .

## 10.6. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С ИНВАРИАНТНОЙ НОРМОЙ<sup>1</sup>

В этом параграфе мы рассмотрим управление классом систем, которые называются системами с инвариантной нормой. К данному классу систем относятся такие системы, у которых при отсутствии управления эвклидова длина вектора состояния постоянна. Дадим сначала некоторые точные определения, а затем перейдем к формулировке и решению оптимальных задач для систем с инвариантной нормой по отношению к некоторым критериям. Оптимальное управление найдем не по принципу минимума, а с помощью неравенства Шварца.

**Определение 10.1.** Динамическая система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t); t] + \mathbf{u}(t) \quad (10.63)$$

<sup>1</sup> Материал этого параграфа основан на работах [10] и [12].

называется системой с инвариантной нормой, если решение  $\mathbf{x}(t)$  однородной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t); t] \quad (10.64)$$

обладает свойством

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\| = 0 \quad (10.65)$$

для всех  $\mathbf{x}(t)$  и  $t$ . Эквивалентным является следующий способ определения инвариантности нормы системы (10.63): известно [см. уравнение (10.28)], что

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\| = \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|}, \quad (10.66)$$

и поэтому, по уравнениям (10.65) и (10.64) норма системы  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t); t] + \mathbf{u}(t)$  инвариантна, если

$$\langle \mathbf{g}[\mathbf{x}(t); t], \mathbf{x}(t) \rangle = 0 \quad (10.67)$$

для всех  $\mathbf{x}(t)$  и  $t$ .

**Пример 10.3.** Однородная система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= t^4 \sin \{x_1(t) x_2(t)\} x_2^2(t) x_1^3(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -t^4 \sin \{x_1(t) x_2(t)\} x_2(t) x_1^4(t) \end{aligned} \right\} \quad (10.68)$$

является системой с инвариантной нормой, потому что справедливо уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) x_1(t) + \dot{x}_2(t) x_2(t) &= t^4 \sin \{x_1(t) x_2(t)\} x_2^2(t) x_1^4(t) - \\ &- t^4 \sin \{x_1(t) x_2(t)\} x_2^3(t) x_1^4(t) = 0. \end{aligned} \quad (10.69)$$

Пусть дана линейная однородная система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{S}(t) \mathbf{x}(t); \quad (10.70)$$

каким условиям должна удовлетворять матрица системы  $\mathbf{S}(t)$  для того, чтобы система (10.70) была системой с инвариантной нормой? Таким условием является косо-симметричность матрицы  $\mathbf{S}(t)$ :

$$\mathbf{S}(t) = -\mathbf{S}'(t). \quad (10.71)$$

Чтобы показать это, образуем скалярное произведение (10.67), которое для системы (10.70) запишется в виде

$$\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{S}(t) \mathbf{x}(t) \rangle = 0. \quad (10.72)$$

Так как  $\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{S}(t) \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \mathbf{S}'(t) \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \rangle$  для любой  $\mathbf{S}(t)$ , то получим, что  $\mathbf{S}(t)$  должна быть такой, чтобы для любых  $\mathbf{x}(t)$  и  $t$  выполнялось равенство

$$\langle [\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}'(t)] \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \rangle = 0. \quad (10.73)$$

Следовательно, уравнение (10.71) справедливо.

Чтобы различать линейные и нелинейные системы с инвариантной нормой, дадим следующее определение

**Определение 10.2.** Будем называть линейную систему с инвариантной нормой

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{S}(t) \mathbf{x}(t); \quad \mathbf{S}(t) = -\mathbf{S}'(t) \quad (10.74)$$

самосопряженной. Сопряженной к системе (10.74), очевидно, является система  $\dot{\mathbf{z}}(t) = -\mathbf{S}'(t) \mathbf{z}(t) = \mathbf{S}(t) \mathbf{z}(t)$ , и, следовательно, система (10.74) является сопряженной к самой себе.

**Пример 10.4.** Линейная система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin t & -t^3 \\ -\sin t & 0 & -e^t \\ -t^3 & e^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (10.75)$$

является самосопряженной системой с инвариантной нормой.

После этих предварительных определений мы готовы сформулировать некоторые оптимальные задачи. Чтобы избежать повторов относительно предположений и т. д., сформулируем все оптимальные задачи в виде одного утверждения.

**Задача 10.2.** Дана управляемая система с инвариантной нормой

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t); t] + \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \xi. \quad (10.76)$$

Предположим, что размерности  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{x}(t)$  одинаковы и что  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$  при любом  $t$ .

Найти управление, переводящее систему (10.76) из исходного состояния  $\xi$  в  $\mathbf{0}$  и минимизирующее следующие функционалы.

**Задача 10.2а.** Время переходного процесса

$$J_A = \int_0^T dt = T, \quad T \text{ не задано.} \quad (10.77)$$

**Задача 10.2б.** Расход топлива

$$J_B = \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\| dt, \quad T \text{ не задано.} \quad (10.78)$$

**Задача 10.2в.** Линейную комбинацию затраченного времени и израсходованного топлива

$$J_B = \int_0^T \{k + \|\mathbf{u}(t)\|\} dt, \quad T \text{ не задано, } k > 0. \quad (10.79)$$

**Задача 10.2г.** Энергию управления

$$J_G = \int_0^T \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt, \quad T \text{ задано.} \quad (10.80)$$

**Задача 10.2д.** Линейную комбинацию затраченного времени и израсходованной энергии

$$J_D = \int_0^T \left\{ k + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|^2 \right\} dt, \quad T \text{ не задано, } k > 0. \quad (10.81)$$

Найдем оптимальное управление для каждой из сформулированных выше задач. Мы получим оптимальные управления при помощи неравенства Шварца. Доказательства сравнительно просты, потому что можно рассматривать дифференциальное уравнение первого порядка относительно нормы  $\mathbf{x}(t)$ . Так как система (10.76) является системой с инвариантной нормой, то  $\|\mathbf{x}(t)\|$  будет решением дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\| = \left\langle \mathbf{u}(t), \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\rangle = v(t). \quad (10.82)$$

Так как  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$ , получим, что  $v(t)$  ограничено неравенством

$$|v(t)| = \left| \left\langle \mathbf{u}(t), \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\rangle \right| \leq m. \quad (10.83)$$

Эти два уравнения будут неоднократно использоваться при отыскании оптимального управления для каждой из задач. Сначала для каждого из функционалов найдем наибольшую нижнюю границу, а затем покажем, что можно найти одно или более управлений, достигающих наибольшей нижней границы. Такие управления оптимальны. После этого уточним вопросы единственности.

Математический аппарат различных доказательств несложен, так как рассматриваются два соотношения первого порядка (10.82) и (10.83). Мы считаем, что читателю следует усвоить способы отыскания наибольшей нижней границы с помощью обычных неравенств и выкладки, касающиеся единственности.

Начнем с задачи 10.2а. Так как система (10.76) является системой с инвариантной нормой, относящейся к системам особого класса, рассматриваемым в задаче 10.1, то можно сформулировать следующий закон управления.

**Закон управления 10.2а (решение задачи 10.2а).** Единственное оптимальное по быстродействию управление  $\mathbf{u}_A^*(t)$ , т. е. управление, минимизирующее функционал  $J_A$  (10.77), равно

$$\mathbf{u}_A^*(t) = -m \frac{\mathbf{x}_A^*(t)}{\|\mathbf{x}_A^*(t)\|}, \quad (10.84)$$

где  $\mathbf{x}_A^*(t)$  — решение уравнения (10.76) при  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_A^*(t)$ . Минимальная величина  $J_A^*$  стоимости  $J_A$ , т. е. минимальное время  $t^*$ , требующееся для перевода  $\xi$  в  $\mathbf{0}$ , выражается уравнением

$$J_A^* = t^* = \frac{\|\xi\|}{m}. \quad (10.85)$$

**Доказательство.** Уравнение (10.84) следует из закона управления 10.1. Уравнение (10.85) получено подстановкой уравнения (10.84) в (10.82), т. е.

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}_A^*(t)\| = -m. \quad (10.86)$$

Интегрируя соотношение (10.86), получим

$$\|\mathbf{x}_A^*(t)\| = \|\xi\| - mt. \quad (10.87)$$

Но при  $t = t^*$  должно быть  $\|\mathbf{x}_A^*(t)\| = 0$ , и поэтому минимальное время равно  $t^* = \frac{\|\xi\|}{m}$ .

Перейдем к решению задачи 10.2б. Как увидим, управление, оптимальное по расходу топлива, неединственно.

**Закон управления 10.2б (решение задачи 10.2б).** Пусть  $\mathfrak{B}$  — множество неотрицательных скалярных функций  $\beta(t)$ , определенное как

$\mathfrak{B} = \{\beta(t) : 0 \leq \beta(t) \leq m \text{ для любого } t, \text{ причём}$

для каждой  $\beta(t)$  существует  $T_\beta$  такое, что  $\int_0^{T_\beta} \beta(t) dt = \|\xi\|\}$ . (10.88)

Тогда управление

$$\mathbf{u}_B^*(t) = -\beta(t) \frac{\mathbf{x}_B^*(t)}{\|\mathbf{x}_B^*(t)\|}, \quad \beta(t) \in \mathfrak{B} \quad (10.89)$$

оптимально по расходу топлива. Иначе говоря, управление  $\mathbf{u}_B^*(t)$  минимизирует функционал  $J_B$  (10.78). Так как  $\beta(t)$  неединственно, то и управления, оптимальные по расходу топлива, неединственны. Минимальное количество топлива  $J_B^*$ , требующееся для перевода  $\xi$  в  $\mathbf{0}$ , равно

$$J_B^* = \|\xi\|. \quad (10.90)$$

Если, кроме того,

$$\beta(t) = m \text{ для любого } t, \quad (10.91)$$

то [см. уравнение (10.84)] можно получить

$$\mathbf{u}_B^*(t) = -m \frac{\mathbf{x}_B^*(t)}{\|\mathbf{x}_B^*(t)\|} = \mathbf{u}_A^*(t), \quad (10.92)$$

откуда следует, что управление, оптимальное по быстрдействию, является также оптимальным и по расходу топлива.

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение (10.82), которое устанавливает, что

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\| = \left\langle \mathbf{u}(t), \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\rangle. \quad (10.93)$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|\xi\| + \int_0^t \left\langle \mathbf{u}(\tau), \frac{\mathbf{x}(\tau)}{\|\mathbf{x}(\tau)\|} \right\rangle d\tau. \quad (10.94)$$

Пусть  $T$  — время, такое, что  $\|\mathbf{x}(T)\| = 0$ . Тогда

$$\|\xi\| = - \int_0^T \left\langle \mathbf{u}(t), \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\rangle dt. \quad (10.95)$$

Из последнего уравнения найдем

$$\begin{aligned} \|\xi\| &= \left| - \int_0^T \left\langle \mathbf{u}(t), \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\rangle dt \right| \leq \int_0^T \left| \left\langle \mathbf{u}(t), \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\rangle \right| dt \leq \\ &\leq \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\| \left\| \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\| dt = \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\| dt = J_B. \end{aligned} \quad (10.96)$$

Итак, мы показали, что

$$J_B \geq \|\xi\|. \quad (10.97)$$

Это означает, что начальная норма  $\|\xi\|$  является наибольшей нижней границей стоимости  $J_B$ . Очевидно, управление, дающее эту наибольшую нижнюю границу  $\|\xi\|$ , оптимально.

Покажем далее, что любое управление  $\mathbf{u}_B^*(t)$ , определяемое уравнениями (10.88) и (10.89), оптимально. Так как

$$\|\mathbf{u}_B^*(t)\| = \beta(t), \quad (10.98)$$

то, подставив  $\mathbf{u}_B^*(t)$  в уравнение (10.95), получим

$$\begin{aligned} \|\xi\| &= \int_0^{T_B} \beta(t) \left\langle \frac{\mathbf{x}_B^*(t)}{\|\mathbf{x}_B^*(t)\|}, \frac{\mathbf{x}_B^*(t)}{\|\mathbf{x}_B^*(t)\|} \right\rangle dt = \\ &= \int_0^{T_B} \beta(t) dt = \int_0^{T_B} \|\mathbf{u}_B^*(t)\| dt, \end{aligned} \quad (10.99)$$

где  $T_\beta$  — время, требующееся для перевода  $\xi$  в  $\mathbf{0}$  для данного  $\beta(t)$ , т. е.

$$\mathbf{x}_B^*(T_\beta) = \mathbf{0} \quad (10.100)$$

Уравнение (10.99) показывает, что управление  $\mathbf{u}_B^*(t)$  соответствует наибольшей нижней границе  $J_B$  [см. уравнение (10.97)], равной  $\|\xi\|$ , и поэтому управление  $\mathbf{u}_B^*(t)$  оптимально по расходу топлива. Минимальная стоимость (топливо) равна

$$J_B^* = \|\xi\|. \quad (10.101)$$

Прямой подстановкой легко доказать, что управление  $\mathbf{u}_A^*(t)$ , оптимальное по быстродействию, является также оптимальным и по расходу топлива. Так как оптимальное по быстродействию управление единственно, а минимальное время  $t^*$  равно  $t^* = \frac{\|\xi\|}{m}$  (см. закон управления 10.2а), приходим к выводу, что время перехода, связанное с каждым  $\beta(t)$  из  $\mathfrak{B}$ , удовлетворяет неравенству

$$T_\beta > t^* = \frac{\|\xi\|}{m} \quad \text{для } \beta(t) \neq m. \quad (10.102)$$

Наконец, убедимся в том, что уравнение (10.89) выражает все управления, оптимальные по расходу топлива. Заметим, что из уравнения (10.89) следует:

1) оптимальное управление направлено противоположно вектору состояния;

2) управление может иметь произвольную амплитуду  $\beta(t)$ , не превосходящую  $m$ .

Пусть  $\mathbf{R}(t)$  — ортогональная матрица<sup>1</sup>; рассмотрим класс управлений, определяемых соотношением

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = -\beta(t) \mathbf{R}(t) \frac{\hat{\mathbf{x}}(t)}{\|\hat{\mathbf{x}}(t)\|}; \quad \mathbf{R}(t) \neq \mathbf{I}; \quad (10.103)$$

$$\beta(t) \in \mathfrak{B}; \quad \mathbf{R}'(t) \mathbf{R}(t) = \mathbf{I}.$$

Другими словами, рассмотрим управления  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ , полученные из управлений  $\mathbf{u}_B^*(t)$  ортогональным преобразованием. Так как  $\beta(t)$  и  $\mathbf{R}(t)$ , вообще говоря, произвольны, легко видеть, что множество управлений  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  идентично множеству управлений, переводящих состояние  $\xi$  в  $\mathbf{0}$  и удовлетворяющих неравенству  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$ .

Управления  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  и  $\mathbf{u}_B^*(t)$  имеют одинаковую величину, т. е.

$$\|\hat{\mathbf{u}}(t)\| = \|\mathbf{u}_B^*(t)\| = \beta(t), \quad (10.104)$$

так как

$$\|\mathbf{R}(t) \mathbf{x}(t)\| = \|\mathbf{x}(t)\|,$$

и поэтому  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  отличается от  $\mathbf{u}_B^*(t)$  лишь тем, что оно направлено не противоположно вектору состояния. Пусть  $T_\beta$  — время перехода, при котором  $\mathbf{x}_B^*(T_\beta) = \mathbf{0}$ , а  $\hat{T}_\beta$  — время перехода, при котором  $\hat{\mathbf{x}}(\hat{T}_\beta) = \mathbf{0}$ . Покажем, что

$$\int_0^{\hat{T}_\beta} \|\hat{\mathbf{u}}(t)\| dt > \int_0^{T_\beta} \|\mathbf{u}_B^*(t)\| dt \quad (10.105)$$

и, следовательно,  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  не является оптимальным по расходу топлива.

<sup>1</sup> См § 2.14.

Для этого [см. уравнение (10.104)] надо лишь доказать неравенство

$$\hat{T}_B > T_B. \quad (10.106)$$

Если подставить управление  $\mathbf{u}_B^*(t)$  в уравнение (10.93), то получим соотношение

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}_B^*(t)\| = -\beta(t); \quad \|\mathbf{x}_B^*(0)\| = \|\xi\|. \quad (10.107)$$

Если в то же уравнение подставить управление  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ , то получим

$$\frac{d}{dt} \|\hat{\mathbf{x}}(t)\| = -\beta(t) \frac{\langle \mathbf{R}(t) \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{x}}(t) \rangle}{\|\hat{\mathbf{x}}(t)\|^2}; \quad \|\hat{\mathbf{x}}(0)\| = \|\xi\|. \quad (10.108)$$

На основании неравенства Шварца и по предположению  $\mathbf{R}(t) \neq \mathbf{I}$ , получим

$$\langle \mathbf{R}(t) \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{x}}(t) \rangle < \|\hat{\mathbf{x}}(t)\|^2 \quad (10.109)$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \|\hat{\mathbf{x}}(t)\| > \beta(t); \quad \|\hat{\mathbf{x}}(0)\| = \|\xi\|. \quad (10.110)$$

Из уравнений (10.107) и (10.110) с помощью доказательств, аналогичных § 7.10, заключаем:

$$\hat{T}_B > T_B. \quad (10.111)$$

Скорость изменения  $\|\hat{\mathbf{x}}(t)\|$  превышает скорость изменения  $\|\mathbf{x}_B^*(t)\|$  в любой момент времени  $t$ . Таким образом, соотношение (10.105) доказано, и поэтому управления, оптимальные по расходу топлива, должны принадлежать к классу, определяемому управлением  $\mathbf{u}_B^*(t)$ .

Читатель, видимо, заметил, что доказательство закона управления 10.2б очень похоже на доказательство, использовавшееся при отыскании оптимальных по расходу топлива управлений для интегратора в § 8.2.

Перейдем теперь к задаче 10.2в, связанной с минимизацией стоимости  $J_B = \int_0^T |k + \|\mathbf{u}(t)\| dt$ . Стоимость  $J_B$  можно интерпретировать как линейную комбинацию потраченного времени и израсходованного топлива. Мы покажем, что управление  $\mathbf{u}_B^*(t)$ , минимизирующее стоимость  $J_B$ , является оптимальным по быстродействию<sup>1</sup> управлением  $\mathbf{u}_A^*(t)$ .

**Закон управления 10.2в (решение задачи 10.2в).** Пусть  $\mathbf{u}_B^*(t)$  — управление, минимизирующее стоимость  $J_B$  (10.79). Обозначим через  $J_B^*$  минимальную величину  $J_B$ . Тогда единственное оптимальное управление  $\mathbf{u}_B^*(t)$  равно

$$\mathbf{u}_B^*(t) = -m \frac{\mathbf{x}_B^*(t)}{\|\mathbf{x}_B^*(t)\|}, \quad (10.112)$$

а минимальная стоимость  $J_B^*$  равна

$$J_B^* = \|\xi\| \left( 1 + \frac{k}{m} \right). \quad (10.113)$$

Уравнение (10.112) означает, что оптимальное управление  $\mathbf{u}_B^*(t)$  идентично оптимальному по быстродействию управлению  $\mathbf{u}_A^*(t)$  [сравните уравнение (10.113) с (10.84)].

<sup>1</sup> К такому же выводу мы пришли и в § 8.2.



**Доказательство.** Из уравнения (10.96) имеем

$$\int_0^l \|\mathbf{u}(t)\| dt \geq \|\xi\|. \quad (10.114)$$

Так как  $t^* = \frac{\|\xi\|}{m}$  — минимальное время и  $k > 0$ , имеем также

$$kT \geq kt^* = \frac{k\|\xi\|}{m}. \quad (10.115)$$

Из уравнений (10.114) и (10.115) находим

$$\begin{aligned} J_B &= \int_0^T [k + \|\mathbf{u}(t)\|] dt = kT + \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\| dt \geq \\ &\geq \frac{k\|\xi\|}{m} + \|\xi\| = \|\xi\| \left(1 + \frac{k}{m}\right). \end{aligned} \quad (10.116)$$

Уравнение (10.116) означает, что величина  $\|\xi\| \left(1 + \frac{k}{m}\right)$  является наибольшей нижней границей стоимости  $J_B$ . Сначала прямой подстановкой покажем, что управление  $\mathbf{u}_B^*(t)$  (10.112) дает эту наибольшую нижнюю границу. Так как  $\|\mathbf{u}_B^*(t)\| = m$ , получим

$$J_B^* = \int_0^T [k + \|\mathbf{u}_B^*(t)\|] dt = \int_0^{t^* = \frac{\|\xi\|}{m}} (k + m) dt = \|\xi\| \left(1 + \frac{k}{m}\right). \quad (10.117)$$

Далее мы должны показать, что оптимальное управление  $\mathbf{u}_B^*(t)$  единственно. Для этого рассмотрим управление  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  (10.193), т. е. управление, которое мы использовали при доказательстве закона управления 10.2б. Очевидно, что время перехода  $\hat{T}_B$ , соответствующее  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ , превосходит

$t^* = \frac{\|\xi\|}{m}$ . Кроме этого, мы показали, что  $\int_0^{\hat{T}_B} \|\hat{\mathbf{u}}(t)\| dt \geq \|\xi\|$ .

Следовательно,

$$\int_0^{\hat{T}_B} [k + \|\hat{\mathbf{u}}(t)\|] dt > \|\xi\| \left(1 + \frac{k}{m}\right) = J_B^*. \quad (10.118)$$

и поэтому, поскольку класс управлений  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  идентичен классу управлений, обладающих свойством  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$ , единственность  $\mathbf{u}_B^*(t)$  доказана.

Найдем далее решение задачи 10.2г. Оптимальное управление, минимизирующее стоимость  $J_T$ , будем называть оптимальным по энергии. Сформулируем следующий закон управления.

**Закон управления 10.2г (решение задачи 10.2г).** Пусть  $\mathbf{u}_T^*(t)$  — управление, оптимальное по энергии, т. е. управление, минимизирующее

функционал  $J_T = \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt$ , с  $T$  заданным. Обозначим через  $J_T^*$

минимальное значение  $J_T$ . Тогда единственное оптимальное по энергии управление  $\mathbf{u}_T^*(t)$  определяется уравнением

$$\mathbf{u}_T^* = -\frac{\|\xi\|}{T} \cdot \frac{\mathbf{x}_T^*(t)}{\|\mathbf{x}_T^*(t)\|} \quad (10.119)$$

при условии, что заданное время перехода  $T \geq t^* = \frac{\|\xi\|}{m}$ ; последнее неравенство является необходимым условием существования решения.

Для этой задачи минимальное значение  $J_T^*$  определяется соотношением

$$J_T^* = \frac{\|\xi\|^2}{2T}. \quad (10.120)$$

**Доказательство.** Из доказательства закона управления 10.2б известно, что

$$\|\xi\| \leq \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\| dt. \quad (10.121)$$

Напомним <sup>1</sup>, что для любых двух кусочно-непрерывных функций  $a(t)$  и  $b(t)$  справедливо соотношение

$$\left[ \int_0^T a(t)b(t) dt \right]^2 \leq \left[ \int_0^T a^2(t) dt \right] \left[ \int_0^T b^2(t) dt \right]. \quad (10.122)$$

Если принять, что

$$a(t) = \|\mathbf{u}(t)\|, \quad b(t) = 1, \quad (10.123)$$

то из уравнения (10.122) получим

$$\left[ \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\| dt \right]^2 \leq T \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt. \quad (10.124)$$

Из уравнений (10.124) и (10.121) непосредственно видно, что

$$J_T = \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt \geq \frac{\|\xi\|^2}{2T}. \quad (10.125)$$

Прямой подстановкой несложно доказать, что управление  $\mathbf{u}_T^*(t)$  (10.119) обладает свойством

$$\frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{u}_T^*(t)\|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\|\xi\|^2}{T^2} dt = \frac{\|\xi\|^2}{2T}. \quad (10.126)$$

Это означает, что управление  $\mathbf{u}_T^*(t)$  соответствует наибольшей нижней границе  $J_T^* = \frac{\|\xi\|^2}{2T}$ , и поэтому управление  $\mathbf{u}_T^*(t)$  оптимально по энергии.

Теперь надо доказать, что управление  $\mathbf{u}_T^*(t)$  единственно. Для доказательства единственности заметим сначала, что неравенство (10.124) оказывается строгим равенством в том и только в том случае, когда  $\|\mathbf{u}(t)\| = \text{const}$  при любом  $t \in [0, \tau]$ . Следовательно, если  $\|\hat{\mathbf{u}}(t)\| \neq \text{const}$  для  $t \in [0, T]$ , то имеет место строгое неравенство

$$T \int_0^T \|\hat{\mathbf{u}}(t)\|^2 dt > \left[ \int_0^T \|\hat{\mathbf{u}}(t)\| dt \right]^2$$

откуда, в свою очередь, следует

$$\frac{1}{2} \int_0^T \|\hat{\mathbf{u}}(t)\|^2 dt > \frac{\|\xi\|^2}{2T}, \quad (10.127)$$

<sup>1</sup> См. § 3.15, уравнение (3.148).

и поэтому  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  не может быть оптимальным. Случай, когда  $\|\hat{\mathbf{u}}(t)\| = \text{const}$ , мы предлагаем рассмотреть самостоятельно. Итак, единственность доказана.

Так как оптимальное по энергии управление является функцией исходного состояния  $\xi$  и времени  $T$  и минимальная энергия  $J_T^* = \frac{\|\xi\|^2}{2T}$  убывает с ростом  $T$ , то мы отыскиваем оптимальное управление, минимизирующее линейную комбинацию потраченного времени и израсходованной энергии (задача 10.2д). Управление, минимизирующее стоимость  $J_D$  (10.81), определяется следующим законом управления.

**Закон управления 10.2д (решение задачи 10.2д).** Пусть  $\mathbf{u}_D^*(t)$  — управление, минимизирующее стоимость:

$$J_D = \int_0^T \left[ k + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|^2 \right] dt.$$

Обозначим через  $J_D^*$  минимальную величину  $J_D$ . Тогда при заданном  $k$  управление  $\mathbf{u}_D^*(t)$  единственно и определяется уравнениями

$$\mathbf{u}_D^*(t) = -m \frac{\mathbf{x}_D^*(t)}{\|\mathbf{x}_D^*(t)\|}, \quad \text{если } k \geq \frac{m^2}{2}; \quad (10.128)$$

$$\mathbf{u}_D^*(t) = -\sqrt{2k} \frac{\mathbf{x}_D^*(t)}{\|\mathbf{x}_D^*(t)\|}, \quad \text{если } k < \frac{m^2}{2}. \quad (10.129)$$

Минимальная стоимость  $J_D^*$  равна

$$J_D^* = \frac{\|\xi\|}{m} \left( k + \frac{1}{2} m^2 \right), \quad \text{если } k \geq \frac{m^2}{2}; \quad (10.130)$$

$$J_D^* = \sqrt{2k} \|\xi\|, \quad \text{если } k < \frac{m^2}{2}. \quad (10.131)$$

Время перехода, требующееся для перевода  $\xi$  в  $\mathbf{0}$ , равно

$$T = t^* = \frac{\|\xi\|}{m}, \quad \text{если } k \geq \frac{m^2}{2}; \quad (10.132)$$

$$T = \frac{\|\xi\|}{\sqrt{2k}}, \quad \text{если } k < \frac{m^2}{2}. \quad (10.133)$$

**Упражнение 10.5.** Докажите закон управления 10.2д. У к а з а н и е: сначала докажите, что управление должно быть постоянным по величине, пользуясь уравнениями (10.121) и (10.124), а также тем обстоятельством, что соотношение (10.124) является равенством в том и только в том случае, когда  $\|\mathbf{u}(t)\| = \text{const}$ . Докажите, что оптимальное управление должно иметь вид:  $-\alpha \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}$ , и найдите  $J_D(\alpha)$ . Примите  $\frac{\partial J_D(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$  и покажите, что  $\alpha = \sqrt{2k}$  или  $\alpha = m$  в зависимости от величины  $k$  (см. также § 6.24).

Надеемся, что читатель нашел интересными эти доказательства «типа неравенств». Нашей целью было продемонстрировать, что в частных случаях оптимальные законы управления можно найти, не прибегая к принципу минимума. Доказательства, использующие инструменты функционального анализа (такие как неравенство Шварца), часто имеют то преимущество, что они не затемняют физических положений задач, как это часто случается при введении дополнительных переменных.

Закончим этот параграф примером физической системы, которая является системой с инвариантной нормой.

Пример 10.5<sup>1</sup>. Рассмотрим асимметричное тело в пространстве. Это тело может быть спутником или любым другим космическим кораблем. Введем три оси  $1, 2$  и  $3$ , проходящие через центр масс тела. Предположим, что эти оси фиксированы относительно тела. Пусть  $I_1, I_2$  и  $I_3$  — три момента инерции тела относительно осей  $1, 2$  и  $3$  соответственно. Как показано на рис. 10.3,  $y_1(t), y_2(t)$  и  $y_3(t)$  — три угловые скорости относительно осей  $1, 2$  и  $3$ . Подчеркнем, что эта система координат связана с телом и все измерения производятся по отношению к этой системе координат, фиксированной относительно тела.

При отсутствии внешних моментов уравнения движения<sup>2</sup> имеют вид

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{y}_1(t) &= (I_2 - I_3) y_2(t) y_3(t); \\ I_2 \dot{y}_2(t) &= (I_3 - I_1) y_3(t) y_1(t); \\ I_3 \dot{y}_3(t) &= (I_1 - I_2) y_1(t) y_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.134)$$

Дифференциальные уравнения движения нелинейны. Члены  $(I_i - I_j) y_i(t) y_j(t)$  отображают гироскопический эффект связи. Если бы тело было абсолютно симметрично, т. е.  $I_1 = I_2 = I_3$ , то нелинейные члены были бы равны нулю и уравнения движения не были бы связаны.

Покажем далее, что система (10.134) является системой с инвариантной нормой согласно определению 10.1. На первый взгляд может показаться, что это не так, потому что находя скорость изменения величины вектора скорости  $\mathbf{y}(t)$ , мы получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}(t)\| &= \frac{d}{dt} \sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t) + y_3^2(t)} = \\ &= \left( \frac{I_2 - I_3}{I_1} + \frac{I_3 - I_1}{I_2} + \right. \\ &\left. + \frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) \frac{y_1(t) y_2(t) y_3(t)}{\|\mathbf{y}(t)\|} \neq 0. \end{aligned} \quad (10.135)$$

Это означает, что величина вектора скорости со временем изменяется. Таким образом,  $\mathbf{y}(t)$  представляет собой вектор состояния системы (10.134), но не является величиной инвариантной.

С физической точки зрения известно, что тело в пространстве, показанное на рис. 10.3, сохраняет неизменным свой угловой момент. Поэтому обозначим через  $\mathbf{x}(t)$  вектор углового момента, определяемый преобразованием:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}. \quad (10.136)$$

Через компоненты этого вектора уравнение (10.134) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} x_2(t) x_3(t); \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} x_3(t) x_1(t); \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} x_1(t) x_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.137)$$

Вычисляя теперь  $\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|$ , найдем

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\| = \frac{d}{dt} \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)} = 0, \quad (10.138)$$

и поэтому система (10.137) является системой с инвариантной нормой согласно определению 10.1.

<sup>1</sup> Мы рассматривали такую систему в примере 7.4 и в § 7.9.

<sup>2</sup> Систему уравнений (10.134) обычно называют уравнениями движения Эйлера. См. [85], гл. 5.

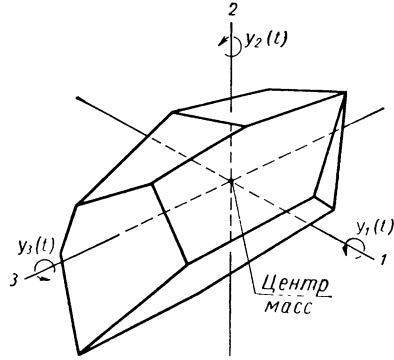


Рис. 10.3. Асимметричное тело с тремя осями  $1, 2$  и  $3$ , проходящими через центр масс

Уравнения (10.137) описывают движение тела в отсутствии прикладываемых к нему моментов. Вектор  $\mathbf{u}(t)$  можно получить с помощью реактивного двигателя, маховиков, устройств, использующих неравномерность силы притяжения, и т. д. В любом случае при наличии  $\mathbf{u}(t)$  уравнения движения примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} x_2(t) x_3(t) + u_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} x_3(t) x_1(t) + u_2(t); \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} x_1(t) x_2(t) + u_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.139)$$

Если ограничения управляющего момента  $\mathbf{u}(t)$  имеют вид

$$\|\mathbf{u}(t)\| = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t)} \leq m, \quad (10.140)$$

то вся теория, рассмотренная в настоящем параграфе, может быть использована для отыскания оптимального управляющего момента.

Можно дать физическую интерпретацию найденных законов управления. Например, на основании закона управления 10.2а, оптимальный по быстродействию момент должен быть равен

$$\mathbf{u}^*(t) = -m \frac{\mathbf{x}^*(t)}{\|\mathbf{x}^*(t)\|}. \quad (10.141)$$

Это означает, что для уменьшения вектора углового момента  $\mathbf{x}(t)$  до нуля за наименьшее возможное время вектор момента  $\mathbf{u}(t)$  надо направить противоположно вектору углового момента  $\mathbf{x}(t)$ , причем  $\mathbf{u}(t)$  должен быть как можно больше.

В следующем параграфе мы исследуем оптимальное по быстродействию управление космическим телом с одной осью симметрии ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) и сравним три различных способа оптимального управления.

**Упражнение 10.6.** Рассмотрите линейную самосопряженную систему (см. определение 10.2)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{S}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \xi, \\ \mathbf{S}(t) &= -\mathbf{S}'(t), \quad \|\mathbf{u}(t)\| \leq m. \end{aligned} \right\} \quad (10.142)$$

Докажите законы управления 10.2а—10.2д, пользуясь исключительно принципом минимума. У к а з а н и е: во всех доказательствах пользуйтесь ортогональностью фундаментальной матрицы  $\Phi(t; t_0)$  системы (10.142) при любом  $t$ . Многие доказательства можно найти в работе [12].

**Упражнение 10.7.** Считайте, что на вращающееся тело из примера 10.5 действуют моменты трения. Пусть  $\mathbf{x}(t)$  — вектор углового момента и  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$  — вектор управляющего момента. Покажите, что если уравнения движения тела имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\alpha(t) x_1(t) + \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} x_2(t) x_3(t) + u_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\alpha(t) x_2(t) + \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} x_3(t) x_1(t) + u_2(t); \\ \dot{x}_3(t) &= -\alpha(t) x_3(t) + \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} x_1(t) x_2(t) + u_3(t), \end{aligned} \right\} \quad (10.143)$$

где коэффициент трения  $\alpha(t) > 0$ , то оптимальное по быстродействию управление можно найти при помощи методов, описанных в § 10.4. Каков физический смысл того, что коэффициент трения  $\alpha(t)$  одинаков для всех трех уравнений?

**Упражнение 10.8.** Рассмотрите линейную инвариантную во времени самосопряженную систему

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{S} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \xi; \\ \mathbf{S} &= -\mathbf{S}', \quad \|\mathbf{u}(t)\| \leq m \end{aligned} \quad (10.144)$$

с функционалом

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^T [\|\mathbf{x}(t)\|^2 + r \|\mathbf{u}(t)\|^2] dt, \quad r > 0, \quad (14.145)$$

где  $T$  задано, а  $\mathbf{x}(T)$  — нет. Найдите оптимальное управление. Что происходит при  $T \rightarrow \infty$ ?

## 10.7. ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ СКОРОСТЬЮ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА С ОДНОЙ ОСЬЮ СИММЕТРИИ <sup>1</sup>

В этом параграфе применим теорию, развитую в § 7.7, 7.9 и 10.6, к задаче об управлении скоростью вращения космического тела с одной осью симметрии. Мы хотим показать, что применение теории оптимального управления крайне полезно на предварительной стадии проектирования, и детально продемонстрировать, какое влияние на работу системы оказывает изменение ограничений, накладываемых на управление.

В § 7.7 и 7.9 были получены уравнения движения космического тела с одной осью симметрии. Для полноты приведем эти уравнения еще раз. Пусть тело, рассмотренное в примере 10.5, имеет одну ось симметрии. Предположим, что осью симметрии является ось  $z$ . Это означает, что моменты инерции относительно осей 1 и 2 одинаковы:

$$I = I_1 = I_2 \neq I_3. \quad (10.146)$$

Если подставить соотношение (10.146) в уравнения (10.134), то окажется, что угловые скорости  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  и  $y_3(t)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} I\dot{y}_1(t) &= (I - I_3)y_3(t)y_2(t); \\ I\dot{y}_2(t) &= (I_3 - I)y_3(t)y_1(t); \\ I_3\dot{y}_3(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.147)$$

Предположим, что каким-либо способом мы получили вектор момента  $u(t)$ , и уравнения движения приняли вид

$$\left. \begin{aligned} I\dot{y}_1(t) &= (I - I_3)y_3(t)y_2(t) + u_1(t); \\ I\dot{y}_2(t) &= (I_3 - I)y_3(t)y_1(t) + u_2(t); \\ I_3\dot{y}_3(t) &= u_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.148)$$

Управляющие моменты можно получить с помощью какой-либо системы. Для этого можно воспользоваться реактивными двигателями, маховиками и т. д. Предположим, что мы выбрали реактивные двигатели. Следующая проблема — размещение этих двигателей. Из уравнений (10.148) видно, что скорость  $y_3(t)$  (т. е. угловая скорость тела относительно его оси симметрии) является функцией только компоненты  $u_3(t)$ , потому что

$$y_3(t) = y_3(0) + \frac{1}{I_3} \int_0^t u_3(\tau) d\tau. \quad (10.149)$$

Очевидно, скорость  $y_3(t)$  не зависит от  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ . Однако  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  зависят от  $y_3(t)$ . Часто желательно <sup>2</sup> управлять скоростью  $y_3(t)$  независимо от остальных скоростей. Поэтому двигатель  $J_3$ , развивающий тягу  $f_3(t)$ , разместим на теле так, чтобы вектор момента  $u_3(t)$ , получаемый за счет  $f_3(t)$ , имел вид

$$u_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3(t) \end{bmatrix}. \quad (10.150)$$

<sup>1</sup> Материал данного параграфа основан на работах [5] и [9].

<sup>2</sup> Например, в случае обитаемой космической станции можно создать искусственную гравитацию, установив  $y_3(t)$  постоянной и поддерживая  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  равными нулю. Если космическое тело является возвращаемым космическим кораблем, то вращение вокруг оси симметрии желательно с точки зрения аэродинамической устойчивости.

Иначе говоря, двигатель  $J_3$  должен давать момент только относительно оси симметрии, а следовательно, тяга  $f_3(t)$  — располагаться в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии (ось 3).

Рассмотрим далее задачу получения моментов  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ . Предложим три различные схемы получения этих моментов. Сравнивая их, сделаем некоторые выводы.

В следующих определениях компоненты вектора измеряются относительно осей 1, 2 и 3 тела. Оси 1, 2 и 3 образуют правую систему координат

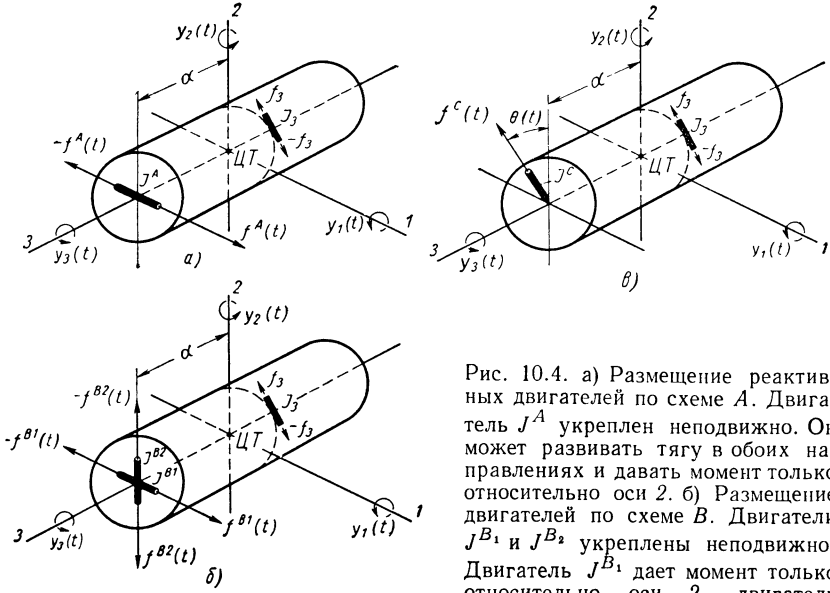


Рис. 10.4. а) Размещение реактивных двигателей по схеме А. Двигатель  $J^A$  укреплен неподвижно. Он может развивать тягу в обоих направлениях и давать момент только относительно оси 2. б) Размещение двигателей по схеме В. Двигатели  $J^{B_1}$  и  $J^{B_2}$  укреплены неподвижно. Двигатель  $J^{B_1}$  дает момент только относительно оси 2, двигатель  $J^{B_2}$  — относительно оси 1. в) Размещение двигателей по схеме С. Двигатель  $J^C$  может вращаться в плоскости, параллельной плоскости 1—2. Угол  $\theta(t)$  определяет направление вектора тяги  $f^C(t)$

нат, и поэтому на нее распространяются все правила определения направлений, соответствующие правой тройке единичных векторов.

**Схема А. Один фиксированный двигатель.** Единственный реактивный двигатель  $J^A$  укреплен на теле так, как показано на рис. 10.4, а. Вектор тяги имеет компоненты

$$f^A(t) = \begin{bmatrix} f_1^A(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.151)$$

и дает вектор момента  $u^A(t)$  с компонентами

$$u^A(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2^A(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha f_1^A(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.152)$$

Таким образом, тяга  $f^A(t)$  дает момент  $u_2^A(t) = \alpha f_1^A(t)$  относительно оси 2. Будем считать, что величина тяги ограничена:

$$\|f^A(t)\| = |f_1^A(t)| \leq F^A. \quad (10.153)$$

**Схема В. Два фиксированных двигателя.** Два реактивных двигателя  $J^{B_1}$  и  $J^{B_2}$  закреплены на теле так, как показано на рис. 10.4, б. Соответствующие векторы тяги  $\mathbf{f}^{B_1}(t)$  и  $\mathbf{f}^{B_2}(t)$  имеют компоненты

$$\mathbf{f}^{B_1}(t) = \begin{bmatrix} f_1^{B_1}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^{B_2}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2^{B_2}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.154)$$

и дают векторы моментов  $\mathbf{u}^{B_1}(t)$  и  $\mathbf{u}^{B_2}(t)$  с компонентами

$$\mathbf{u}^{B_1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2^{B_1}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha f_1^{B_1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}^{B_2}(t) = \begin{bmatrix} u_1^{B_2}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha f_2^{B_2}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.155)$$

Таким образом, тяга  $\mathbf{f}^{B_1}(t)$  дает момент  $u_2^{B_1}(t) = \alpha f_1^{B_1}(t)$  относительно оси 2, а тяга  $\mathbf{f}^{B_2}(t)$  — момент  $u_1^{B_2}(t) = \alpha f_2^{B_2}(t)$  относительно оси 1. Будем считать, что величины тяги каждого из двигателей ограничены соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \|\mathbf{f}^{B_1}(t)\| &= |f_1^{B_1}(t)| \leq F^B; \\ \|\mathbf{f}^{B_2}(t)\| &= |f_2^{B_2}(t)| \leq F^B. \end{aligned} \right\} \quad (10.156)$$

**Схема С. Один верньерный (поворотный) двигатель.** Один двигатель  $J^C$  укреплен на теле таким образом, что может вращаться в плоскости, перпендикулярной к оси 3 (рис. 10.4, в). Вектор тяги  $\mathbf{f}^C(t)$ , развиваемой двигателем  $J^C$ , имеет компоненты

$$\mathbf{f}^C(t) = \begin{bmatrix} f_1^C(t) \\ f_2^C(t) \end{bmatrix}. \quad (10.157)$$

Вектор момента  $\mathbf{u}^C(t)$  имеет компоненты

$$\mathbf{u}^C(t) = \begin{bmatrix} u_1^C(t) \\ u_2^C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha f_2^C(t) \\ \alpha f_1^C(t) \end{bmatrix}. \quad (10.158)$$

Таким образом, верньерный двигатель может давать моменты относительно осей 1 и 2 одновременно. Будем считать, что вектор тяги ограничен по величине соотношением

$$\|\mathbf{f}^C(t)\| = \sqrt{[f_1^C(t)]^2 + [f_2^C(t)]^2} \leq F^C. \quad (10.159)$$

Обсудим теперь задачу управления с физической точки зрения. Предположим, что до момента времени  $t = 0$  мы включали двигатель  $J_3$  для того, чтобы придать скорости  $y_3$  желаемую величину, скажем  $\hat{y}_3 \neq 0$ , и поэтому при  $t = 0$  имеем

$$y_3(0) = \hat{y}_3. \quad (10.160)$$

Из-за гироскопической связи, в общем случае, начальные значения двух других угловых скоростей  $y_1(0)$  и  $y_2(0)$  не будут равны нулю. При отсутствии внешних моментов при  $t > 0$  тело будет вращаться вокруг центра масс. Надо найти управляющий момент, который уменьшит до нуля скорости  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ . Иными словами, трехмерное вращательное движение тела



надо сделать «чисто» вращательным, причем скорость вращения должна быть равна заданной  $\hat{y}_3$ . Чтобы иметь разумную оптимальную задачу, нужно еще установить критерий. Выберем в качестве критерия минимальное время. Таким образом, физически задача состоит в следующем: уменьшить до нуля начальные скорости  $y_1(0)$  и  $y_2(0)$  за минимальное время, сохраняя скорость  $y_3(t)$  равной заданному значению  $\hat{y}_3$ , т. е.

$$y_3(t) = y_3(0) = \hat{y}_3 = \text{const} \quad \text{при } t > 0. \quad (10.161)$$

Если подставить  $y_3(t) = \hat{y}_3 = \text{const}$  в уравнения (10.148), то можно найти дифференциальные уравнения для скоростей  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ . Более удобно, однако, рассматривать угловые моменты. Поэтому введем угловые моменты  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  с помощью уравнений

$$x_1(t) = Iy_1(t); \quad x_2(t) = Iy_2(t). \quad (10.162)$$

Из уравнений (10.162), (10.161) и (10.148) получим, что угловые моменты удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \omega x_2(t) + u_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega x_1(t) + u_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (10.163)$$

где  $\omega$  — постоянная, равная

$$\omega = \frac{I - I_3}{I} \hat{y}_3 \text{ рад/сек.} \quad (10.164)$$

Двумерный вектор углового момента  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$  есть проекция трехмерного вектора углового момента

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ I_3 \hat{y}_3 \end{bmatrix}$$

на плоскость 1—2. Двумерный вектор момента  $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$  есть проекция трехмерного вектора момента

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

на плоскость 1—2. Как было отмечено ранее, мы хотим найти такой управляющий вектор  $\mathbf{u}(t)$ , который переводит  $\mathbf{x}(t)$  в  $\mathbf{0}$  за минимальное время.

Из определений трех схем управления видно, что для отыскания оптимального по быстродействию управления к началу координат нужно решить следующие системы уравнений с ограничениями (все индексы, во избежание путаницы, опущены):

**Схема А. Один фиксированный двигатель**

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \omega x_2(t). \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega x_1(t) + u_2(t), \quad |u_2(t)| \leq F^A \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (10.165)$$

**Схема В. Два фиксированных двигателя**

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \omega x_2(t) + u_1(t), \quad |u_1(t)| \leq F^B \alpha; \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega x_1(t) + u_2(t), \quad |u_2(t)| \leq F^B \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (10.166)$$

**Схема С. Один верньерный двигатель**

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \omega x_2(t) + u_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega x_1(t) + u_2(t), \quad \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} \leq F^C \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (10.167)$$

Мы нашли законы оптимального управления:

для системы (10.165) — в § 7.7;

для системы (10.166) — в § 7.9;

для системы (10.167) (которая является самосопряженной системой с инвариантной нормой) — в § 10.6.

Наша цель — сравнить эти три оптимальных по быстродействию решения.

Из сравнения систем (10.165), (10.166) и (10.167) видно, что все три управляемые системы одинаковы, а различны лишь ограничения, накладываемые на управляющий вектор  $\mathbf{u}(t)$ . Для того чтобы сравнение было четким, найдем некоторые соотношения, устанавливающие связь между  $F^A$ ,  $F^B$  и  $F^C$ . Эти величины — наибольшие значения тяги, развиваемой реактивными двигателями. Установим эти соотношения в зависимости от величины расхода топлива.

В гл. 8 мы полагали, что расход топлива  $\varphi$  пропорционален величине тяги данного двигателя. Если считать, что  $\beta$  — некоторый положительный коэффициент пропорциональности, то для каждой из трех схем получим соотношения [см. уравнения (10.153), (10.156) и (10.159)]

$$\varphi^A = \beta \|\mathbf{f}^A(t)\| = \beta |f_1^A(t)| \leq \beta F^A; \quad (10.168)$$

$$\varphi^B = \beta [\|\mathbf{f}^{B_1}(t)\| + \|\mathbf{f}^{B_2}(t)\|] = \beta [|f_1^{B_1}(t)| + |f_2^{B_2}(t)|] \leq 2\beta F^B; \quad (10.169)$$

$$\varphi^C = \beta \|\mathbf{f}^C(t)\| = \beta \sqrt{[f_1^C(t)]^2 + [f_2^C(t)]^2} \leq \beta F^C. \quad (10.170)$$

Поскольку в случае оптимального по быстродействию управления двигатели должны развивать максимальную тягу в течение всего времени  $t$ , величина расхода топлива достигает своей верхней границы, и поэтому

$$\varphi^A = \beta F^A; \quad \varphi^B = 2\beta F^B; \quad \varphi^C = \beta F^C. \quad (10.171)$$

Самый лучший способ сравнить эти три схемы состоит в том, чтобы потребовать одинакового расхода топлива в каждом из трех случаев:

$$\varphi^A = \varphi^B = \varphi^C, \quad (10.172)$$

что, в свою очередь, дает искомое соотношение

$$F = F^A = 2F^B = F^C. \quad (10.173)$$

Пользуясь уравнением (10.173), можно определить область ограничений управляющего вектора  $\mathbf{u}(t)$  для каждой из схем управления следующим образом:

Схема А

$$\mathbf{u}(t) \in \Omega_A, \quad \Omega_A = \{\mathbf{u}(t) : u_1(t) = 0, \quad |u_2(t)| \leq \alpha F\};$$

Схема В

$$\mathbf{u}(t) \in \Omega_B, \quad \Omega_B = \left\{ \mathbf{u}(t) : |u_1(t)| \leq \frac{\alpha F}{2}; \quad |u_2(t)| \leq \frac{\alpha F}{2} \right\}; \quad (10.174)$$

Схема С

$$\mathbf{u}(t) \in \Omega_C, \quad \Omega_C = \left\{ \mathbf{u}(t) : \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} \leq \alpha F \right\}.$$

Области  $\Omega_A$ ,  $\Omega_B$  и  $\Omega_C$  показаны на рис. 10.5. Так как области  $\Omega_A$  и  $\Omega_B$  являются подмножествами из области  $\Omega_C$ , следует ожидать, что оптимальное управление по схеме С будет «лучше», чем оптимальные управления по схемам А и В. Под словом «лучше» понимается, что при заданном исходном состоянии  $\mathbf{x}(0)$  минимальное время, которое потребуется на перевод  $\mathbf{x}(0)$  в  $\mathbf{0}$ , по схеме с верньерным двигателем окажется меньше, чем по схемам с одним и с двумя фиксированными двигателями. Поскольку область  $\Omega_A$  не содержится целиком в области  $\Omega_B$ , то нельзя утверждать, что схема с двумя двигателями всегда «лучше» схемы с одним двигателем. Можно, однако, ожидать, что схема В будет лучше схемы А для большинства исходных состояний, поскольку область  $\Omega_B$  «содержит» большую часть области  $\Omega_A$ .

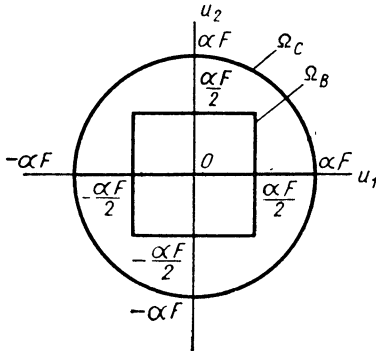


Рис. 10.5. Три области ограничений  $\Omega_A$ ,  $\Omega_B$  и  $\Omega_C$

Проверим эти рассуждения, нарисовав минимальные изохроны для каждой из схем. Для различных графиков примем

$$\alpha F = 2. \quad (10.175)$$

Сначала сформулируем законы оптимального управления для каждой из схем (полагая  $\alpha F = 2$ ).

**Схема А**<sup>1)</sup>

Оптимальный по быстродействию управляющий вектор  $\mathbf{u}(t)$  [см. уравнение (10.165)] равен

$$u_1(t) = 0; \quad u_2(t) = \begin{cases} -2, & \text{если } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_- \\ +2, & \text{если } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_+, \end{cases} \quad (10.176)$$

где  $R_-$  — множество точек выше, а  $R_+$  — ниже линии переключения  $\gamma$ , как показано на рис. 10.6, а.

**Схема В**<sup>2)</sup>

Оптимальный по быстродействию управляющий вектор (момент) [см. уравнение (10.166)] равен

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= \begin{cases} -1, & \text{если } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{-+} \cup R_{--}; \\ +1, & \text{если } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{+-} \cup R_{++}; \end{cases} \\ u_2(t) &= \begin{cases} -1, & \text{если } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{+-} \cup R_{--}; \\ +1, & \text{если } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{-+} \cup R_{++}. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (10.177)$$

1) См. рис. 7.41.

2) См. рис. 7.60.

Области  $R_{-+}$ ,  $R_{+-}$ ,  $R_{++}$  и  $R_{--}$  показаны на рис. 10.6, б.

Схема С<sup>1)</sup>

Оптимальный по быстродействию вектор  $\mathbf{u}(t)$  [см. уравнение 10.167)] равен

$$\mathbf{u}(t) = -2 \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} = -2 \frac{\omega \mathbf{x}(t)}{\|\omega \mathbf{x}(t)\|} \quad (10.178)$$

или, эквивалентно,

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= -\frac{2x_1(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}}; \\ u_2(t) &= -\frac{2x_2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}}. \end{aligned} \right\} \quad (10.179)$$

Обозначим через  $\theta(t)$  угол между осью двигателя  $J^C$  (см. рис. 10.4, с) и осью 2. В этом случае из уравнений (10.157), (10.158) и (10.179) получим

$$\theta(t) = \arctg \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \arctg \frac{y_2(t)}{y_1(t)}. \quad (10.180)$$

Минимальное время  $t_C^*$ , требующееся для перевода  $(\omega x_1, \omega x_2)$  в  $(0, 0)$  управлением (10.178), равно

$$t_C^* = \frac{1}{\omega f} \sqrt{(\omega x_1)^2 + (\omega x_2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega x_1)^2 + (\omega x_2)^2}. \quad (10.181)$$

Из уравнения (10.181) следует, что минимальные изохроны представляют собой окружности радиуса  $2t_C^*$  на плоскости  $\omega x_1 - \omega x_2$ .

Вычертим теперь для каждой из схем минимальные изохроны и, сравнивая их, определим, какая из схем «лучше».

Обозначим через  $\hat{S}_A(t^*)$ ,  $\hat{S}_B(t^*)$  и  $\hat{S}_C(t^*)$  множества состояний, которые могут быть переведены в начало координат за время, меньшее или равное  $t^*$ , с помощью схем  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Пусть  $S_A(t^*)$ ,  $S_B(t^*)$  и  $S_C(t^*)$  — границы множеств  $\hat{S}_A(t^*)$ ,  $\hat{S}_B(t^*)$  и  $\hat{S}_C(t^*)$  соответственно. Кривые  $S_A(t^*)$ ,  $S_B(t^*)$  и  $S_C(t^*)$  являются минимальными изохронами. На рис. 10.7 показаны минимальные изохроны  $S_A\left(\frac{\pi}{4\omega}\right)$ ,  $S_B\left(\frac{\pi}{4\omega}\right)$  и  $S_C\left(\frac{\pi}{4\omega}\right)$ , на рис. 10.8 — изохроны  $S_A\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$ ,  $S_B\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$  и  $S_C\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$ . Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}_A\left(\frac{\pi}{4\omega}\right) &\subset \hat{S}_C\left(\frac{\pi}{4\omega}\right); \\ \hat{S}_B\left(\frac{\pi}{4\omega}\right) &\subset \hat{S}_C\left(\frac{\pi}{4\omega}\right) \end{aligned} \right\} \quad (10.182)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}_A\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) &\subset \hat{S}_C\left(\frac{\pi}{2\omega}\right); \\ \hat{S}_B\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) &\subset \hat{S}_C\left(\frac{\pi}{2\omega}\right). \end{aligned} \right\} \quad (10.183)$$

Если вычертить все минимальные изохроны, то можно установить, что

$$\hat{S}_A(t^*) \subset \hat{S}_C(t^*) \text{ и } \hat{S}_B(t^*) \subset \hat{S}_C(t^*) \quad (10.184)$$

1) См. уравнение (10.84).

для любого  $t^* > 0$ . Последнее неравенство означает, что для любого исходного состояния  $(\omega x_1, \omega x_2)$  минимальные времена  $t_A^*$ ,  $t_B^*$  и  $t_C^*$ , которые требуются схемам  $A$ ,  $B$  и  $C$  для перевода  $(\omega x_1, \omega x_2)$  в  $(0, 0)$ , удовлетворяют неравенствам

$$t_C^* < t_A^*; \quad t_C^* < t_B^*. \quad (10.185)$$

В этом смысле схема  $C$  «лучше» обеих схем  $A$  и  $B$ .

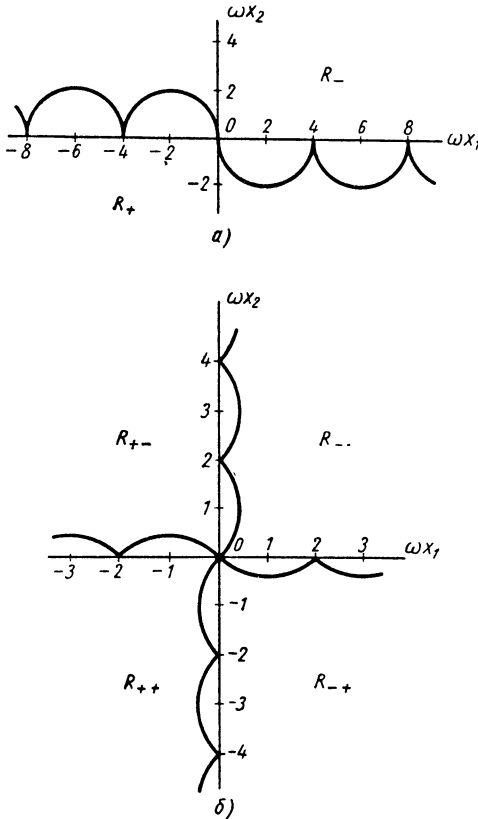


Рис. 10.6. а) Области  $R_-$  и  $R_+$ . б) Области  $R_{++}$ ,  $R_{+-}$ ,  $R_{-+}$  и  $R_{--}$

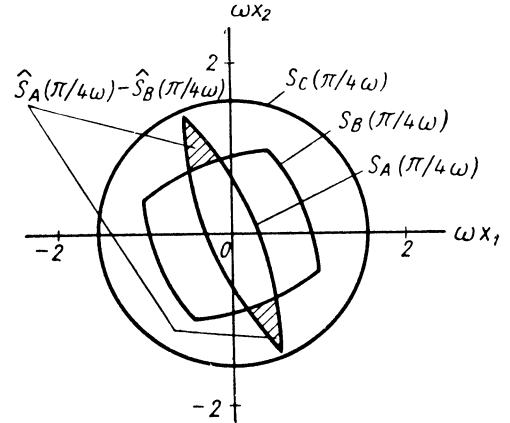


Рис. 10.7. Минимальные изохроны  $S_A(t^*)$ ,  $S_B(t^*)$  и  $S_C(t^*)$  для  $t^* = \frac{\pi}{4\omega}$

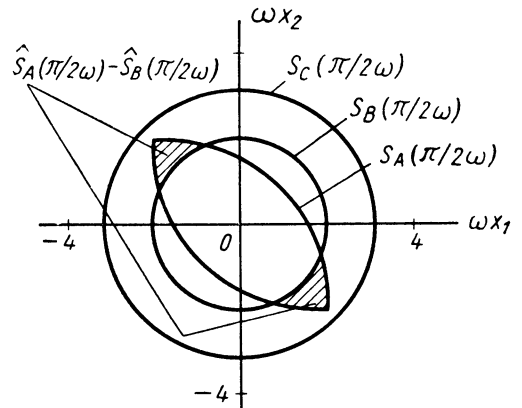


Рис. 10.8. Минимальные изохроны  $S_A(t^*)$ ,  $S_B(t^*)$  и  $S_C(t^*)$  при  $t^* = \frac{\pi}{2\omega}$

Сравнение схем  $A$  и  $B$  не столь очевидно. Из рис. 10.7 и 10.8 видно, что исходные состояния, принадлежащие заштрихованным областям

[более строго, множества  $\hat{S}_A(\frac{\pi}{4\omega}) - \hat{S}_B(\frac{\pi}{4\omega})$  и  $\hat{S}_A(\frac{\pi}{2\omega}) - \hat{S}_B(\frac{\pi}{2\omega})$ ], можно перевести в начало координат при помощи схемы  $A$  быстрее, чем схемы  $B$ . В общем случае, если  $(\omega x_1, \omega x_2) \in \hat{S}_A(t^*) - \hat{S}_B(t^*)$ , то схема  $A$  «лучше» схемы  $B$ ; если  $(\omega x_1, \omega x_2) \in \hat{S}_B(t^*) - \hat{S}_A(t^*)$ , то схема  $B$  «лучше» схемы  $A$ . Однако площадь (или мера)  $\hat{S}_A(t^*)$  в общем случае меньше площади (или меры)  $\hat{S}_B(t^*)$ . Поэтому «в среднем» схема  $B$  «лучше» схемы  $A$ .

На рис. 10.9 показаны три оптимальные по быстродействию траектории, начинающиеся из одного и того же исходного состояния и оканчивающиеся в начале координат, полученные при помощи схем *A*, *B* и *C*. Минимальные времена для них равны

$$\left. \begin{aligned} t_A^* &= \frac{4,19}{\omega} \text{ сек}; \\ t_B^* &= \frac{4,10}{\omega} \text{ сек}; \\ t_C^* &= \frac{2,65}{\omega} \text{ сек}. \end{aligned} \right\} \quad (10.186)$$

Очевидно, для данного исходного состояния схема *C* намного превосходит схемы *A* и *B*.

Мы доказали, что схема с верньерным двигателем лучше схем с фиксированными двигателями в отношении времени переходного процесса. Существуют, однако, и другие соображения, которые следует принять во внимание, столкнувшись с задачей проектирования системы управления скоростью вращения данного космического тела. Например, надо знать технические проблемы, связанные с реализацией каждой из схем, количество топлива, потребляемое каждой схемой, и т. д. В оставшейся части параграфа рассмотрим относительные достоинства и недостатки каждой из схем управления. Такое знание позволит проектировщику принять решение на основе полной информации относительно свойств каждой из схем управления.

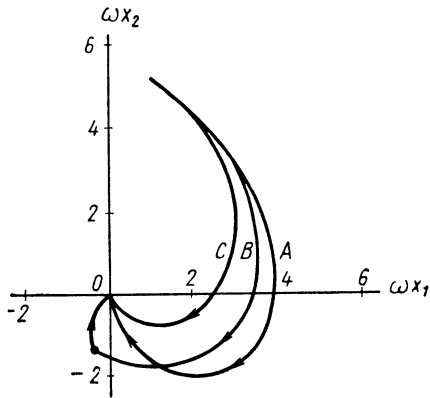


Рис. 10.9. Три оптимальные по быстродействию траектории (*A*, *B* и *C*) к началу координат, соответствующие схемам *A*, *B* и *C*

**1. Практическая реализация.** Так как целью является уменьшение до нуля скоростей  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , то мы должны быть в состоянии измерять эти скорости. Измерения скоростей необходимы для всех трех схем.

Схемы *A* и *B* требуют вычисления величин  $\omega x_1(t) = I\omega y_1(t)$  и  $\omega x_2(t) = I\omega y_2(t)$ , потому что линии переключения определяются как кривые на плоскости  $\omega x_1 - \omega x_2$  (см. рис. 10.6, *a* и *б*). Таким образом, мы должны вычислить постоянную  $\omega = \frac{I - I_3}{I} \hat{y}_3$ . Это означает, что мы должны также измерять и угловую скорость  $\hat{y}_3$ .

При использовании таких измерений блок-схема оптимальной системы управления аналогична показанной на рис. 7.42. Сигнал  $\alpha(t)$  на рис. 7.42 представляет собой управление, включающее двигатель  $J^A$  (см. рис. 10.4, *a*).

Блок-схема оптимальной системы управления по схеме *B* аналогична показанной на рис. 7.61. Сигнал  $m(t)$  есть управление, включающее двигатель  $J^{B_1}$ , а сигнал  $n(t)$  — управление, включающее двигатель  $J^{B_2}$  (см. рис. 7.61 и 10.4, *в*).

Схема управления с верньерным двигателем (схема *C*) существенно отличается от первых двух. Прежде всего двигатель  $J^C$  (см. рис. 10.4, *с*) должен в течение всего времени управления развивать максимальную тягу. Таким образом, от системы управления требуется правильно направ-

вить двигатель  $J^C$ . Это означает [см. уравнение (10.180)], что двигатель  $J^C$  должен поворачиваться так, чтобы угол  $\theta(t)$  был равен

$$\theta(t) = \operatorname{arctg} \frac{y_2(t)}{y_1(t)}.$$

В этом случае сразу видно, что не требуется вычислять сигналы  $\omega x_1(t)$  и  $\omega x_2(t)$ , а также измерять скорость  $\hat{y}_3$ . Таким образом, оптимальная система управления по схеме  $C$  должна:

1) измерять скорости  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ ;

2) вычислять угол  $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y_2(t)}{y_1(t)}$ ;

3) использовать следящую систему для поворота  $J^C$ .

Теперь можно сравнить три схемы с точки зрения требующейся системы управления. Схемы  $A$  и  $B$  требуют измерения  $\hat{y}_3$  и использования генераторов нелинейных функций для получения линий переключения. Схема  $C$  требует очень простого вычислительного устройства для нахождения  $\theta(t)$  и высококачественной следящей системы для управления направлением двигателя  $J^C$ . Трудно сказать, какая из схем более надежна и технологична. Эти расчеты зависят от конкретной системы.

**2. Потребление топлива.** Мы сравниваем три схемы управления. В основу сравнения положим равенство расхода топлива  $\phi$  всеми тремя схемами. Так как потребляемое топливо пропорционально  $\int_0^T \phi dt$  и поскольку схема  $C$  требует меньшего времени для перевода в нуль любого исходного состояния, то можно сделать вывод, что схема с верньерным двигателем потребляет меньше топлива, чем схемы с фиксированными двигателями. Кроме того, из закона управления 10.2б известно, что оптимальное по быстродействию управление по схеме  $C$  является также оптимальным и по расходу топлива. Следовательно, по потреблению топлива схема  $C$  «лучше» схем  $A$  и  $B$ .

**3. Случай, когда скорость  $y_3(t)$  переменна.** При формулировке физической задачи мы полагали угловую скорость  $y_3(t)$  в начальный момент времени  $t = 0$  равной заданной величине  $\hat{y}_3$ . Это означает, что вначале мы установили желаемую величину скорости  $y_3(t)$ , и лишь после этого сделали равными нулю две остальные угловые скорости. Математическим следствием такого предположения явилась линейность и инвариантность во времени дифференциальных уравнений (10.163) относительно угловых моментов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

Предположим, что мы изменили задачу следующим образом. В начальный момент  $t = 0$  измеряем три угловые скорости  $y_1(0)$ ,  $y_2(0)$  и  $y_3(0)$ , причем начальное значение  $y_3(0)$  не равно желаемому:

$$y_3(0) \neq \hat{y}_3 \quad (10.187)$$

и

$$y_1(0) \neq 0; \quad y_2(0) \neq 0. \quad (10.188)$$

Угловой скоростью  $y_3(t)$  можно управлять независимо с помощью двигателя  $J_3$ . Так как  $y_3(t)$  определяется уравнением (10.149), можно найти  $\omega(t)$ , приняв

$$\omega(t) = \frac{I - I_3}{I} y_3(t). \quad (10.189)$$

Тогда дифференциальные уравнения относительно угловых моментов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \omega(t)x_2(t) + u_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega(t)x_1(t) + u_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.190)$$

Так как эти уравнения зависят от времени, результаты § 7.7 и 7.9 для определения линий переключения использовать нельзя. Для отыскания оптимальных по быстродействию моментов по схемам  $A$  или  $B$  мы должны найти некоторый класс меняющихся со временем линий переключения, которые будут зависеть от  $\omega(t)$ . При использовании схемы  $C$  оптимальное управление не зависит от  $\omega(t)$ , и поэтому уравнение (10.180) (определяющее угол  $\theta(t)$  в зависимости от угловых скоростей) остается в силе и тогда, когда  $\omega(t)$  является функцией времени. Причина этого в том, что система с переменными параметрами (10.190) является системой с инвариантной нормой, а следовательно, к ней применимы законы управления 10.2а и 10.2б.

Система с верньерным двигателем может использоваться для перевода в ноль  $y_1(0)$  и  $y_2(0)$  за минимальное время и при минимальном расходе топлива одновременно с управлением скоростью  $y_3(t)$ . Чтобы решить ту же задачу по схемам  $A$  или  $B$ , мы должны построить генераторы нелинейных функций, зависящих от времени, и требовать, как и раньше, больше времени и топлива. Выполнение зависящих от времени генераторов нелинейных функций — куда более сложная проблема, чем разработка исполнительного устройства, устанавливающего двигатель  $J^C$  по требуемому направлению  $\theta(t) = \arctg \frac{y_2(t)}{y_1(t)}$ .

Итак, мы нашли, что из трех схем оптимального управления схема  $C$  требует наименьшего времени и наименьшего количества топлива для перевода в нуль любых начальных скоростей  $y_1(0)$  и  $y_2(0)$ . Более того, оптимальная по быстродействию система управления по схеме  $C$  не зависит от скорости вращения  $y_3(t)$  (которая не обязательно должна быть постоянной), тогда как схемы  $A$  и  $B$  зависят от  $y_3(t)$ .

Мы против того, чтобы рекомендовать ту или иную схему проектировщику. Наша цель — скорее показать, как можно использовать теорию оптимального управления на стадии предварительного проектирования для осмысленного выбора конкретной схемы управления. Решение хорошо сформулированной оптимальной задачи — удел математики, но при выборе области ограничений очень многое зависит от инженера. Поэтому инженер всегда должен пытаться установить свойства системы оптимального управления для различных возможных областей ограничений управления.

**Упражнение 10.9.** Рассмотрите систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + u_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.191)$$

Считайте, что управляющий вектор  $\mathbf{u}(t)$  принадлежит к трем различным областям ограничений  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , определенным как

$$\Omega_1 = \left\{ \mathbf{u}(t) : \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} \leq 1; \right. \quad (10.192)$$

$$\Omega_2 = \{ \mathbf{u}(t) : |u_1(t)| \leq 1; |u_2(t)| \leq 1 \}; \quad (10.193)$$

$$\Omega_3 = \left\{ \mathbf{u}(t) : \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} \leq \sqrt{2} \right\}. \quad (10.194)$$



Предположите, что при  $t = 0$  исходным состоянием системы является  $(\xi_1, 0)$ . Пусть  $t_1^*$ ,  $t_2^*$  и  $t_3^*$  — минимальные времена, требующиеся для перевода  $(\xi_1, 0)$  в  $(0, 0)$  при  $\mathbf{u}(t) \in \Omega_1$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \Omega_2$  и  $\mathbf{u}(t) \in \Omega_3$  соответственно. Начертите графики  $\frac{t_1^*}{t_2^*}$  и  $\frac{t_2^*}{t_3^*}$  в зависимости от  $|\xi_1|$ .

Примите, что израсходованное топливо измеряется следующим образом:

$$F_1 = \int_0^{t_1^*} dt; \quad F_2 = \int_0^{t_2^*} 2 dt; \quad F_3 = \int_0^{t_3^*} V\sqrt{2} dt. \quad (10.195)$$

Начертите графики  $\frac{F_1}{F_2}$  и  $\frac{F_2}{F_3}$  в зависимости от  $|\xi_1|$ .

## 10.8. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

В этой главе мы показали, что неравенство Шварца можно использовать для решения оптимальных задач определенного класса. Использование функционального анализа (а не теории принципа минимума) при исследовании задач оптимального управления нашло свое отражение в литературе [125], [126], [135], [136], [137] и [194].

Использование верньерных ракетных двигателей для движения ракет и других космических аппаратов приводит к ограничениям вида  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$ , налагаемым на управляющую переменную  $\mathbf{u}(t)$ . В работе [151] рассматриваются такие задачи и содержатся дополнительные ссылки. В работе [160] также рассматриваются ограничения типа  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq m$  и схемы наведения на среднем участке траектории, оптимальные по расходу топлива, а также итерационная процедура вычисления оптимальной траектории.

Способы «локальной оптимизации» (т. е. способы выбора управления таким образом, чтобы скорость изменения  $\|\mathbf{x}(t)\|$  была возможно «более отрицательна») очень привлекательны с практической точки зрения. На примере 10.2 мы продемонстрировали недостаток такого способа, состоящий в том, что состояние переводится не в нуль. Тем не менее эта идея «локальной оптимизации», вероятно, может быть использована при разработке субоптимальных систем управления. Дополнительные результаты заинтересованный читатель может найти в работе [108].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Athanassiades M. and Smith O. J. M. Theory and Design of High Order Bang Bang Control Systems. «IRE Trans. Autom. Control», Vol. AC-6, 1961, pp. 125—134.
2. Athanassiades M. Bang-Bang Control for Tracking Systems. «IRE Trans. Autom. Control», Vol. AC-7, 1962, pp. 77—78.
3. Athanassiades M. On Optimal Linear Control Systems Which Minimize the Time Integral of the Absolute Value of the Control Function (Minimum-fuel Control Systems), «MIT Lincoln Lab. Rept.» 22G-4, Lexington, Mass., May, 1962.
4. Athanassiades M. and Falb P. L. Time Optimal Control for Plants with Numerator Dynamics. «IRE Trans. Autom. Control», Vol. AC-7, 1962, pp. 46—47.
5. Athanassiades M. and Falb P. L. Time Optimal Velocity Control of a Spinning Space Body, «MIT Lincoln Lab. Rept.», 22G-8, Lexington, Mass, 1962, July.
6. Athanassiades M. Optimal Control for Linear Time Invariant Plants with Time-, Fuel-, and Energy Constraints. «IEEE Trans. Appl. Ind. », Vol. 81, 1963, p. 321-325.
7. Athans M. Minimum Fuel Feedback Control Systems: Second Order Case. «IEEE Trans. Appl. Ind.», Vol. 82, 1963, pp. 8—17.
8. Athans M. Time- and Fuel-optimal Attitude Control «MIT Lincoln Lab. Rept.» 22G-9, Lexington, Mass, 1963, May.
9. Athans M., Falb P. L. and R. T. Lacos. Time Optimal Velocity Control of a Spinning Space Body. «IEEE Trans. Appl. Ind.» Vol. 83, 1963, pp. 206—214.
10. Athans M., Falb P. L. and Lacos R. T. Time-, Fuel-, and Energy-optimal Control of Nonlinear Norm-invariant Systems. «IEEE Trans. Autom. Control», Vol. AC-8, 1963, pp. 196—202.
11. Athans M. and Falb P. L. Time-optimal Control for a Class of Nonlinear Systems. «IEEE Trans. Autom. Control», Vol. AC-8, 1963, p. 379.
12. Athans M., Falb P. L. and Lacos R. T. On Optimal Control of Self Adjoint Systems. «IEEE Trans. Appl. Ind.» Vol. 83, 1964, pp. 161—166.
13. Athans M. Minimum Fuel Control of Second Order Systems with Real Poles. «IEEE Trans. Appl. Ind.» Vol. 83, 1964, pp. 148—153.
14. Athans M. and Cannon M. D. Fuel-optimal Singular Control of a Nonlinear Second Order System, preprints 1964, Joint Autom. Control Conf., pp. 245—255, June, 1964.
15. Athans M. Fuel-optimal Control of a Double Integral Plant with Response Time Constraints. «IEEE Trans. Appl. Ind.», Vol. 83, 1964, pp. 240—246.
16. Balakrishnan A. V. and Neustadt L. W. (eds.). Computing Methods in Optimization Problems, «Academic Press Inc.», New York, 1964.
17. Bass R. W. Optimal Feedback Control System Design by the Adjoint System. Aeronca Tech. Report 60—22A, Baltimore, Md., 1960, June.
18. Beckenbach E. F. and Bellman R. «Inequalities.» Springer-Verlag OHG Berlin, 1961.
19. Bellman R., Glicksberg I. and Gross O. On the Bang-Bang Control Problem. Quart. Appl. Math., Vol. 14, 1956, pp. 11—18.
20. Bellman R. «Dynamic Programming». Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957. (Имеется русский перевод. Белман Р. Динамическое программирование М., ИЛ, 1960, 400 стр.).
21. Bellman R. «Introduction to Matrix Analysis». McGraw-Hill Book Company. New York, 1960.
22. Bellman R. (ed.) «Mathematical Optimization Techniques». University of California Press, Berkeley, Calif., 1963.
23. Berkovitz L. D. Variational Methods in Problems of Control and Programming. «J. Math. Anal. Appl.», Vol. 3, 1961, pp. 145—169.

24. Birkhoff G. and Mac Lane S. «A Survey of Modern Algebra», rev. ed., The Macmillan Company, New York, 1958.
25. Birkhoff G. and Rota G. C. «Ordinary Differential Equations». Ginn and Company, Boston, 1962.
26. Bliss G. «Calculus of Variations». Mathematical Association of America. The Open Court Publishing Company Lasalle Ill. 1925. (Имеется русский перевод. Б л и с с Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., ИЛ, 1950).
27. Vogner L. An Investigation of the Switching Criteria for Higher Order Contactor Servomechanisms. «Cook Res. Lab. Rept.» PR-16-9, 1953.
28. Vogner I. and Kazda L. F. An Investigation of the Switching Criteria for Higher Order Contactor Servomechanisms. «Cook Res. Lab. Rept.» PR-16-9, 1953.
29. Boyadjieff G. et all. Some Applications of the Maximum Principle to Second Order Systems, Subject to Input Saturation, Minimizing Error, and Effort, «J. Basis Eng.», Vol. 86, 1964, pp. 11—22. (Имеется русский перевод. Б о я д ж и е в, И г л с т о н, Т а к, С у т а б у т р а, проф. Т а к а с а х и. О применении принципа максимума к системам второго порядка с насыщением входного сигнала с целью минимизации ошибки или управления. Теоретические основы инженерных расчетов, Русский перевод, № 1, 1964, стр. 16—31).
30. Breakwell J. V. The Optimization of Trajectories, J. SIAM, Vol. 7, 1959, pp. 210—247.
31. Breakwell J. V., Spever J. L. and Bryson A. E. Optimization and Control of Nonlinear Systems Using the Second Variation. «J. SIAM Control», ser. A, Vol. 1, 1963, pp. 193—223.
32. Breakwell J. V. and Ho Y. C. On the Conjugate Point Condition for the Control Problem. «Harvard Univ. Cruft Lab. Tech. Rept.» 441, Cambridge, Mass, March, 1964.
33. Bridgland T. F. On the Existence of Optimal Feedback Controls. J. SIAM Control, ser. A, Vol. 1, 1963, pp. 261—274.
34. Brockett R. W. The Invertibility of Dynamical Systems with Application to Control. Ph. D. dissertation, Case Institute of Technology, Cleveland May, 1963.
35. Brockett R. W. and Mesarovic M. The Reproducibility of Multivariable Systems, preprints 1964, Joint Autom. Control Conf. June, 1964, pp. 481—486.
36. Brockett R. W., Poles, Zeroes and Feedback: State Space Interpretation, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-10, 1965, pp. 129—135.
37. Bryson A. E. and Denham W. F. A Steepest-ascent Method for Solving Optimum Programming Problems. «J. Appl. Mech.» ser. E, Vol. 29, 1962, pp. 247—257. (Б р а й с о н, Д е н х э м. Решение задачи оптимального программирования методом быстрого подъема. «Прикладная механика», русский перевод, № 4, 1962, стр. 32).
38. Bushaw D. W. Differential Equations with a Discontinuous Forcing Term. Stevens Inst. Technol. Experimental Towing Tank Rept. 469, Hoboken, N. J., 1953, January.
39. Bushaw D. W. Optimal Discontinuous Forcing Terms, in S. Lefschetz (ed.), Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. 4, pp. 29—52, Princeton University, Press, Princeton, N. J., 1958.
40. Caratheodory C. Variationsrechnung und Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, mb, Leipzig, 1935.
41. Chandakiet P., Leonides C. T. and Deland E. C. Optimum Nonlinear Bang-Bang Control Systems with Complex Roots. «Trans. AIEE», pt. II, Vol. 80, 1961, pp. 82—102.
42. Chang S. S. L. Synthesis of Optimum Control Systems. McGraw-Hill Book Company, New York, 1961. (Имеется русский перевод. Ч а н г Ш. С. Л. Синтез оптимальных систем автоматического управления. «Машиностроение», М., 1964).
43. Chang S. S. L. An Extension of Ascoli's Theorem and Its Applications to the Theory of Optimal Control, New York Univ. Dept. Elec. Eng. Tech. Rept. 400—51, 1962, New York.
44. Chang S. S. L. Sufficient Condition for Optimal Control of Linear Systems with Nonlinear Cost Functions, preprints, 1964. Joint Autom. Control Conf., 1964, June, pp. 295-296.
45. Chzhan Sy - In. On Sufficient Conditions for an Optimum. Appl. Math. Mech., Vol. 25, 1961, pp. 1420—1423. (Ч ж а н С ы - и н. К теории оптимального регулирования. «Прикладная математика и механика», т. 25, 1961, вып. 3, стр. 413—419).
46. Coddington E. A. and Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.
47. Denham W. F. Steepest-ascent Solution of Optimal Programming Problems, Harvard Summer Program. 1963, «Optimization of Dynamic Systems», Raytheon Co. Space and Inform. Systems Div. Rept., Bedford, Mass., 1963.
48. Desoer C. A. The Bang-Bang Servo Problem Treated by Variational Techniques, Inform. and Control, Vol. 2, 1959, pp. 333—348.
49. Desoer C. A. Pontryagin's Maximum Principle and the Principle of Optimality. «J. Franklin Inst.», Vol. 271, 1961, pp. 361—367. (Имеется русский перевод. Д е - з о э р К. А. Принцип максимума Понтрягина и принцип оптимальности. «Механика», № 5, 1962, стр. 15—21).

50. Дем'янов В. Ф. and Хоменюк В. В. The Solution of a Linear Problem in Optimal Control. «Automation and Remote Control», Vol. 24, 1964, pp. 1068—1070. (Демьянов В. Ф., Хоменюк В. В. Решение одной линейной задачи оптимальных управлений. «Автоматика и телемеханика», т. 24, 1963, стр. 1174—1177).
51. Dieudonné J. «Foundations of Modern Analysis» Academic Press, Inc., New York, 1960.
52. Doll H. G. and Stout T. M. Design and Analogue Computer Analysis of an Optimum Third-order Non-linear Servomechanism. «Trans. ASME», Vol. 79, 1957, pp. 513-525.
53. Dreyfus S. E. Dynamic Programming and the Calculus of Variations. «J. Math. Anal. Appl.», Vol. 1, 1960, pp. 228—239.
54. Dreyfus S. E. Variational Problems with Inequality Constraints. «J. Math. Anal. Appl.», Vol. 4, 1962, pp. 297—308.
55. Dreyfus S. E. and Elliot J. R. An Optimal Linear Feedback Guidance Scheme. «J. Math. Anal. Appl.», Vol. 8, 1964, pp. 364—386.
56. Dubovitskii A. Y. and Milutin A. A. Certain Optimality Problems for Linear Systems. «Automation and Remote Control», Vol. 24, 1964, pp. 1471—1481. (Дубовицкий А. Я., Милутин А. А. Некоторые оптимальные задачи для линейных систем. «Автоматика и телемеханика», т. 24, 1963, № 12, стр. 1616—1625).
57. Eaton J. H. An Iterative Solution to Time Optimal Control, «J. Math. Anal. Appl.», Vol. 5, 1962, pp. 329—344.
58. Edelbaum T. Theory of Maxima and Minima, in G. Leitman (ed.). Optimization Techniques. Academic Press, Inc., New York, 1962. (Эдельбаум Т. Теория максимумов и минимумов. «Методы оптимизации с приложением к механике космического полета» под ред. Дж. Лейтмана. Пер. с англ. под ред. В. А. Троицкого, Изд. «Наука», М., 1965, гл. 1, стр. 19—53).
59. Eggleston H. G. «Convexity». Cambridge University Press, London, 1958.
60. Fadden E. J. and Gilbert E. G. Computational Aspects of the Time-optimal Control Problem, In Balakrishnan A. V. and Neustadt L. W. (eds.), «Computing Methods in Optimization Problems». Academic Press Inc., New York, 1964.
61. Falb P. L. and Athans M. A Direct Proof of the Criterion for Complete Controllability of Time-invariant Linear Systems. «IEEE Trans. Autom. Control», Vol. AC-9, 1964, pp. 189—190.
62. Filippov A. F. On Certain Questions in the Theory of Optimal Control. «J. SIAM Control, ser. A, Vol. 1, 1962, pp. 76—84.
63. Flügge-Lotz and Frederickson A. A. Contactor Control of Higher-order Systems Whose Transfer Functions Contain Zeros, Stanford Univ. Div. Eng. Mech. Tech. Rept., 119, Stanford, Calif., 1959.
64. Flügge-Lotz I. and Ishikawa T. Investigation of Third-order Contactor Control Systems with Two Complex Poles without Zeros, NASA Tech. Note, D248, 1960.
65. Flügge-Lotz L. Synthesis of Third-Order Contactor Systems. Proc. First IFAC Congr., 1961, pp. 390—397. (Флюгге-Лотц И. Синтез релейных систем регулирования третьего порядка. Труды I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Т. II. Изд-во АН СССР. М., 1961, стр. 290—304).
66. Flügge-Lotz I. and Vin Mih. On the Optimum Response of Third-order Contactor Control Systems. Stanford Univ. Eng. Mech. Rept. 125, Stanford, Calif., 1960.
67. Flügge-Lotz I. and Halkin H. Pontryagin's Maximum Principle and Optimal Control. Stanford Univ. Div. Eng. Mech. Tech. Rept., 130, Stanford, Calif., 1961.
68. Flügge-Lotz I. and Ishikawa T. Investigation of Third-order Contactor Control Systems with Zeros in Their Transfer Functions. NASA Tech. Note, D719, 1961.
69. Flügge-Lotz I. and Mih Yin. The Optimum Response of Second-order Velocity-controlled Systems with Contactor Control. «J. Basic Eng.», Vol. 83, 1961, pp. 59—64. (Флюгге-Лотц И., Миньин. Оптимальный переходный процесс систем второго порядка с релейным управлением по скорости. «Техническая механика» Русский перевод, 1961, № 1, стр. 75—81).
70. Flügge-Lotz L. and Titus H. A. The Optimum Response of Full Third-order Systems with Contactor Control. «J. Basic Eng.», 1962, pp. 554.—558. (Флюгге-Лотц, Титус, Оптимальные переходные процессы полных систем третьего порядка с релейным управлением. «Техническая механика». Русский перевод, 1962, № 4, стр. 172—176).
71. Flügge-Lotz I. and Marbach H. The Optimal Control of Some Attitude Control Systems for Different Performance Criteria. «J. Basic Eng.», Vol. 85, 1963, pp. 165—176. (Флюгге-Лотц И. и Марбах. Оптимальное управление в некоторых системах угловой ориентации при различных критериях качества. «Техническая механика». Русский перевод, т. 89, 1963, № 2, стр. 38—54).
72. Flügge-Lotz I. and Maltz M. D. Attitude Stabilization Using a Contactor Control System with a Linear Switching Criterion (to be published in Automatica).
73. Foу W. H. Fuel Minimization in Flight Vehicle Attitude Control. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-8, 1963, pp. 84—88.

74. Friedland B. Minimum Response-time Controller for Amplitude and Energy Constraints. IRE Trans. Autom. Control. Vol. AC-7, 1962, pp. 73—74.
75. Friedland B. The Structure of Optimum Control Systems. J. Basic Eng. Vol. 84, 1962, pp. 1—12. (Фридленд. Структура оптимальных систем регулирования. «Техническая механика». Серия Д. Русский перевод, 1962, № 1, стр. 3—17).
76. Friedland B. The Design of Optimum Controllers for Linear Processes with Energy Limitations. J., Basic Eng., Vol. 85, 1963, pp. 181—196. (Фридленд. Оптимальные регуляторы для линейных процессов при наличии ограничений по расходу энергии. «Техническая механика». Русский перевод, том 85, 1963, № 2, стр. 60—80).
77. Friedland B. Optimum Control of an Aerodynamically Unstable Booster. General Precision Aerospace Res. Rept., 63-RC-8, Little Falls, N. J., November, 1963.
78. Friedman A. Optimal Control for Hereditary Processes. Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 15, 1964, pp. 396—416.
79. Gambill R. A. Generalized Curves and the Existence of Optimal Controls. J. SIAM Control ser. A, Vol. 1, 1963, pp. 246—260.
80. Gelfand I. M. and Fomin S. V. «Calculus of Variations». Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1963. (Гельфанд И. М., Фомин С. В. «Вариационное исчисление». М., Физматгиз, 1961, 228 стр.).
81. Gibson J. E. «Nonlinear Automatic Control». McGraw-Hill Book Company. New York, 1963.
82. Gilbert E. G. Controllability in Multivariable Control Systems. J. SIAM Control, ser. A, Vol. 1, 1963, pp. 128—151.
83. Gilbert E. G. The Application of Hybrid Computers to the Iterative Solution of Optimal Control Problems, in Balakrishnan A. V. and Neustadt J. W. (eds.), «Computing Methods in Optimization Problems», Academic Press Inc., New York, 1964.
84. Gillette J. C. et al.: «Feedback Control Systems». McGraw-Hill Book Company. New York, 1959.
85. Goldstein H. «Classical Mechanics». Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Mass, 1959.
86. Gottleb G. «Energy Optimum systems with Constraints on the Control and the Response Time», M. S. Thesis Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass, May, 1964.
87. Halkin H. Liapunov's Theorem on the Range of a Vector Measure and Pontryagin's Maximum Principle. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 10, 1962, pp. 296—304.
88. Halkin H. The Principle of Optimal Evolution, in J. P. LaSalle and S. Lefschetz (eds.) «Nonlinear Mechanis», Academic Press Inc. New York, 1963.
89. Halkin H. On the Necessary Condition for Optimal Control of Nonlinear Systems. J. Anal. Math., Vol. 12, 1963, pp. 1—82.
90. Halmos P. R. «Finite Dimensional Vector Spaces». 2d ed. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1958.
91. Hancock H. «The Theory of Maxima and Minima». Ginn and Company, Boston, 1907; also Dover Publications Inc., New York, 1960.
92. Harvey C. A. Determining the Switching Criterion for Time Optimal Control. J. Math. Anal. Appl. Vol. 5, 1963, pp. 245—257.
93. Harvey C. A. and Lee E. B. On the Uniqueness of Time-Optimal Control for Linear Processes. J. Math. Anal. Appl., Vol. 5, 1962, pp. 258—268.
94. Hermes H. and Haynes G. On the Nonlinear Control Problem with the Control Appearing Linearly. «J. SIAM Control ser. A», Vol. 1, 1963, pp. 185—205.
95. Ho Y. C. A Successive Approximation Technique for Optimal Control Systems Subject to Input Saturation J. Basic Eng., Vol. 84, 1962, pp. 33—40. (Хо Ю - Ши. Метод последовательных приближений для оптимальных систем регулирования с ограничением по управляющему сигналу. «Техническая механика». Серия Д. Русский перевод. 1962, № 1, стр. 44—53).
96. Hopkin A. M. A Phase Plane Approach to the Design of Saturating Servomechanisms. Trans. AIEE, Vol. 70, 1950, pp. 631—639.
97. Howard D. R. and Rekasius Z. V. Determination of Reachable Zone Boundaries. Aerospace Corp. Rept. ATN-64 (4540-70)-1, Los Angeles, Calif., June 1964.
98. Hutchinson C. E. Minimum Time Control of a Linear Combination of State Variables. Stanford Univ. Electron. Lab. Systems Theory Lab. Tech. Rept., 6311-1, Stanford, Calif., August, 1963.
99. Jen-Wei C. A. Problem in the Synthesis of Optimal Systems Using Maximum Principle. Automation and Remote Control, Vol. 22, 1962, pp. 1170—1176. (Чжан Жэнь-вей. Одна задача синтеза оптимальных систем по принципу максимума. «Автоматика и телемеханика», т. 22, 1961, № 10, стр. 1302—1308).
100. Jen-Wei C. Synthesis of Relay Systems from the Minimum Integral Quadratic Deviation. Automation and Remote Control, Vol. 22, 1962, pp. 1463—1469. (Чжан Жэнь-вей. Синтез релейных систем по минимуму интегральных квадратичных отклонений. «Автоматика и телемеханика», т. 22, 1961, № 12, стр. 1601—1607).

101. Johnson C. D. and Gibson J. E. Singular Solutions in Problems of Optimal Control. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-8, 1963, pp. 4—14.
102. Johnson C. D. and Wonham W. M. On a Problem of Letov in Optimal Control, preprints 1964, Joint Autom. Control, Conf., June 1964, pp. 317—325.
103. Johnson C. D. and Gibson J. E. Optimal Control of a Linear Regulator with Quadratic Index of Performance and Fixed Terminal Time. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-9, 1964, pp. 355—360.
104. Johnson C. D. Singular Solutions in Problems of Optimal Control in C. T. Leondes (ed.), «Advances in Control Systems: Theory and Applications», Vol. 11, Academic Press Inc., New York, 1965.
105. Kalman R. E. Analysis and Design Principles of Second and Higher Order Saturating Servomechanisms. «Trans. AIEE», pt. II, Vol. 74, 1955, pp. 294—310.
106. Kalman R. E. On the General Theory of Control Systems. «Proc. First IFAC Congr.», pp. 481—493. (Калман Р. Е., Об общей теории систем управления. Труды I Международного Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Изд-во АН СССР, М., 1961, стр. 521—546).
107. Kalman R. E. Contributions to the Theory of Optimal Control. Bol. Soc. Mat. Mex., Vol. 5, 1960, pp. 102—119.
108. Kalman R. E. and Bertram J. E. Control Systems Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov. S. Basic Eng., Vol. 82, 1960, pp. 371—393.
109. Kalman R. E. et al. Controllability of Linear Dynamical Systems in «Contributions to Differential Equations», Vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.
110. Kalman R. E. et al. Fundamental Study of Adaptive Control Systems. Wright-Patterson Air Force Base Tech. Rept. ASD-TR-61-27, Vol. 1, April, 1962.
111. Kalman R. E. Canonical Structure of Linear Dynamical Systems, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., Vol. 48, 1962, pp. 596—600.
112. Kalman R. E. The Theory of Optimal Control and the Calculus of Variations, in R. Bellman (ed.), «Mathematical Optimization Techniques», University of California Press, Berkeley, Calif., 1963.
113. Kalman R. E. Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. J. SIAM Control, ser. A, Vol. 1, 1963, pp. 152—192.
114. Kalman R. E. When Is a Linear Control Optimal? J. Basic Eng., Vol. 86, 1964, pp. 51—60. (Калман Р. Е. Когда линейная система управления является оптимальной. Т. 4. «Теоретические основы инженерных расчетов». Русский перевод № 1, 1964, стр. 69—84).
115. Kelley H. J. Guidance Theory and Extremal Fields, IRE Trans. Autom. Control., Vol. AC-7, 1962, pp. 75—81.
116. Kelley H. J. Method of Gradients in G. Leitman (ed.) «Optimization Techniques». Academic Press Inc., New York, 1962. (Имеется русский перевод. Келли Г. Дж. Метод градиентов «Методы оптимизации с приложением к механике космического полета». Под ред. Дж. Лейтмана. Пер. с англ. под ред. Троицкого В. А. Изд. «Наука», М., № 1965, гл. 6, стр. 244—308).
117. Кириллова Л. С. The Problem of Optimizing the Final State of a Controlled System. «Automation and Remote Control», Vol. 23, 1963, pp. 1485—1494. (Кириллова Л. С. Задача об оптимизации конечного состояния регулируемой системы. «Автоматика и телемеханика», т. 23, 1962, № 12, стр. 1584—1594).
118. Кириллова Л. С. An Existence Theorem in Terminal Control Problems. «Automation and Remote Control», Vol. 24, 1964, pp. 1071—1074. (Кириллова Л. С. Теорема существования для задачи терминального управления. «Автоматика и телемеханика», т. 24, 1963, стр. 1178—1182).
119. Kipiniak W. «Dynamic Optimization and Control». John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.
120. Kishi F. H. The Existence of Optimal Controls for a Class of Optimization Problems. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-8, 1963, pp. 173—175.
121. Kleinman D. L. «Fuel-optimal Control of Second and Third Order Systems with Different Time Constraints». M. S. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., June, 1963.
122. Knudsen H. K. «Maximum Effort Control for an Oscillatory Element», M. S. thesis University of California, Berkeley, Calif., February, 1960.
123. Knudsen H. K. An Iterative Procedure for Computing Time-Optimal Controls, IEEE Trans. Autom. Control., Vol. AC-9, 1964, pp. 23—30.
124. Колмогоров А. and Фомин С. «Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis», Vol. 1, «Metric and Normed Spaces», Graylock Press, Rochester, N. Y., 1957. (Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционалов. М., Изд-во Московского университета, 1960).
125. Гранс G. M. and Sarachik P. E. An Application of Functional Analysis to the Optimum Control Problem. J. Basic Eng., Vol. 85, 1963, pp. 143—150. (Крэнк Дж., Сарачик П. Применение функционального анализа и задача оптимального управления. «Техническая механика». Русский перевод, 1963, № 2, стр. 10—19).

126. К р а с о в с к и й Н. Н. On the Theory of Optimum Regulation. Automation and Remote Control, Vol. 18, 1958, pp. 1005—1116. (К р а с о в с к и й Н. Н. К теории оптимального регулирования. «Автоматика и телемеханика», т. 18, 1957, № 11, стр. 960—970).
127. К р а с о в с к и й Н. Н. On the Theory of Optimum Control. Appl. Math. Mech., Vol. 23, 1959, pp. 899—919. (К р а с о в с к и й Н. Н. К теории оптимального регулирования. «Прикладная математика и механика», т. 23, 1959, вып. 4, стр. 625—639).
128. К р а с о в с к и й Н. Н. and Л е т о в А. М. The Theory of Analytical Design of Controllers. «Automation and Remote Control», Vol. 23, 1962, pp. 649—656. (К р а с о в с к и й Н. Н., Л е т о в А. М. К теории аналитического конструирования регуляторов. «Автоматика и телемеханика», т. 23, 1962, № 6, стр. 713—720).
129. K r e i n d l e r E. «Contributions to the Theory of Time-optimal Control». J. Franklin Inst., Vol. 275, 1963, pp. 314—344.
130. K r e i n d l e r E. and S a r a c h i k P. E. On the Concept of Controllability and Observability of Linear Systems. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-9, 1964, p. 129—136.
131. К р о т о в В. Ф. Methods for Solving Variational Problems on the Basis of the Sufficient Conditions for an Absolute Minimum I. Automation and Remote Control, Vol. 23, 1963, pp. 1473—1484. (К р о т о в В. Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума. Часть I. «Автоматика и телемеханика», т. 23, 1962, № 12, стр. 1571—1583).
132. К р о т о в В. Ф. Methods for Solving Variational Problems Sliding Regimes. «Automation and Remote Control», Vol. 24, 1963, pp. 539—553. (К р о т о в В. Ф. Методы решения вариационных задач. II. Скользящие режимы. «Автоматика и телемеханика», т. 24, 1963, № 5, стр. 581—598).
133. К у б а R. E. and К а з д а L. F. A Phase Space Method for the Synthesis of Nonlinear Servomechanisms. Trans. AIEE, pt. II, 1956, pp. 282—290.
134. К у б а R. E. and К а з д а L. F. The Design and Performance of a Model Second Order Nonlinear Servomechanism. IRE Trans. Autom. Control, Vol. AC-1, 1958, pp. 43—48.
135. К у л и к о в с к и й R. On Optimum Control with Constraints, Bull Polish, Acad. Sci. Ser. Tech. Sci. Vol. 7, 1959, pp. 385—394.
136. К у л и к о в с к и й R. Synthesis of a Class of Optimum Control Systems. Bull. Polish Acad. Sci., Ser. Tech. Sci., Vol. 7, 1959, pp. 663—671.
137. К у л и к о в с к и й R. Optimizing Processes and Synthesis of Optimizing Automatic Control Systems with Nonlinear Invariable Elements, Proc. First IFAC Congr., pp. 473—477. (К у л и к о в с к и й Р. К оптимальным процессам и синтезу оптимальных систем с линейными и нелинейными неизменяемыми элементами. Труды I Международного конгресса Международной Федерации по автоматическому управлению. Т. II, Изд-во АН СССР, М., 1961, стр. 491—505).
138. К у р т с в е й л Y. The Analytical Design of Control Systems. Automation and Remote Control, Vol. 22, 1961, pp. 593—599. (К у р ц в е й л Я. К оптимальному конструированию регуляторов. «Автоматика и телемеханика», т. 22, 1961, № 6).
139. L a d d H. O. Minimum Fuel Control of a Second Order Linear Process with a Constraint on Time to Run. Raytheon Missile and Space Div., Rept. BR-2113, Bedford, Mass, November 1962.
140. L a S a l l e J. P. Time Optimal Control Systems. Proc. Natic Acad. Sci. U. S., Vol. 45, 1959, pp. 573—577.
141. L a S a l l e J. P. The Time-optimal Control Problem in «Contributions to Differential Equations», Vol. V, pp. 120—124, 1960.
142. L a S a l l e J. P. The Time-optimal Control Problem, in «Contributions to Differential Equations», Vol. V, pp. 1—24. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1960.
143. L a S a l l e J. P. The Bang-Bang Principle. Proc. First IFAC Congr., pp. 493—497. (Л а с с а л ь Дж. П. Принцип оптимального релейного управления. Труды I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Т. II, Изд-во АН СССР, М., 1961, стр. 548—557).
144. L e e E. B. Mathematical Aspects of the Synthesis of Linear Minimum Response Time Controllers. IRE Trans. Control. Vol. AC-5, 1960, pp. 283—289.
145. L e e E. B. and M a r k u s L. Optimal Control for Nonlinear Processes. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 8, 1961, pp. 36—58.
146. L e e E. B. and M a r k u s L. Synthesis of Optimal Control for Nonlinear Processes with One Degree of Freedom. Inst. Math. Acad. Sci. Ukrainian SSR, Kiev, 1961. (Л и И. Б., М а р к у с Л. Синтез оптимального регулирования для нелинейных процессов с одной степенью свободы. Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Приложение методов нелинейных колебаний к задачам физики и механики. Киев, изд-во АН УССР, 1963).
147. L e e E. B. On the Time-optimal Regulation of Plants with Numerator Dynamics. IRE Trans. Autom. Control, Vol. AC-6, 1961, pp. 351—352.
148. L e e E. B. A Sufficient Condition in the Theory of Optimal Control. J. SIAM Control, Ser. A, Vol. 1, 1963, pp. 241—245.
149. L e e E. B. Geometric Properties and Optimal Controllers for Linear Systems. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-8, 1963, pp. 379—381.

150. Lee E. B. On the Domain of Controllability for Linear Systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-8, 1963, pp. 172—173.
151. Leitman G. (ed.) «Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems». Academic Press Inc., New York, 1962. (Имеется русский перевод. Лейман Дж. (ред.) Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Пер. с англ. под ред. В. А. Троицкого. Изд. «Наука», М., 1965).
152. LeMay J. L. Recoverable and Reachable Zones to Control Systems with Linear Plants and Bounded Controller Outputs, preprints 1964. *Joint Autom. Control Conf.*, June 1964, pp. 305—312.
153. Letov A. M. Analytical Controller Design I. «Automation and Remote Control». Vol. 21, 1960, № 4, pp. 303—306 (Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов I. «Автоматика и телемеханика» Т. 21, 1960, № 5).
154. Letov A. M. Analytical Controller Design II. «Automation and Remote Control», Vol. 21, 1960, No. 5, pp. 389—393. (Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. II. «Автоматика и телемеханика». Т. 21, 1960, № 5).
155. Letov A. M. The Analytical Design of Control Systems «Automation and Remote Control». Vol. 22, 1961, pp. 363—372. (Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Метод динамического программирования. IV. «Автоматика и телемеханика». Т. 22, 1961, № 4).
156. Litovchenko I. A. Isoperimetric Problem in Analytic Design. «Automation and Remote Control», Vol. 22, 1962, pp. 1417—1423. (Литовченко И. А. К изопериметрической задаче аналитического конструирования. «Автоматика и телемеханика». Т. 22, 1961, № 12).
157. McDonald D. C. Nonlinear Techniques for Improving Servo Performance. *Proc. Natl. Electron. Conf.* Vol. 6, 1950, pp. 400—421.
158. McShane E. J. On Multipliers for Lagrange Problems. *Am. J. Math.*, Vol. 61, 1939, pp. 809—819.
159. Meditch J. S. Synthesis of a Class of Linear Feedback Minimum Energy Controls. *IEEE Trans. Autom. Control*. Vol. AC-8, 1963, pp. 376—378.
160. Meditch J. S. and Neustadt L. W. An Application of Optimum Control to Midcourse Guidance. *Proc. Second IFAC Congr.*, Paper 427, Basle, 1963. (Медич Дж. С., Ньюстад Л. У., Применение оптимального управления к наведению на среднем участке траектории. Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Т. 2, изд-во «Наука», 1965, стр. 91—105).
161. Meditch J. S. On Minimal Fuel Satellite Attitude Controls. *IEEE Trans. Appl. Ind.*, Vol. 83, 1964, pp. 120—128.
162. Meditch J. S. On the Problem of Optimal Thrust Programming for a Lunar Soft Landing, preprints 1964, *Joint Autom. Control Conf.*, June 1964, pp. 233—238.
163. Merriam C. W. «Optimization Theory and the Design of Feedback Control Systems». McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
164. Miele A. The Calculus of Variations in Applied Aerodynamics and Flight Mechanics in G. Leitman (ed.), «Optimization Techniques», Academic Press Inc., New York, 1962. (Миле А. Методы вариационного исчисления в прикладной аэродинамике и механике полета. «Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета». Под ред. Дж. Лейтмана, изд. «Наука», М., 1965, пер. с англ. под ред. В. А. Троицкого, гл. 4, стр. 130—208).
165. Neiswander R. S. and MacNeal R. H. Optimization of Non-linear Control Systems by Means of Non-linear Feedbacks. *Trans. AIEE. Pt. II*, Vol. 72, 1953 pp. 262—272.
166. Neustadt L. W. Synthesizing Time-optimal Control Systems. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 1, 1960, pp. 484—493.
167. Neustadt L. W. Time-optimal Control Systems with Position and Integral Limits. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 3, 1961, pp. 406—427.
168. Neustadt L. W. Minimum Effort Control Systems. *J. SIAM Control*, Ser. A, Vol. 1, 1962, pp. 16—31.
169. Neustadt L. W. The Existence of Optimum Controls in the Absence of Convexity Conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 7, 1963, pp. 110—117.
170. Neustadt L. W., Раїевонскы В. On Synthesizing Optimal Controls. *Proc. Second IFAC Congr.*, paper 421, Basle, 1963. (Ньюстад Л. У., Райевонски В. Синтез оптимальных систем управления. Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Т. 2. М., Изд-во «Наука», 1965, стр. 73—90).
171. Neustadt L. W. Optimization, a Moment Problem, and Nonlinear Programming, Aerospace Corp. Rept. TDR-169-(3540-10)-TN-1, El Segundo, Calif., July, 1963.
172. Newton G. C., Gould L. A. and Kaiser J. F. «Analytical Design of Linear Feedback Controls». John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957. (Имеется русский перевод. Ньютон Дж. К., Гулд Л. А., Кайзер Дж. Ф. «Теория линейных следящих систем». Физматгиз, М., 1961, 407 стр.).
173. Oldenburger R. Optimum Non-linear Control. *Trans. ASME*, Vol. 79, 1957, pp. 527—546.



174. Oldenberger R. and Thompson G. Introduction to Time Optimal Control of Stationary Linear Systems. *Automatica*, Vol. 1, 1963, pp. 177—205 (Contains 58 references, mostly on time-optimal control).
175. Paiewonsky B. Time-optimal Control of Linear Systems with Bounded Control in «International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics». Academic Press Inc., New York, 1963.
176. Параев Ю. И. On Singular Control in Optimal Processes That Are Linear with Respect to the Control Inputs, *Automation and Remote Control*, Vol. 23, 1962, pp. 1127—1134. (Параев Ю. И. Об особом управлении в оптимальных процессах, линейных относительно управляющих воздействий. «Автоматика и телемеханика», т. 23, 1963, № 9, стр. 1202—1219).
177. Pars L. A. «An Introduction to the Calculus of Variations», John Wiley & Sons, Inc. New York, 1962.
178. Pittel B. G. Some Problems of Optimum Control. I. *Automation and Remote Control*, Vol. 24, 1964, pp. 1078—1091. (Питтель Б. Г. О некоторых задачах оптимального управления». «Автоматика и телемеханика», т. 24, 1963, № 9, стр. 1187—1201, № 1, стр. 1441—1453).
179. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V. and Mishchenko E. F. «The Mathematical Theory of Optimal Processes». Interscience Publishers, Inc., New York, 1962. (Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. «Математическая теория оптимальных процессов». М., Физматгиз, 1961, 391 стр.).
180. Pontryagin L. S. «Ordinary Differential Equations». Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1962. (Понтрягин Л. С. «Обыкновенные дифференциальные уравнения». 2-е изд. «Наука», М., 1965).
181. Preston J. I. Non-linear Control of Saturating Third-order Servomechanism, MIT Servo Lab. Tech. Mem. 6897-TM-14, Cambridge, Mass, 1954.
182. Пруакин Н. С. The Problem of Analytical Regulator Design. *Automation and Remote Control*, Vol. 24, 1964, pp. 1075—1077. (Пряхин Н. С. Задача об аналитическом проектировании регуляторов. *Автоматика и телемеханика*, т. 24, 1964, стр. 1075—1077).
183. Rekasius Z. V. A General Performance Index for Analytical Design of Control Systems. *IRE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-6, 1961, pp. 217—222.
184. Rekasius Z. V. and Hsia T. C. On an Inverse Problem in Optimal Control, preprints 1964 Joint Autom. Control Conf., June, 1964, pp. 313—316.
185. Репин Ю. М. and Третьяков В. И. The Electronic Analog Devices. *Automation and Remote Control*, Vol. 24, 1963, pp. 674—679. (Репин В. Г. и Третьяков В. И. Решение задачи об аналитическом проектировании регуляторов на электронных моделирующих устройствах. «Автоматика и телемеханика», т. 24, 1963, № 6, стр. 738—743).
186. Rohrer R. A. and Sobral M. Optimal Singular Solution for Linear, Multi-input Systems. Univ. Illinois Coordinated Science Lab. Rept. R-199, Urbana, Ill, April, 1964.
187. Rose N. J. Optimum Switching Criteria for Discontinuous Controls, *IRE Natl V Conv. Record*, 1956, pp. 61—66.
188. Розоноер Л. И. L. S. Pontryagin's. Maximum Principle in the Theory of Optimum Systems I, II, III. *Automation and Remote Control*, Vol. 20, I, 1960, pp. 1288—1302; II, pp. 1405—1421; III, pp. 1517—1532. (Розоноер Л. И. Принцип максимума Понтрягина в теории оптимальных систем. «Автоматика и телемеханика», т. 20, 1959, № 10, стр. 1320—1334; № 11, стр. 1141—1458; № 12, стр. 1561—1578).
189. Roxin E. Reachable Zones in Autonomous Differential Systems. *Bol. Soc. Mat. Mex.*, Vol. 5, 1960, pp. 125—135.
190. Roxin E. The Existence of Optimal Controls. *Mich. Math. J.*, Vol. 9, 1962, pp. 109—119.
191. Roxin E. A. Geometric Interpretation of Pontryagin's Maximum Principle, in J. P. LaSalle and S. Lefschetz (eds.). «Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics». Academic Press, Inc., New York, 1963.
192. Rudin W. «Principles of Mathematical Analysis». 2ded., McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
193. Salukvadze M. E. On the Analytical Design of an Optimal Controller. *Automation and Remote Control*, Vol. 24, 1963, pp. 409—417. (Салуквадзе М. Е. К вопросу аналитического конструирования оптимального регулятора. «Автоматика и телемеханика», т. 24, 1963, № 4, стр. 437—446).
194. Sarachik P. E. and Kranz G. M. On Optimal Control of Systems with Multinorm Constraints. Proc. Second. IFAC Congr. Paper 423, Basle, 1963. (Сарачин П. Э., Крэнц Дж. М. Оптимальное управление в системах со многими ограничениями. Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2, М., Изд-во «Наука», 1965, стр. 168—184).
195. Schmidt S. F. The Analysis and Design of Continuous and Sampled Data Feedback Control Systems with a Saturation Type Non-Linearity, NASA Tech., Note D-20 1959.

196. Simmons G. F. «Introduction to Topology and Modern Analysis». McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
197. Smith F. B. Time-optimal Control of Higher-order Systems, IRE Trans. Autom. Control, Vol. AC-6, 1961, pp. 16—21.
198. Smith O. J. M. Feedback Control Systems. McGraw-Hill Book Company, New York, 1958. (Имеется русский перевод. Смит О. Дж. М. Автоматическое регулирование. М., Физматгиз, 1962, 847 стр.).
199. Stern T. E. and Lerner R. M. A Circuit for the Square Root of the Sum of the Squares. Proc. IEEE, Vol. 51, 1963, pp. 593—596.
200. Stout T. M. Effects of Friction in an Optimum Relay Servomechanism. Trans. AIEE, pt. II, Vol. 72, 1953, pp. 329—336.
201. Sun-Jian and Hang King-ching. Analysis and Synthesis of Time optimal Control Systems, submitted to the Second IFAC Congress, Basle, September, 1963. (Сун Цзянь, Хань Кин-чин. Анализ и синтез оптимальных по быстрдействию систем управления. Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2, М., Изд-во «Наука», 1965, стр. 185—195).
202. Tou J. T. «Optimum Design of Digital Control Systems». Academic Press. Inc., New York, 1962.
203. Truxal J. G. «Automatic Feedback Control System Synthesis». McGraw-Hill Book Company, New York, 1955. (Имеется русский перевод. Траксел Джон. М., Машгиз, 1959).
204. Troitskii V. A. The Mayer Bolza Problem of the Calculus of Variations and the Theory of Optimum Systems. J. Appl. Math. Mech., Vol. 25, 1961, pp. 994—1010. (Троицкий В. А. Задача Майера-Больца и теория оптимальных систем «Прикладная математика и механика», т. 25, 1961, вып. 4).
205. Vuliikh B. Z. «Introduction to Functional Analysis», Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass, 1963.
206. Wang P. K. C. Analytical Design of Electrohydraulic Servomechanisms with Near Time-optimal Response, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-8, 1963, pp. 15—27.
207. Warga J. Relaxed Variational Problems, J. Math. Anal. Appl., Vol. 4, 1962, pp. 111—128.
208. Warga J. Necessary Conditions for Minimum in Relaxed Variational Problems, J. Math. Anal. Appl., Vol. 4, 1962, pp. 129—145.
209. Weinberg L. «Network Analysis and Synthesis», McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
210. Weiss I. and Kalman R. E. Contributions to Linear System Theory, RIAS Tech. Rept. 64-9, Baltimore, Md., April, 1964.
211. Wopham W. M. and Johnson C. D. Optimal Bang-Bang Control with Quadratic Index of Performance. J. Basic Eng., Vol. 86, 1964, pp. 107—115.
212. Zaden L. A. and Desoer C. A. «Linear System Theory. The State Space Approach». McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

#### Литература, добавленная при переводе книги

213. Александров В. В. О применении аналоговых вычислительных машин для итерационного процесса определения управления в одной оптимальной системе. «Вестник Московского университета. Серия «Математика и механика», 1964, № 4.
214. Альбрехт Э. Г. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. «Прикладная математика и механика», т. 25, 1961, вып. 5.
215. Альбрехт Э. Г., Красовский Н. Н. О наблюдении нелинейной управляемой системы в окрестности заданного движения. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 7, стр. 1047—1057.
216. Аноров В. П. Принцип максимума для процессов с ограничениями общего вида. I. «Автоматика и телемеханика», 1967, № 3, стр. 5—15.
217. Аноров В. П. Принцип максимума для процессов с ограничениями общего вида. II. «Автоматика и телемеханика», 1967, № 4, стр. 5—17.
218. Балакирев В. С. Принцип максимума в теории оптимальных систем второго порядка. «Автоматика и телемеханика», т. 23, 1962, № 8, стр. 1014—1022.
219. Бойчук Л. М. Некоторые вопросы анализа оптимальных систем автоматической стабилизации. «Автоматика», Киев, 1963, № 3.
220. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов. «Докл. АН СССР», т. 110, 1956, № 1, стр. 7—10.
221. Болтянский В. Г. Принцип максимума в теории оптимальных процессов. «Докл. АН СССР», т. 119, 1958, № 6, стр. 1070—1073.
222. Болтянский В. Г. Оптимальные процессы с параметрами. Докл. АН Узб. ССР, 1959, № 10, стр. 9—13.
223. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. Теория оптимальных процессов. I. Принцип максимума. Изв. АН СССР, серия «Математика», т. 24, 1960, № 1, стр. 3—42.

224. Болтянский В. Г. Применение теории оптимальных процессов к задачам приближенных функций. «Труды математического ин-та им. В. А. Стеклова», т. 60, стр. 82—95.
225. Болтянский В. Г. Моделирование линейных оптимальных быстродействий при помощи релейных схем. «Докл. АН СССР», т. 139, 1961, № 2, стр. 19—22.
226. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Принцип максимума в теории оптимальных процессов. «Труды I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению». Т. II. Изд-во АН СССР, М., 1961, стр. 457—467.
227. Болтянский В. Г. Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования. «Изв. АН СССР. Серия математика», т. 28, 1964, № 3, стр. 481—514.
228. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. Изд-во «Наука», М., 1966, 307 стр.
229. Бор-Раменский, Сун Цзянь. Оптимальный следящий привод с двумя параметрами управления. «Автоматика и телемеханика», т. 22, 1961, № 2, стр. 157—170.
230. Бутковский А. Г., Лернер А. Я. Об оптимальном управлении системами с распределенными параметрами. «Автоматика и телемеханика», т. 21, 1960, № 6, стр. 682—691.
231. Бутковский А. Г. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами. «Автоматика и телемеханика», т. 22, 1961, стр. 17—26.
232. Бутковский А. Г., Лернер А. Я. Принцип максимума для оптимальных систем с распределенными параметрами. «Автоматика и телемеханика», т. 22, 1961, № 10, стр. 1288—1301.
233. Бутковский А. Г., Лернер А. Я. Некоторые приближенные методы решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. «Автоматика и телемеханика», т. 22, 1961, № 12.
234. Бутковский А. Г. Расширенный принцип максимума для задач оптимального управления. «Автоматика и телемеханика», т. 24, 1963, № 3, стр. 312—327.
235. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. Изд-во «Наука». М., 1965, 474 стр.
236. Вайсбород Э. М. Об одном приближенном методе синтеза оптимального управления. «Автоматика и телемеханика», т. 24, 1963, № 12, стр. 1626—1632.
237. Васильев А. Я. О необходимых и достаточных условиях оптимальности регулируемых систем. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 10, стр. 1404—1413.
238. Вознюк Л. Л., Иваненко В. И., Карагонец Д. В., Свердан М. Л. Синтез оптимального по быстродействию управления для объектов второго порядка. Изв. АН СССР. «Техническая кибернетика», 1963, № 3.
239. Габасов Р. К вопросу о единственности оптимального управления в дискретных системах. «Изв. АН СССР». «Энергетика и автоматика», 1962, № 5, стр. 99—106.
240. Габасов Р. К оптимальным процессам в связанных системах дискретного типа. «Автоматика и телемеханика», т. 22, 1962, № 7, стр. 872—880.
241. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Об одном способе решения некоторых задач оптимального регулирования. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 3, стр. 312—320.
242. Габасов Р., Кириллова Ф. М. О решении некоторых задач теории оптимальных процессов. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 7, стр. 1058—1066.
243. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Об оптимальном управлении связанными системами дискретного типа. «Автоматика и телемеханика», т. 24, 1963, № 7, стр. 900—905.
244. Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов в линейных системах. «Докл. АН СССР», т. 116, 1957, № 1, стр. 9—11.
245. Гамкрелидзе Р. В. К общей теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР, т. 123, 1958, № 2, стр. 223—226.
246. Гамкрелидзе Р. В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах. «Изв. АН СССР, серия математика», т. 22, 1958, № 4, стр. 449—474.
247. Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные по быстродействию процессы при ограниченных фазовых координатах. «Докл. АН СССР», т. 125, 1959, № 3, стр. 475—478.
248. Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах. «Изв. АН СССР, сер. матем.», т. 24, 1960, № 3, стр. 315—356.
249. Гамкрелидзе Р. В. О скользящих оптимальных режимах. «Докл. АН СССР», т. 143, 1962, № 6, стр. 1243—1245.
250. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 2-е издание. Изд-во «Наука», М., 1966, 575 стр.
251. Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Гостехиздат, 1950.
252. Горбань А. В. О проблеме синтеза управляемых систем. «Автоматика и телемеханика» т. 24, 1963, № 10, стр. 1297—1302.

253. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. Изд-во «Наука», М., 1966, 679 стр.
254. Гулько Ф. Б., Коган Б. Я. Метод оптимального управления с прогнозированием. «Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению», т. II, Изд-во «Наука», М., 1965, стр. 406—414.
255. Демьянов В. Ф. К построению оптимальной программы в линейной системе. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 1, стр. 3—11.
256. Демьянов В. Ф. Минимизация выпуклых гладких функционалов в линейных системах при выпуклых гладких ограничениях на фазовые координаты. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 11, стр. 1528—1537.
257. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. «Доклад АН СССР», т. 149, 1963, № 4, стр. 759.
258. Егоров А. И. Об одной вариационной задаче в теории уравнений эллиптического типа. «Сибирский математический журнал», т. 5, 1964, № 3.
259. Егоров А. И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 5, стр. 613—623.
260. Егоров В. А. О решении одной вырожденной вариационной задачи и оптимальном подъеме космической ракеты. «Прикладная математика и механика», т. 22, вып. 1, 1958.
261. Егоров Ю. В. Некоторые задачи теории оптимального управления. «Журнал вычислительная математика и математическая физика», т. 3, 1963, вып. 5, стр. 887—904.
262. Иванов Ю. Н. Оптимальное изменение мощности при движении тела переменной массы в гравитационном поле. «Прикладная математика и механика», т. 26, № 4, 1962.
263. Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Шалаев Ю. В. Оптимальные траектории и оптимальные параметры космических аппаратов с двигателями ограниченной мощности. «Космические исследования», т. 2, № 3, 1964, стр. 414—432.
264. Ильин В. А. Оптимальный переход космического аппарата, тормозящегося в атмосфере планеты, на орбиту искусственного спутника Земли. «Инж. журнал», т. 3, № 2, 1963.
265. Исаев В. К. Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет. «Автоматика и телемеханика», т. 22, № 8, 1961, т. 23, № 1, 1962, стр. 986—1001.
266. Исаев В. К., Курьянов А. И., Сонин В. В. Применение принципа максимума в ракетодинамике, т. XIV Международный конгресс по астронавтике (труды), Изд-во 1964.
267. Исаев В. К., Сонин В. В. Об одной нелинейной задаче оптимального управления. «Автоматика и телемеханика», т. 23, № 9, 1962, стр. 1117—1129.
268. Калинин В. Н. Обобщенные критерии оптимальности в задачах оптимального управления. «Автоматика и телемеханика», т. 26, 1965, № 2, стр. 365—369.
269. Канареев Л. Е. К теории оптимальных процессов. «Изв. АН СССР. Энергетика и автоматика», 1951, № 4, стр. 120—129.
270. Кириллова Ф. М. Некоторые вопросы теории оптимального регулирования. «Изв. высш. учебн. завед. Математика», 1962, № 3, стр. 48—58.
271. Кириллова Л. С. Теорема существования для задачи терминального управления. «Автоматика и телемеханика», т. 24, 1963, № 9, стр. 1178—1182.
272. Красовский Н. Н. О выборе параметров оптимальных устойчивых систем. «Труды I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению», т. II, Изд-во АН СССР, М., 1961, стр. 482—489.
273. Красовский Н. Н. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. «Прикл. матем. и механика», т. 25, 1963, вып. 4.
274. Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем. «Прикладная математика и механика», т. 28, 1964, вып. I, стр. 3—14.
275. Красовский Н. Н. Проблемы управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости динамических систем. «Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике», вып. I, Изд-во «Наука», М., 1965.
276. Красовский Н. Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. «Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению», т. II, Изд-во «Наука», М., 1965, стр. 201—210.
277. Кротов В. Ф. Расчет оптимальной траектории для перехода ракеты на заданную круговую траекторию около Земли. Сб: «Механика МВТУ», Оборонгиз, М., 1955.
278. Кротов В. Ф. Приближенный синтез оптимального управления. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 11, стр. 1521—1527.
279. Крылов Н. А. и Черноусько Ф. Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления. «Журнал вычислительной математики и математической физики», т. 2, 1962, № 6, стр. 1132—1139.

280. Кузмак Г. Е. Линеаризованная теория оптимальных перелетов. «Космические исследования», т. 3, № 1, 1965, стр. 3—26.

281. Кузмак Г. Е., Исаев В. К., Давидсон Б. Х. Оптимальные режимы движения точки переменной массы в однородном центральном поле. «Докл. АН СССР», т. 149, № 1, 1963, стр. 58—61.

282. Кузмак Г. Е., Лавренко Н. И., Исаев В. К., Сонин В. В. Линеаризованная теория оптимальных многоимпульсных перелетов. Некоторые особенности задачи об оптимальном программировании тяги ракет. «XV Международный конгресс по астронавтике. (Труды)». Изд-во, «Наука» 1965, стр. 311—346.

283. Куликовский Р. Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. Пер. с польского под ред. А. Г. Бутковского, Изд-во «Наука», М., 1967, 379 стр.

284. Лебедев В. Н. Вариационные задачи о взлете космического аппарата с круговой орбиты. «Журнал вычислительная математика и математическая физика», т. 3, № 6, 1963, стр. 1126—1130.

285. Лернер А. Я. О предельном быстродействии систем автоматического управления. «Автоматика и телемеханика», т. 15, 1954, № 6, стр. 461—477.

286. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Издание 2-е. «Физматгиз», М., 1962, 483 стр.

287. Летов А. М. Теория оптимального управления. «Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению», т. II, Изд-во «Наука», М., 1965, стр. 7—38.

288. Лурье А. И. Минимальный квадратичный критерий качества регулируемой системы. «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1963, № 4.

289. Мильштейн Г. Н. Применение последовательных приближений для решения одной оптимальной задачи. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 3, стр. 321—329.

290. Мороз А. И. Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка. «Автоматика и телемеханика», т. 26, 1965, № 2, стр. 193—207; № 3, стр. 410—420.

291. Новосельцев В. Н. Оптимальный процесс в релейно-импульсной системе второго порядка. «Автоматика и телемеханика», т. 21, 1960, № 5, стр. 569—574.

292. Новосельцев В. Н. Об оптимальном управлении при наличии запаздывания. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 11, стр. 1545—1548.

293. Новосельцев В. Н. Оптимальные по быстродействию системы управления при наличии случайных помех. «Труды II Международного Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению», т. II, Изд-во «Наука», М., 1965, стр. 368—377.

294. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. «Успехи физических наук», т. 63, вып. 1, а, 1957.

295. Павлов А. А. О повышении быстродействия некоторых релейных систем третьего порядка. Изв. АН СССР ОТН. «Энергетика и автоматика», 1962, № 2, стр. 59—71.

296. Павлов А. А. Динамика быстродействующих релейных сервомеханизмов с запаздыванием. «Изв. АН СССР. ОТН. Техническая кибернетика», 1963, № 1.

297. Павлов А. А. Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. Метод фазового пространства. Изд-во «Наука», М., 1966, 390 стр.

298. Петров В. А., Скворцов Г. В. Об одной задаче аналитического конструирования регуляторов. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 10, стр. 1399—1403.

299. Питтель Б. Г. О некоторых задачах оптимального управления. «Автоматика и телемеханика», т. 24, 1963, № 9, стр. 1187—1201; № 11, стр. 1441—1453.

300. Платонов А. К., Дашков А. А., Кубасов В. И. Оптимальное управление полетом космического аппарата. «Труды I симпозиума. Автоматическое управление в широком использовании космического пространства», 1965.

301. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования. «Успехи матем. наук», т. 14, 1959, вып. 1, стр. 3—20.

302. Пропой А. И. Об одной задаче оптимального дискретного управления. «Докл. АН СССР», т. 158, 1964, № 6, стр. 1232—1235.

303. Пшеничный Б. Н. Численный метод решения некоторых задач оптимального управления. «Журнал вычислительная математика и математическая физика», т. 4, 1964, № 2, стр. 292—305.

304. Розоноэр Л. И. О вариационных методах исследования качества систем автоматического управления. «Труды I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению», т. II, Изд-во АН СССР, М., 1961, стр. 506—514.

305. Розенман Е. А. О предельном быстродействии следящих систем с ограниченным по мощности, моменту и скорости исполнительным элементом. «Автоматика и телемеханика», т. 19, 1958, № 7, стр. 633—653.

306. Саввин А. Б. К теории оптимальных по быстродействию процессов в системах второго порядка. «Изв. АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика». 1960, № 6, стр. 162—164.
307. Саввин А. Б. О совместной работе двух оптимальных по быстродействию автоматических устройств. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 1, стр. 12—15.
308. Салуквадзе М. Е. К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием, подверженных постоянно действующим возмущениям. «Автоматика и телемеханика», т. 23, 1962, № 12, стр. 1595—1601.
309. Салуквадзе М. Е. К вопросу инвариантности оптимальных регуляторов. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 5, стр. 650—652.
310. Соколов В. Б. Исследование некоторых задач сближения и мягкой посадки с помощью обобщенных параметров. «Космические исследования», т. 5, 1967, вып. 1, стр. 45—57.
311. Стратонович Р. Л. Новейшее развитие методов динамического программирования и их применение для синтеза оптимальных систем. «Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению», т. II, Изд-во «Наука», М., 1965, стр. 120—130.
312. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд-во МГУ, 1966.
313. Тарасов Е. В. Оптимальные режимы полета летательных аппаратов. Оборонгиз, М., 1963.
314. Токарев В. В. Оптимальное управление источником мощности при движении тела переменной массы в гравитационном поле с активным сбросом мощности. «Прикладная математика и механика», т. 27, № 4, 1963.
315. Троицкий В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления. «Прикладная математика и механика», т. 26, вып. 1, 1962.
316. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами. «Прикладная математика и механика», т. 26, 1962, № 3, стр. 431—443.
317. Троицкий В. А. Вариационные задачи процессов управления с функционалами, зависящими от промежуточных значений координат. — «Докл. АН СССР», т. 149, 1963, № 2.
318. Федоренко Р. М. Приближенное решение некоторых задач оптимального управления. «Журнал вычислительная математика и математическая физика», т. 4, 1964, № 6, стр. 1045—1064.
319. Фельдбаум А. А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. «Автоматика и телемеханика», т. 14, 1953, № 6, стр. 712—728.
320. Фельдбаум А. А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства. «Автоматика и телемеханика», т. 16, 1955, № 2, стр. 120—149.
321. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. 2-е издание. Изд-во «Наука», М., 1966, 623 стр.
322. Харатишвили Г. Л. Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием. «Докл. АН СССР», т. 136, 1961, № 1, стр. 39—42.
323. Цыпкин Я. З. Оптимальные процессы в импульсных автоматических системах. «Изв. АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика», 1960, № 4, стр. 74—93.
324. Шагхан Ф. А. Применение принципа максимума к задачам оптимизации параллельных химических реакций. «Автоматика и телемеханика», т. 25, 1964, № 3, стр. 368—373.
325. Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. Гостехиздат, 1952.
-

## АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А

Апериодическое звено, управление оптимальное по расходу топлива 588

### Б

Базис 33

- канонический 33
- натуральный 34
- ортонормальный 49

Баттерварта, фильтр

Беллман Р. 16, 316

Болтянский, В. Г. 16

Больцано-Вейрштрасса, свойство 68

Бушау, Д 451, 503

Бюси, Р 20

### В

Вандермонда, матрица 140

Вариация

- первая 219
- вторая 220

Вариации

- временные 294
- местные 295

Вариации управления для задачи с закрепленным концом 253

Вариационные задачи — фундаментальные

леммы 218, 239

Вариационное исчисление 222—263

- применение к задачам с закрепленным концом 252
- применение к задачам оптимизации первого порядка 222—233
- применение к общей задаче со свободным концом и фиксированным конечным временем 233—256

Вектор

- линейно зависимый 33
- линейно независимый 33
- норма вектора 50
- столбец 32, 36
- строка 32, 36
- трансверсальный 92

Вектор ошибки 692

Векторное пространство 30—33

- базис 33
- произведение на скаляр 36
- размерность 35—36
- сумма элементов 36

Векторная функция 75—105

- интегралы от 94—97
- из  $R$  в  $R_n$  75—76
- из  $R$  в  $R_n$  76
- кусочная непрерывность 80—82
- непрерывность 77—80
- произведение 76
- производная 82—90
- регулярная 80—82
- сумма 76

Винер, Н 20

Внутреннее произведение 46—48

- невырожденное 47
- определенное 46
- определенное 47
- положительное 47
- функций 103—104

Внутренняя точка множества 62

Внутренняя часть множества 64

Возмущение

- линеаризованные уравнения относительно оптимальной траектории 234—235
- оптимальной траектории 234—235
- оптимального управления 234
- функционала стоимости 237—238, 240—244

Вращающееся космическое тело 504—505, 525—527

— гироскопическая связь 731

— размещение двигателей 734

— сравнение схем управления 738—743

— сравнение схем управления при переменной скорости вращения 742

— сравнение по расходу топлива 742

— схемы управления 734

— уравнения Эйлера 731

— управление, оптимальное по быстродействию 503, 525

Временные вариации оптимального управления 294

Выпуклая комбинация 71

Выпуклое множество 70—73

— внутренняя часть 73

— гиперплоскости 73—74

— замыкание 72

— определение 71

— регулярное 74

— регулярные точки 74

Выпуклый конус 71

Выпуклая оболочка 72

Выврожденные задачи оптимального управления 430—444

Выврожденная задача управления

— необходимые условия 432, 439

— для нелинейной системы 633

— об оптимальном быстродействии 341, 356

— об оптимальном расходе топлива 391, 398

— оптимальные и экстремальные управления 433

Выход, задача о регуляторе 682

Расчет 170

### Г

Гамильтона—Якоби уравнение

— замечания относительно решения 324—326

— для задачи об оптимальном по быстродействию управлении объектом с двойным интегрированием 460—461

— для задачи об оптимальном по расходу топлива управлении интегратором 585

— для задачи об оптимальном по расходу топлива управлении объектом с двойным интегрированием 607

— для общей задачи управления 317—319, 321—323

— для задачи о регуляторе состояния 667

— для систем, оптимальных по быстродействию 377—380

Гамильтониан (функция Гамильтона)

— графическая интерпретация необходимых условий 257—259

— нормальный (определение) 321

— для принципа минимума 263

— определение 236, 263

Гамильтонова система (система канонических уравнений) 264

Гамрекелидзе Р. В. 16

Гармонический осциллятор

— вырожденное управление 438—439

— демпфированный 520

— локальная и глобальная оптимальность по быстродействию 719

— минимальные изохроны 515, 536

— оптимальное по быстродействию управление 503—536

— с двумя входами 525—536

— линии переключения для двух входов 533

— линии переключения для одного входа 512

— закон управления 512, 534

— субоптимальная система 517—519

Гейне—Бореля свойство 67

Геометрическая интерпретация задач об оптимальном быстродействии 327—332  
 Гиперплоскость 68—70  
 — касательная 90  
 — опорная 69  
 — определение 68  
 — разделяющая 69  
 Гиперповерхность 90—92  
 — гладкая 90  
 — и  $k$ -мерное многообразие 92  
 — нормаль 90  
 — определение 90  
 — переключения 496  
 — регулярные точки 90  
 Гиперсфера как область ограничений 711  
 Гироскопическая связь 731  
 Гладкое множество 90  
 Градиент 86  
 Граф (см. также функция) 29  
 Граница множества 64  
 Граничные условия дифференциальных уравнений, свободные и фиксированные 110—111

## Д

Детерминант 41  
 Диагональная матрица 45  
 Диагональное преобразование 45  
 Динамика в числителе 547  
 Динамическая система 155  
 — движение 161  
 — дифференциальная (определение) 160  
 — интуитивные понятия 145—154  
 — конечномерная 160  
 — непрерывная (определение) 160  
 — определение 155—159  
 — эквивалентность 161  
 Дифференциальные уравнения 107—144  
 — граничные условия 110  
 — задача с начальными условиями 110  
 — линейное 118  
 —  $n$ -го порядка, определение 108  
 — развернутая форма 108  
 — решение 108  
 — решение системы дифференциальных уравнений 108—110  
 — система дифференциальных уравнений первого порядка 109  
 — теорема существования и единственности решения 112  
 Дифференцируемая функция из  $R$  в  $R$  82  
 — из  $R$  в  $R^n$  84  
 — из  $R_m$  в  $R_n$  88  
 Доказательство принципа минимума 260—319  
 Дополнительная переменная 236  
 Достаточные условия  
 — вывод с помощью вариационного исчисления 246  
 — для задач об оптимальном управлении 316—326  
 — замечания 316  
 — минимума функционала 221  
 — для обычного минимума 207, 209  
 — теория Гамильтона—Якоби 319  
 Достижимое состояние 179—186  
 область достижимых состояний 183—186, 332

## Е

Единственность оптимального управления 444—446  
 — в задаче о минимуме энергии управления 416  
 — в задаче об оптимальном быстродействии 357  
 — в задаче об оптимальном расходовании топлива 399, 583—586, 592  
 — в задаче о регуляторе состояния 660  
 Единственность экстремального управления 444—446  
 — в задаче о минимуме энергии управления 416  
 — в задаче об оптимальном быстродействии 361  
 — в задаче об оптимальном расходовании топлива 400—402

## Ж

Жорданова каноническая форма 45

## З

Задачи, зависящие от времени с подвижной областью цели 271  
 Задачи на минимум энергии управления 410—430  
 — для объекта с двойным интегрированием (пример) 417—424  
 — единственность экстремальных управлений 416  
 — зависимость от конечной стоимости 419—420  
 — необходимые условия 413  
 — нормальность 415  
 — при ограничениях управляющих переменных 426  
 — уравнение для оптимального управления 415—416  
 — физический смысл 410  
 — формулировка задачи 412  
 Задача об оптимальном быстродействии 328—383  
 — вырожденные задачи 341  
 — Гамильтониан 336  
 —  $H$  — минимальное управление 345  
 — геометрическая интерпретация 331—334  
 — для линейных инвариантных во времени систем 352  
 —  $\varepsilon$  — оптимальные управления 334  
 — единственность  
 — оптимальных управлений 357  
 — экстремальных управлений 361  
 — задача пережата 328  
 — задача о регуляторе 353  
 — для подвижной области цели  $S$  328—334  
 — канонические уравнения 337  
 — нормальная задача 341  
 — область достижимых состояний 332  
 — области ограничений управления 331  
 — применение принципа минимума к общей задаче 337  
 — релейный принцип 382  
 — существование оптимального управления 373  
 — упрощенные необходимые условия 342  
 — число переключений управления 359  
 — экстремальные переменные 351  
 — экстремальное управление 359  
 Задача об оптимальном расходовании топлива 383—409  
 — влияние ограничения времени перехода 404  
 — вырожденная задача 391  
 — единственность  
 — оптимальных управлений 399  
 — экстремальных управлений 401  
 — моменты переключения 391  
 — необходимые условия 388  
 — нормальная задача (определение) 390  
 — общая постановка задачи 385  
 — ограничения управления 384  
 — оптимальная система с обратной связью 407  
 — принцип релейный («Включено—Выключено») 392  
 — расход топлива (в единицу времени) 384  
 — с подвижной областью цели 385  
 — функционал стоимости 384  
 — с заданным временем перехода 592  
 — с заданным или ограниченным сверху временем перехода 600  
 — с ограничением времени перехода, пропорциональным минимальному времени 608  
 — с минимизацией линейной комбинации топлива и времени 616  
 — для двух интеграторов 616  
 — оптимальный закон управления 621  
 — для интегратора с апериодическим звеном 622  
 — для нелинейного объекта второго порядка 633  
 — уравнение Гамильтона—Якоби 605  
 — уравнение минимальной стоимости для двух интеграторов 594  
 Задача слежения 692  
 — задачи, сводимые к задачам о регуляторе выхода 702



- закон оптимального управления 694
- оптимальная система с обратной связью 698
- система, близкая к оптимальной 701
- реакция системы первого порядка 706
- на задержанную ступеньку 706
- на синусоиду 707
- на ступеньку 705
- реализуемость оптимального управления 697
- связь с задачей о регуляторе выхода 696
- упрощенные канонические уравнения 693
- уравнение минимальной стоимости 695
- уравнение Риккати 695
- формулировка задачи 692
- Задача управления 178**
  - обсуждение 178
  - определение 180
  - оптимальная 181
- Заде Л. А. 24**
- Замена переменных в принципе минимума 274**
- Замкнутая сфера 60**
- Замкнутые множества, определение 63**
  - объединение 62
  - связь с замыканием 64
- Замкнутый (закрытый) интервал 64**
- Замыкание множества 64**

## И

- Изображение (отображение) 29**
- Интеграл 93**
  - от векторной функции 95
  - от кусочно-непрерывной функции 93
  - от матрицы 95
  - определенный 93
  - свойства 93
- Интегратор: апериодическим звеном, управление, оптимальное по расходованию топлива 622**
- Интервал 64**
- Интервал наблюдения 152**
- Интервал открытый 64**

## К

- Калман Р. Е. 20, 21, 316**
- Каноническая система 264**
- Каноническая форма: инвариантной во времени системы уравнений 130**
- Канонические уравнения 337**
- Каратеодори 20, 316**
  - лемма 319
- Касательная плоскость 92**
- Квадратичный критерий преобразования (см. задача о регуляторе выхода, задача о регуляторе состояния, задача слежения)**
- Квадратичная форма 46**
- Квазипостоянное решение уравнения Риккати 674**
- Кэли—Гамильтона теорема 44**
- Компактность 67**
- Компактное множество 67**
- Конечная стоимость 181**
  - применение принципа минимума к задачам с конечной стоимостью 273
- Конечное время (время перехода) 181**
  - зависимость от конечного времени в задачах на минимум энергии управления 420
  - ограничения и их влияние в задаче об оптимальном расходовании топлива 404
  - определение 181
  - фиксированное и свободное 446
- Конечное множество 26**
- Конус 70**
  - выпуклый 70
- Косо-симметричная матрица 51**
  - и самосопряженная система 141, 722
- Коэффициент затухания 678**
- Красовский Н. Н. 16**
- Кронекера, символ 40**
- Кусочно-непрерывная функция 80—82**
- Кусочно-постоянная функция 82**

## Л

- Лагранж, множители Лагранжа 216, 223, 231**
- Лемма Каратеодори 319**
- Линейная зависимость 33**
- Линейно-зависимые вектора 33**
- Линейно-независимые вектора 33**

**Линейная оптимальная система с квадратичным критерием преобразования (см. задачу о регуляторе выхода, задачу о регуляторе состояния, задачу слежения)**

- Линейная система**
  - инвариантная во времени 118
  - задача об оптимальном быстродействии 353
  - задача об оптимальном расходовании топлива 394
  - наблюдаемость 192
  - управляемость 187
  - определение 162
  - управление, оптимальное по быстродействию (см. управление, оптимальное по быстродействию для линейных систем)
  - уравнение состояния и выхода 162
- Линейное дифференциальное уравнение**
  - инвариантное во времени (определение) 118
  - определение 118
  - решения 119
- сведение уравнения  $n$ -го порядка к системе первого порядка 137
- с переменными коэффициентами (определение) 118
- с постоянными коэффициентами (инвариантное во времени) 118
- фундаментальная матрица (см.) 123
- Линейное преобразование 35**
  - диагональное 45
  - невырожденное 41
  - обратное 40
  - определение 35
  - произведения 36
  - сложное 37
  - собственные вектора 42
  - собственные значения 42
  - суммы 36
  - тождественное 40
- Линейные комбинации 33**
- Линия переключения 452**
- Локальная оптимальность 248**

## М

- Матрица 35**
  - Вандермонда
  - вектор-столбец 36
  - вектор-строка 36
  - диагональная 45
  - интеграл от матрицы 95
  - косо-симметричная 51
  - коэффициенты матрицы 35
  - невырожденная 41
  - обратная 40
  - отрицательно определенная 55
  - отрицательно полуопределенная 55
  - ортогональная 52
  - подобная 42
  - положительно определенная 55
  - положительно полуопределенная 55
  - произведение матриц 38
  - произведение матрицы на действительное число 37
  - связь с линейным преобразованием 35
  - симметричная 47
  - собственные вектора матрицы 44
  - собственные значения 44
  - сумма матриц 37
  - тождественная 40
  - транспонированная 38
  - фундаментальная 123
  - характеристический полином 44
  - элементы (коэффициенты) 35
- Местные вариации оптимального управления 295**
- Минимальная изохрона 366**
  - для вращающегося космического тела 740
  - для гармонического осциллятора
  - с одним входом 515
  - с двумя входами 536
  - для объекта с двойным интегрированием 460
- Минимизация времени и энергии управления**
  - для объекта с двойным интегрированием 421—423
  - для системы с инвариантной нормой 730
- Минимизация времени и топлива**
  - для аperiodического звена 588
  - для интегратора 586—588

- для интегратора с аperiodическим звеном 622
- для нелинейной системы 633
- для объекта с двойным интегрированием 616
- для системы с инвариантной нормой
- Минимум функционала 218—221
  - вторая вариация 221
  - достаточные условия 222
  - необходимые условия 219
  - определение 218
  - первая вариация 219
- Минимум функции 205, 214
  - абсолютный 205, 215
  - достаточные условия
    - для векторной функции 222
    - для скалярной функции 207
  - локальный 205, 215
  - необходимые условия 216
  - отыскание минимума функции при наличии ограничений 210
- Множество 25
  - внутренняя точка 62
  - внутренняя часть 64
  - выпуклая оболочка множества 72
  - выпуклое 71
  - граница 64
  - достижимых состояний 183—186, 332
  - замкнутое 63
  - замыкание множества 64
  - компактное 67
  - конечное 26
  - нулевое 26
  - объединение бесконечного числа множеств 27
  - объединение множеств 26
  - ограниченное 67
  - операции над множествами 26
  - открытое
    - определение 62
    - пересечение 62
  - пересечение 26
  - полное 65
  - предельная точка множества 63
  - принадлежность к множеству 25
  - произведение множеств 27
  - пустое 26
  - регулярное, выпуклое 74
  - с «углами» 74
  - счетное 26
- Множители Лагранжа 216, 223, 231
- Моменты переключения
  - для задачи об оптимальном быстродействии 340
  - для задачи об оптимальном расходовании топлива 391
- Мощность управления 657
- Мягкая посадка (упрощенная задача) 599

## Н

- Наблюдаемая система
  - линейная, инвариантная во времени 192
  - примеры 195
  - проверка (для линейной системы) 195
  - определена 186
- Наблюдаемость
  - линейной инвариантной во времени системы 192
  - определение 186
  - физический смысл 196—200
- Нелинейная система, оптимальное по быстродействию управление
  - для класса нелинейных систем 541
  - для системы первого порядка 537
  - для системы второго порядка 561
- Необходимые условия
  - вывод при помощи вариационного исчисления 233
  - минимума функционала 218
  - обычного минимума 205—208
  - обычного минимума с ограничениями 214
  - таблица 278—281
- Непрерывная функция (и преобразование) 77
- Неравенство треугольника 59
- Неустойчивая система 142
- Нули передаточной функции 165, 171
  - минимально-фазовые 548
  - неминимально-фазовые 548

- Норма
  - вектора 50
  - функции 98, 104
- Нормаль к гиперповерхности 91
- Нормальная задача управления 321
  - гамильтониан 321
  - на минимум времени перехода (об оптимальном быстродействии) 340, 357
  - на минимум топлива (об оптимальном расходовании топлива) 390
  - на минимум энергии управления 415
- Нормальная система (определение) 201

## О

- Область ограничений 179—180
- Область цели  $S$  180, 182, 443
  - типы 262
- Обратная задача оптимального управления 708
- Обратная матрица 40
- Обратное отображение 29
- Объединение множеств 26
- Объект
  - аperiodическое звено, управление, оптимальное по расходу топлива 588
  - интегратор с аperiodическим звеном 502
    - управление, оптимальное по расходу топлива 622
- Объект с двойным интегрированием
  - выражение для минимального количества топлива 598
  - закон управления, оптимального по расходу топлива
    - при незаданном времени перехода 599
    - при фиксированном времени перехода 604
    - линии переключения при фиксированном времени 606
- Объект с двойным интегрированием
  - минимальные изохроны 460
  - минимизация времени и топлива 616
    - закон управления 621
    - линии переключения 620
    - формулировка задачи 617
  - минимизация времени и энергии управления 421—423
  - минимизация энергии управления 669
  - оптимальное по расходованию топлива управление при незаданном времени перехода 599
  - оптимальное по расходованию топлива управление при фиксированном времени перехода 604
  - полюса оптимального регулятора 676
  - регулятор состояния 674
  - система с обратной связью при ограниченном времени перехода 615
  - с нулями в передаточной функции, управление, оптимальное по быстродействию 560
  - стабилизатор выхода 686
  - стабилизатор состояния 674
  - управление, оптимальное по быстродействию
    - закон управления 458
    - линии переключения 456
    - к началу координат 453
    - к области цели 463—466
    - система с обратной связью 458
    - управление Гамильтона-Якоби 460
- Объект с двойным интегрированием
  - уравнение Гамильтона — Якоби для управления, оптимального по топливу 607
- Объект с двумя постоянными времени (два аperiodических звена)
  - закон управления 474
  - оптимальная система с обратной связью 474
  - управление, оптимальное по быстродействию 474
- Объект нелинейный первого порядка 537
- Объект нелинейный второго порядка 561
- Объект с нулями в передаточной функции
  - управление, оптимальное по быстродействию 547, 560, 567
- Объект с одним входом и одним выходом, регулятор выхода 687
- Объект с передаточной функцией с  $n$  действительными полюсами 489

Ограничения  
 — по гиперсфере 710  
 Ограничения управления в задачах об оптимальном расходовании топлива 582  
 Ограничения управляющих переменных в задаче о минимуме энергии 709  
 Ограниченные функции 98  
 Операции над множествами 26  
 Опорная гиперплоскость 69  
 — выпуклого множества 74  
 — регулярная 74  
 Оптимальная траектория, возмущения 234  
 Оптимальное по быстродействию управление классом нелинейных систем 561  
 Оптимальное управление  
 — возмущения 234  
 — временные вариации 294  
 — единственность (см. Единственность оптимального управления)  
 — закон оптимального управления для задачи о регуляторе состояния 665  
 — закон оптимального управления для задачи слежения 694  
 — местные вариации 295  
 — обсуждение достаточных условий 316  
 — существование (см. Существование оптимального управления)  
 Оптимальность  
 — глобальная 256  
 — локальная 256  
 Оптимальные и экстремальные управления для вырожденных задач управления 433  
 Ортогональная матрица 52  
 Ортогональные векторы 49  
 Ортонормальный базис 49  
 Открытая сфера 60  
 Открытое множество  
 — определение 62  
 — пересечения 62  
 Открытый интервал 64  
 Отображение  
 Отрицательно определенная матрица 55  
 Отрицательно полуопределенная матрица 55

## П

Пара вход—выход,  
 — определение 153  
 Первая вариация 219  
 Передаточная матрица 165  
 Передаточная функция 164  
 — и дифференциальная система 164  
 — нули 165  
 — отыскание представления в пространстве состояний 165—177  
 — полином в знаменателе 165  
 — полиномы в знаменателе и в числителе 171  
 — полюса 164  
 Пересечение множеств 26  
 Переходная матрица (см. Фундаментальная матрица)  
 Перпендикулярные векторы (см. Ортогональные векторы)  
 Поверхность переключения 484  
 Подмножество (см. Множество)  
 Подобные матрицы 42  
 — связь между их фундаментальными матрицами 129  
 Подобные преобразования 42  
 Подпространство 32  
 — произведение на действительное число 32  
 — сумма 32  
 Полином, характеристический 44  
 Полнота 65  
 Полнота множества 65  
 Положительно определенное внутреннее произведение 48, 55  
 Положительно определенная матрица 55  
 — критерий 54  
 — собственные значения 54  
 Положительно полуопределенная матрица 55  
 Полупространство 69  
 Полюса оптимального регулятора для объекта с двойным интегрированием 687, 16  
 Понтрягин Л. С.  
 — принцип максимума (см. Принцип минимума)

Последовательность  
 — предел последовательности 61  
 — равномерно отходящаяся 65  
 — сходимость последовательности 61  
 Предел  
 — справа и слева 81  
 — последовательности 61  
 Предельная точка  
 — множества 63  
 — последовательности 61  
 — функции 77  
 Представление в пространстве состояний с помощью аналоговой модели 167, 170, 174, 176  
 Преобразование 29, 35, 40  
 — диагональное 45  
 — Лапласа 133  
 — невырожденное 40  
 — тождественное 40  
 Принцип минимума 280—312  
 — вывод на основе вариационного исчисления 243  
 — вырожденные случаи 265  
 — Гамильтониан 263  
 — доказательство 280  
 — временные вариации оптимального управления 294  
 — движущиеся гиперплоскости 292  
 — замена переменных 284  
 — луч для временных вариаций управления 295  
 — конечный конус 299  
 — конус для местных вариаций управления 297  
 — местные вариации оптимального управления 295  
 — описание доказательств 282—283  
 — принцип оптимальности 286  
 — разделяющая гиперплоскость 302  
 — распространение изменений начальных условий 289  
 — теоремы, которые надо доказать, 281—282  
 — условия трансверсальности 307  
 — для задачи с заданным конечным временем 273  
 — для задачи с закрепленным концом и незадаанным временем перехода 264  
 — для той же задачи с переменными параметрами 266  
 — для задачи с конечной стоимостью 275  
 — для задач с незакрепленным концом и незадаанным временем 275  
 — для задачи с переменными параметрами с подвижной конечной точкой 269  
 — для задачи с переменными параметрами с подвижной областью цели 271  
 — замечания 313  
 — каноническая система 264  
 — предположения 260—262  
 — таблица необходимых условий 278—280  
 Принцип оптимальности 286  
 Произведение  
 — векторных функций 76  
 — внутреннее (см. Внутреннее произведение)  
 — на действительное число 37  
 — матриц 38  
 — множеств 27  
 Производная 82  
 — от векторной функции 83  
 — высшего порядка 83  
 — по направлению 88  
 — от произведения 84  
 — от скалярной функции 82  
 — от сложной функции 85  
 — от суммы 84  
 — от функции из  $R$  в  $R_n$  83  
 — от функции из  $R_m$  в  $R$  (см. также Градиент) 85  
 — частная 87  
 — от евклидовой нормы 716  
 Пространство состояний (фазовое пространство) 157  
 Пустое множество 26

## Р

Размерность векторного пространства 33  
 Разрыв функции 80  
 Расстояние между функциями 102

- Расстояние, свойства 58
  - связь с нормой 59
  - функция 59
  - Эвклидово 59
  - примеры 59
- Расход топлива (в единицу времени) 384
- Регулярная точка 74
  - гиперповерхности 90
- Регулярное выпуклое множество 74
- Риккати, уравнение
  - вычисление решения 669
  - для задачи о регуляторе выхода 684
  - для задачи о регуляторе состояния 663, 664
  - для задачи слежения 694
  - для примера первого порядка 677
  - квазипостоянное решение 673

### С

- Самосопряженная система 142
- Свертка функций 136
- Симметричная билинейная форма 46
- Симметричная матрица 47
  - свойства 47
  - собственные значения 54
- Система с инвариантной нормой
  - задача управления 723
  - минимизация времени и топлива 723
  - минимизация времени и энергии 723
  - определение 721
  - пример — вращающееся космическое тело
  - самосопряженная система 722
  - связь между управлениями, оптимальными по расходу топлива и по быстродействию 725
  - управление, оптимальное по быстродействию 724
  - управление, оптимальное по расходу топлива 724
  - управление, оптимальное по энергии 728
  - уравнение для минимума времени 724
  - уравнение для минимума расхода топлива 725
- Скалярное произведение 48
  - свойства 50
- Собственные вектора 42
- Собственные значения 42
  - отрицательно определенной матрицы 55
  - отрицательно полуопределенной матрицы 55
  - подобных матриц 44
  - положительно определенной матрицы 55
  - положительно полуопределенной матрицы 55
  - связь с полюсами передаточной функции 168
  - связь с характеристическим полиномом 43
  - симметричных матриц 54
- Сокращение полюса с нулем 198
- Сопряженные переменные 236
- Сопряженная система 141
- Состояние
  - достижимое 183
  - наблюдаемое 186
  - управляемое 186
  - динамической системы, аксиомы 155—159
  - интуитивные понятия 151—155
  - переходное или полугрупповое свойство 156
- Существование
  - оптимального управления для задачи о регуляторе состояния 667
  - оптимальных управлений 444
  - $\varepsilon$  — оптимальных управлений 333
  - решения дифференциального уравнения 112
  - управления, оптимального по быстродействию 333, 374
  - управления, оптимального по топливу 590, 595, 598
- Схемы управления вращающимся космическим телом 734

### T

- Таблица необходимых условий 278—281
- Теорема о конечном приращении 83
- Тождественное преобразование 40

- Трансверсальность
  - условие 265, 448—449
  - доказательство 307
- Трансверсальный вектор 92
- Транспонированная матрица 38

### У

- Угол между векторами 50
- Управление с минимальной затратой энергии для системы с инвариантной нормой 728
- Управление, оптимальное по быстродействию
  - для вращающегося космического тела 504—505, 512, 525—527, 534
  - для гармонического осциллятора 512, 534
  - демпфированным гармоническим осциллятором 524
  - для двух интеграторов 458
  - для класса нелинейных систем 541
  - для линейных систем
    - единственность оптимального управления 357
    - единственность экстремального управления 361
    - задача о регуляторе 353
    - минимальные изохроны 386
    - необходимые условия 354
    - оптимальная система с обратной связью 362
    - поверхность минимального времени (стоимости) 366
    - связь нормальности задачи с нормальностью системы 357
    - связь оптимального управления и дополнительной переменной с градиентом стоимости 366
    - существование оптимального управления 374
    - уравнение Гамильтона—Якоби 377
    - условия вырожденности 356
    - условия нормальности 357
    - число переключений 359
    - экстремальные управления 359
  - для нелинейной системы первого порядка 539
  - для нелинейной системы второго порядка 544
  - для объекта с  $W = \frac{s + a}{s^2}$  547
  - для объектов с нулями в передаточной функции 560, 567
  - для объекта, представляющего собой два апериодических звена 474
  - при ограничении управление гиперсферой (см. также система с инвариантной нормой) 724
  - для системы  $N$ -го порядка 489
  - для системы третьего порядка
    - закон управления 485—486
    - система с обратной связью 487
- Управление, оптимальное по расходу топлива
  - общая постановка задачи 385
  - необходимые условия 388
  - принцип «Включено—Выключено» 408
  - для линейных систем
    - единственность оптимального управления 399
    - единственность экстремального управления 401
    - задача о регуляторе 395
    - необходимые условия 395
    - достаточные условия нормальности 398
    - достаточные условия вырожденности 398
    - структура оптимальной системы 403
  - формулировки и функционалы 404
  - для объектов
    - апериодическое звено 588
    - два интегратора 591, 592, 600, 608, 616
    - интегратор 582
    - интегратор с апериодическим звеном 622
    - нелинейная система второго порядка 633
- Управление, оптимальное по энергии, 410
- Управляемость 186
  - для линейных, инвариантных во времени систем 187
  - физический смысл 196—203

Управляющая последовательность 452  
 Уравнение выхода 160  
 Уравнение движения Эйлера 526  
 Уравнения состояния 160  
 — аналоговая модель 167, 170, 174, 176  
 — для системы с многими переменными 150  
 — для системы с полюсами 165—171  
 — для системы с полюсами и нулями в передаточной функции 171—178  
 — для  $RL$ -цепочки 145  
 Уравнения состояния и выхода для линейной системы 162  
 Условие Липшица 117  
 Устойчивость систем 142

## Ф

Фундаментальные леммы вариационного исчисления 218, 239  
 Фундаментальная матрица 121—144  
 — вычисление с помощью преобразования Лапласа 133  
 — определение 121  
 — переходное свойство 125  
 — сведение к канонической форме 130  
 — свойства 123—125  
 — сопряженной системы 141  
 — и экспонента от  $At$  127  
 Функционал  
 — минимум функционала 217—222  
 Функционал, определение 181  
 Функция 29  
 — внутреннее произведение 102—105  
 — дифференцируемая 84  
 — знака, векторная  $SIGN$  342  
 — знака, скалярная  $sign$  342  
 — «зона нечувствительности», векторная ( $DEZ$ ) 392  
 — «зона нечувствительности», скалярная  $dez$  390  
 — из  $R$  в  $R$  83  
 — из  $R$  в  $R_n$  84  
 — из  $R_m$  в  $R_n$  88  
 — кусочно непрерывная 81  
 — интеграл от нее 94  
 — кусочно постоянная 81  
 — минимум функции 205, 210  
 — многих переменных (см. Векторные функции)  
 — «насыщение» ( $sat$ ,  $SAT$ ) 428  
 — непрерывная 80  
 — норма 98  
 — норма 1 102  
 — норма 2 103

— область изменения 30  
 — область существования 30  
 — ограниченная 98  
 — однозначная 30  
 — от функции 30  
 — предельные точки 81  
 — разрывы 80  
 — расстояние между функциями 98—103  
 — свертка 136  
 — сложная 82  
 — экстремальные точки 205

## Х

Характеристический полином 44

## Ц

Центральные оси 731

## Ч

Частная производная 87

## Ш

Шварца, неравенство 48  
 — применение для решения оптимальных задач  
 — для функций 104

## Э

Эвклидова норма,  
 — производная от 716  
 Эвклидово пространство 32, 48  
 Эйлер, уравнения движения 526  
 Эквивалентные функции 103  
 Эквивалентность динамических систем 161  
 Экспоненциальная матрица 127  
 — вычисление с помощью преобразования Лапласа 133  
 — для подобных матриц 129  
 — представление в виде ряда 128  
 Экстремум функции 205  
 Энергия управления 657

## Я

Якобиан 89

М. Атанс и П. Фалб  
 ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Технический редактор *Н. Ф. Демкина*

Корректор *Н. И. Шарунина*

Переплет художника *А. Я. Михайлова*

Сдано в производство 15/II 1968 г. Подписано к печати 15/X 1968 г. Тираж 11000 экз.  
 Печ. л. 66,85. Бум. л. 23,88. Уч.-изд. л. 62. Формат 70×108 $\frac{1}{16}$ . Цена 4 р. 48 к. Заказ № 2025

Издательство «МАШИНОСТРОЕНИЕ», Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3

Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома  
 Комитета по печати при Совете Министров СССР  
 Ленинград, ул. Моисеенко, 10

